

STRUMENTI DI MISURA ELETTRODINAMICI

Uno strumento di misura elettrodinamico è essenzialmente costituito da una coppia di bobine (vedi figura 1). La prima di esse (indice 1) si considera fissa ed è percorsa dalla corrente i_1 , la seconda (indice 2) può ruotare intorno ad un asse di traccia O (che supponiamo asse di simmetria di entrambe le bobine) ed è percorsa dalla corrente i_2 .

Il movimento della bobina mobile è contrastato da una molla di richiamo. Il problema che si pone consiste nel calcolare la coppia C esercitata dalla bobina fissa sulla mobile per una generica posizione di quest'ultima (ovvero per il generico angolo α di figura 1) e per due qualsiasi valori delle correnti i_1 e i_2 .

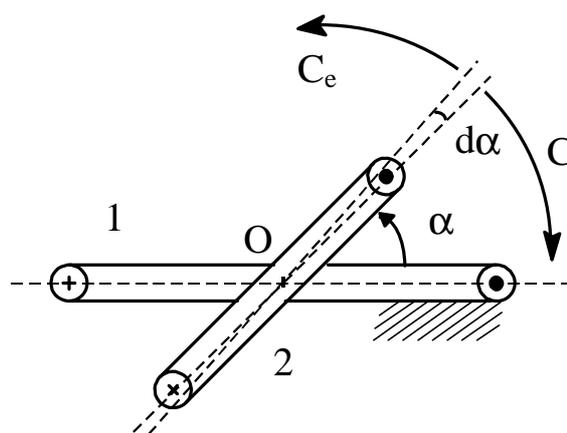


Figura 1. - Sezione schematica di uno strumento di misura elettrodinamico.

A tal fine si attribuisca alla bobina mobile una rotazione virtuale $d\alpha$ e si scelga come trasformazione virtuale del sistema quella caratterizzata dalle seguenti condizioni:

$$i_1 = \text{costante}$$

$$i_2 = \text{costante}$$

Tali condizioni sono sempre realizzabili mediante una opportuna alimentazione delle bobine. Per la suddetta trasformazione, il bilancio energetico si scrive:

$$i_1 d\Phi_{c1} + i_2 d\Phi_{c2} + C_e d\alpha = (dW_m)_{i_1, i_2 = \text{costanti}}$$

dove C_e è la coppia equilibrante della coppia C. Ricordando che l'energia magnetica associata ad una coppia di bobine è definita da:

$$W_m = \frac{1}{2} (i_1 \Phi_{c1} + i_2 \Phi_{c2})$$

risulta:

$$(dW_m)_{i_1, i_2 = \text{costanti}} = \frac{1}{2} (i_1 d\Phi_{c1} + i_2 d\Phi_{c2})$$

da cui

$$C_e d\alpha = -\frac{1}{2} (i_1 d\Phi_{c1} + i_2 d\Phi_{c2}) = -(dW_m)_{i_1, i_2 = \text{costanti}}$$

Si ha quindi, come noto:

$$C_e = - (dW_m / d\alpha)_{i_1, i_2 = \text{costanti}}$$

La derivata dell'energia magnetica rispetto all'angolo α si effettua considerando l'espressione dell'energia magnetica in termini di auto e mutue induttanze, tenuto conto della costanza delle correnti e dell'indipendenza dei coefficienti di autoinduzione dall'angolo α :

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + i_1 i_2 M + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \Rightarrow C_e = -i_1 i_2 \frac{dM}{d\alpha}$$

La coppia, corrispondente ad un generico angolo α , è dunque proporzionale al prodotto delle correnti delle due bobine, secondo la costante di proporzionalità $dM/d\alpha$ che dipende in genere da α . L'effettiva difficoltà che si incontra nel calcolare la coppia è legata alla difficoltà di ricavare la funzione $M(\alpha)$, la cui determinazione è solitamente ardua in quanto richiede la conoscenza del campo generato dalla bobina. Qualunque sia la funzione $M(\alpha)$, appare evidente sul piano fisico (tenuto conto delle ipotesi di simmetria), che, nell'intervallo $-\pi < \alpha < \pi$, essa ha un massimo per α

= 0 e un minimo (uguale e contrario al massimo precedente) per $\alpha = \pi$. Conseguentemente $M(\alpha)$ risulta crescente ($dM/d\alpha > 0$) nell'intervallo $-\pi < \alpha < 0$ e decrescente ($dM/d\alpha < 0$) nell'intervallo $0 < \alpha < \pi$.

La precedente analisi qualitativa della funzione $M(\alpha)$ consente di affermare che la coppia C risulta nulla per $\alpha = 0$ e per $\alpha = \pi$ (tali valori corrispondono alle configurazioni di equilibrio in assenza di altre coppie agenti sulla bobina mobile). Inoltre, se le correnti sono positive, risulta $C < 0$ nell'intervallo $-\pi < \alpha < 0$ e $C > 0$ nell'intervallo $0 < \alpha < \pi$. Quest'ultima osservazione mostra come, in presenza di correnti positive, la coppia che la bobina fissa esercita sulla mobile è tale che quest'ultima, sotto la sua azione, tende a portarsi nella posizione $\alpha = 0$. Da ciò deriva anche che, per correnti positive, la posizione di equilibrio $\alpha = 0$ è stabile, mentre quella $\alpha = \pi$ è instabile.

Detta K la costante elastica della molla di richiamo, si ha

$$C_e = K\alpha = -i_1 i_2 \frac{dM}{d\alpha}$$

Per gli apparecchi di misura elettrodinamici si cerca di realizzare soluzioni costruttive tali da rendere costante la quantità $dM/d\alpha$. Con questa ipotesi è possibile scrivere una relazione di proporzionalità tra le grandezze istantanee in gioco:

$$\alpha = k i_1 i_2$$

dove k è il rapporto tra $dM/d\alpha$ e la costante elastica K della molla. In teoria, quindi, l'ago dello strumento di misura, solidale con la bobina mobile, oscilla attorno alla posizione di equilibrio. In realtà, l'inerzia della bobina mobile è tale da rendere inapprezzabili tali oscillazioni e l'angolo misurato dall'indice dello strumento è l'angolo medio. Risulta pertanto:

$$\alpha = k \frac{1}{T} \int_0^T i_1 i_2 dt = k I_1 I_2 \cos \theta \quad (1)$$

Dove sono stati introdotti i valori efficaci I_1 e I_2 delle correnti i_1 e i_2 e l'angolo di sfasamento θ tra le due correnti. La (46) è la relazione fondamentale su cui si basano gli strumenti di misura elettrodinamici.

• Amperometro

Le due bobine sono collegate in serie sul circuito di cui si vuole misurare la corrente, come mostrato in figura 2. L'impedenza interna dell'amperometro deve essere molto bassa rispetto a quella dell'utilizzatore U . In caso contrario la presenza dello strumento altera in maniera consistente il regime di corrente da misurare. Risulta chiaramente:

$$I_1 = I_2 = I, \theta = 0,$$

per cui, dalla (1) si ricava:

$$\alpha = k I^2$$

Lo strumento quindi fornisce una misura della corrente efficace che attraversa l'utilizzatore U .

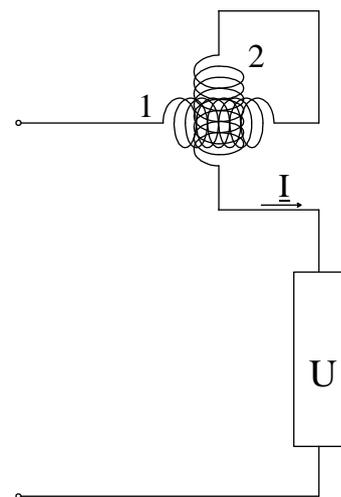


Figura 2.

• **Voltmetro**

Le bobine di un voltmetro sono collegate in serie tra loro come mostrato in figura 3. La resistenza interna dello strumento deve essere elevata per rendere minima la corrente I_v e, di conseguenza, rendere minime le perturbazioni a del regime. Il voltmetro è collegato in parallelo con l'utilizzatore, come mostrato a lato. Anche in questo caso si ha:

$$I_1 = I_2 = I_v, \theta = 0$$

e quindi

$$\alpha = k(I_v)^2$$

Poiché $I_v \cong V/R_v$ si può anche scrivere:

$$\alpha = k'V^2$$

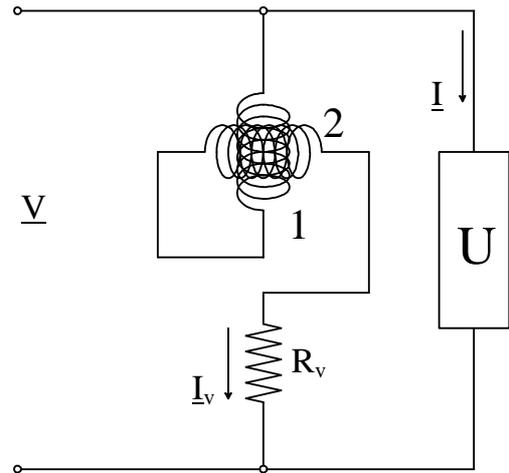


Figura 3.

Lo strumento fornisce dunque una misura del valore efficace della tensione cui è sottoposto U.

• **Wattmetro.**

Una bobina dello strumento, detta bobina **amperometrica**, è collegata in serie con l'utilizzatore U; l'altra bobina, detta **voltmetrica** è collegata in parallelo con l'utilizzatore ed in serie con una resistenza R_v come mostrato in figura 4. La resistenza R_v deve essere elevata per due motivi:

- 1) per limitare la corrente I_v , e quindi le perturbazioni al regime;
- 2) per rendere trascurabile la reattanza della bobina voltmetrica. In tali condizioni, l'impedenza del ramo in parallelo all'utilizzatore coincide approssimativamente con la resistenza R_v .

Si può quindi scrivere:

$$I_1 = I, I_2 = I_v \approx V/R_v, \theta \approx \varphi$$

Dalla (1) si ricava infine:

$$\alpha = k' V I \cos\varphi = k' P$$

Il wattmetro quindi fornisce la misura della potenza attiva assorbita dall'utente U.

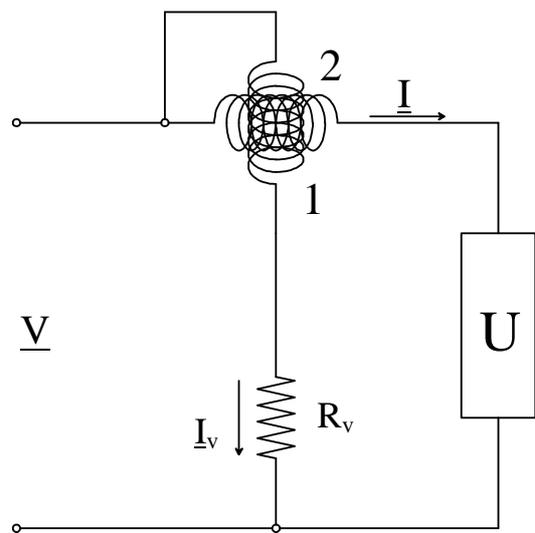


Figura 4.