

SISTEMI TRIFASE

I sistemi trifase sono schematizzabili come in figura 1. Non si fa nessuna ipotesi né sul generatore di alimentazione situato prima della sezione A-A, né sull'utilizzatore situato dopo la sezione B-B.

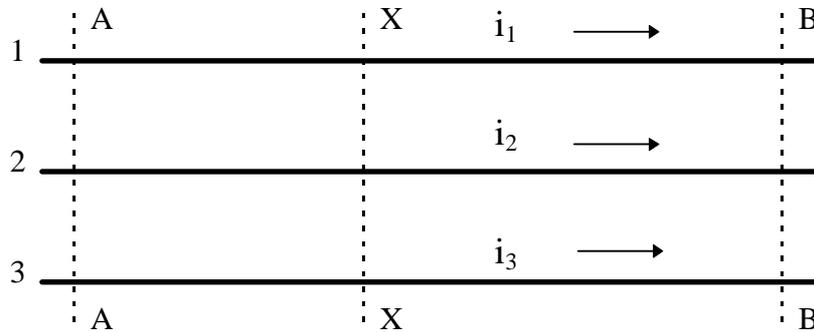


Figura 1. - Schema di linea trifase.

Per una generica sezione X-X valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \text{div } \mathbf{J} = 0 \\ \text{rot } \mathbf{E} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0 \\ v_{12}(t) + v_{23}(t) + v_{31}(t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Le equazioni (1) e (2) sono relative ai valori istantanei delle **correnti di linea** $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$ e delle **tensioni concatenate** $v_{12}(t)$, $v_{23}(t)$, $v_{31}(t)$ avendo posto v_{hk} = tensione tra il filo h ed il filo k. Utilizzando la notazione simbolica di Steinmetz le (1), (2) si scrivono come:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \\ \underline{V}_{12} + \underline{V}_{23} + \underline{V}_{31} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Casi particolari di notevole importanza sono i seguenti:

Sistemi trifase simmetrici

$$|\underline{V}_{12}| = |\underline{V}_{23}| = |\underline{V}_{31}| = V$$

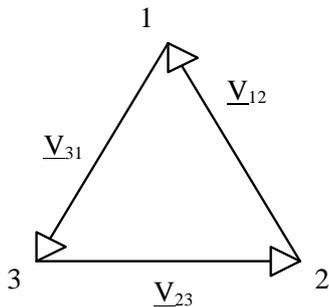


Figura 2. - Sistema simmetrico.

Le tensioni concatenate formano un triangolo equilatero (vedi figura 2).

$$\begin{aligned} \underline{V}_{23} &= \underline{V}_{12} e^{-j2\pi/3} \\ \underline{V}_{31} &= \underline{V}_{12} e^{-j4\pi/3} \end{aligned}$$

Sistemi trifase equilibrati

$$|\underline{I}_1| = |\underline{I}_2| = |\underline{I}_3| = I$$

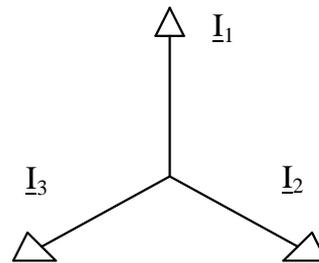


Figura 3. - Sistema equilibrato.

Le correnti formano una stella equilibrata (vedi figura 3).

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \underline{I}_1 e^{-j2\pi/3} \\ \underline{I}_3 &= \underline{I}_1 e^{-j4\pi/3} \end{aligned}$$

Definendo il numero complesso $\alpha = e^{-j4\pi/3}$ ed il suo quadrato $\alpha^2 = e^{-j2\pi/3}$, la terna delle tensioni concatenate in un sistema simmetrico e la terna delle correnti in un sistema equilibrato si scrivono rispettivamente come:

$$(\underline{V}_{12}, \alpha^2 \underline{V}_{12}, \alpha \underline{V}_{12}) \quad \Bigg| \quad (\underline{I}_{12}, \alpha^2 \underline{I}_{12}, \alpha \underline{I}_{12})$$

La terna $(1, \alpha^2, \alpha)$ viene detta terna destra o terna diretta in contrapposizione alla terna sinistra o terna inversa $(1, \alpha, \alpha^2)$. Nel seguito, tranne precisazione contraria, supporremo sempre che:

1. - I sistemi trifase siano simmetrici;
2. - La terna delle tensioni concatenate sia diretta;
3. - La linea di trasmissione tra generatore ed utilizzatore non dia luogo a cadute di tensione in modo da potere considerare in ogni sezione della linea la stessa terna di tensioni concatenate.

Le ipotesi 1 e 2 sono dovute al fatto che il generatore trifase può essere schematizzato come tre generatori di tensione monofase isofrequenziali con lo stesso valore efficace ma sfasati di $2\pi/3$ (vedi figura 4).

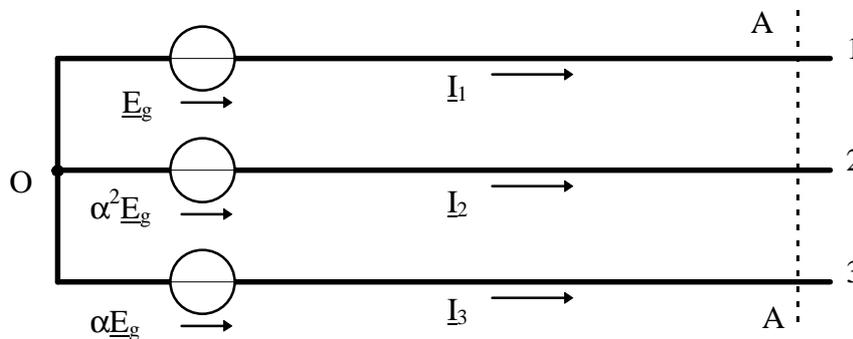


Figura 4. - Schema di generatore trifase.

Con la scelta di figura le tensioni concatenate risultano essere una terna diretta, come si deduce dalla applicazione della Legge di Kirchhoff delle Tensioni in forma Simbolica e dal relativo diagramma illustrato in figura 5.

Terna diretta di F.e.m. a stella

$$\begin{cases} \underline{V}_{12} = \underline{E}_g - \alpha^2 \underline{E}_g \\ \underline{V}_{23} = \alpha^2 \underline{E}_g - \alpha \underline{E}_g \\ \underline{V}_{31} = \alpha \underline{E}_g - \underline{E}_g \end{cases}$$

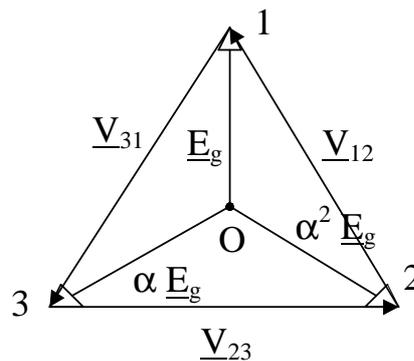


Figura 5.

STELLA DI IMPEDENZE

Il calcolo delle correnti nei rami di una stella di impedenze (vedi figura 6) si può eseguire con vari metodi. Si tratta di risolvere il seguente sistema nelle incognite $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$:

$$\begin{cases} \underline{V}_{12} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{Z}_2 \underline{I}_2 \\ \underline{V}_{23} = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 - \underline{Z}_3 \underline{I}_3 \\ \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

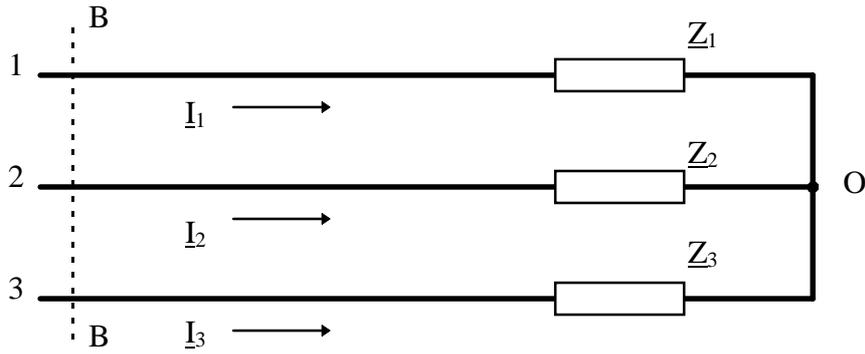


Figura 6.

Il modo più semplice di risolvere il sistema (5) è attuare un cambiamento di variabili dalle incognite correnti \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_3 alle incognite tensioni di fase \underline{E}_1 , \underline{E}_2 , \underline{E}_3 :

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_1 \underline{E}_1 \\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_2 \underline{E}_2 \\ \underline{I}_3 = \underline{Y}_3 \underline{E}_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \underline{Y}_1 = 1 / \underline{Z}_1 \\ \underline{Y}_2 = 1 / \underline{Z}_2 \\ \underline{Y}_3 = 1 / \underline{Z}_3 \end{cases} \quad (6)$$

Le \underline{Y}_1 , \underline{Y}_2 , \underline{Y}_3 sono dette ammettenze. Il sistema (5) si scrive quindi come:

$$\begin{cases} \underline{V}_{12} = \underline{E}_1 - \underline{E}_2 \\ \underline{V}_{23} = \underline{E}_2 - \underline{E}_3 \\ \underline{Y}_1 \underline{E}_1 + \underline{Y}_2 \underline{E}_2 + \underline{Y}_3 \underline{E}_3 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Una semplice sostituzione rende:

$$\underline{Y}_1 (\underline{V}_{12} + \underline{E}_2) + \underline{Y}_2 \underline{E}_2 + \underline{Y}_3 (-\underline{V}_{23} + \underline{E}_2) = 0$$

da cui si deduce \underline{E}_2 , e quindi anche \underline{E}_1 ed \underline{E}_3 :

$$\underline{E}_1 = \frac{\underline{Y}_2 \underline{V}_{12} - \underline{Y}_3 \underline{V}_{31}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}, \quad \underline{E}_2 = \frac{\underline{Y}_3 \underline{V}_{23} - \underline{Y}_1 \underline{V}_{12}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}, \quad \underline{E}_3 = \frac{\underline{Y}_1 \underline{V}_{31} - \underline{Y}_2 \underline{V}_{23}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

Le correnti sono allora espresse da:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{V}_{12} - \underline{Y}_3 \underline{Y}_1 \underline{V}_{31}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}, \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{Y}_2 \underline{Y}_3 \underline{V}_{23} - \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{V}_{12}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}, \quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{Y}_1 \underline{Y}_3 \underline{V}_{31} - \underline{Y}_2 \underline{Y}_3 \underline{V}_{23}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

CENTRO DEL SISTEMA DELLE TENSIONI

Le tensioni di fase definite dalla relazione: $\underline{E}_k = \underline{Z}_k \underline{I}_k$
(con $k=1,2,3$) soddisfano le relazioni:

$$\begin{cases} \underline{V}_{12} = \underline{E}_1 - \underline{E}_2 \\ \underline{V}_{23} = \underline{E}_2 - \underline{E}_3 \\ \underline{V}_{31} = \underline{E}_3 - \underline{E}_1 \end{cases} \quad (8)$$

Dalle (8) si deduce l'esistenza di un punto O sul piano complesso che gode della proprietà seguente: **Congiungendo O con i vertici del triangolo delle tensioni concatenate si ottengono i tre vettori rappresentativi della terna delle tensioni di fase.** (Vedi figura 7)

Sia G il baricentro del triangolo delle tensioni concatenate. Sia \underline{E}_0 il vettore che collega G ad O. Si definiscono **tensioni principali di fase**, o **tensioni stellate**, relative ad un sistema di tensioni concatenate i vettori \underline{E}_{1a} , \underline{E}_{2a} , \underline{E}_{3a} che si ottengono congiungendo il baricentro G con i vertici del triangolo delle tensioni concatenate. La relazione tra tensioni principali e tensioni di fase si evince dalla figura 8:

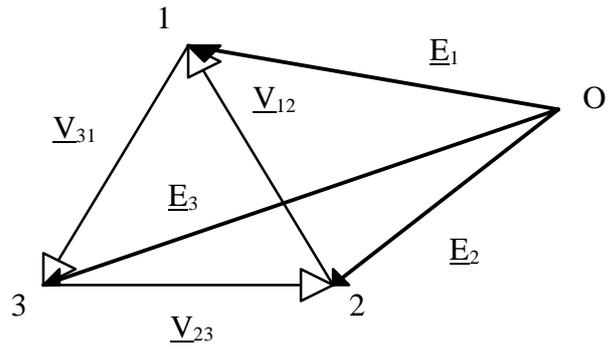


Figura 7.

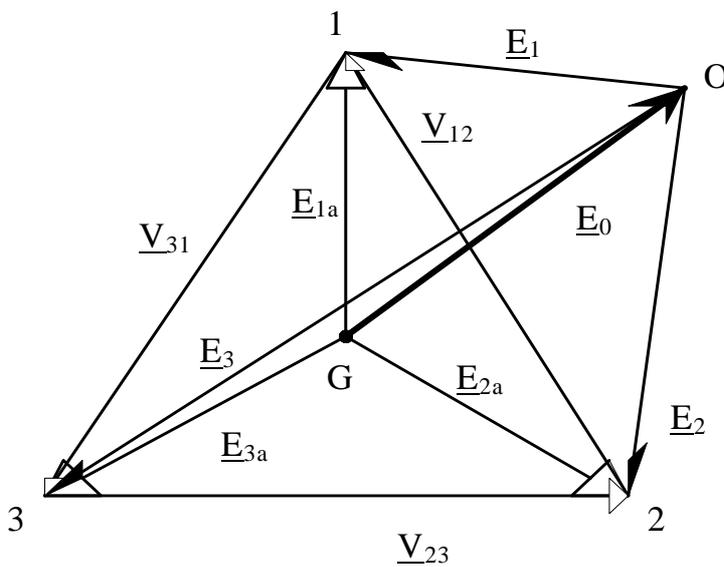


Figura 8.

$$\begin{cases} \underline{E}_1 = \underline{E}_{1a} - \underline{E}_0 \\ \underline{E}_2 = \underline{E}_{2a} - \underline{E}_0 \\ \underline{E}_3 = \underline{E}_{3a} - \underline{E}_0 \end{cases} \quad (9)$$

O è il **centro concreto**
G è il **centro astratto**

Tenendo conto delle (6) e delle (9) le relazioni tra correnti di ramo e tensioni principali di fase sono dunque:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_1(\underline{E}_{1a} - \underline{E}_0) \\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_2(\underline{E}_{2a} - \underline{E}_0) \\ \underline{I}_3 = \underline{Y}_3(\underline{E}_{3a} - \underline{E}_0) \end{cases} \quad (10)$$

Sommando membro a membro queste relazioni, e ricordando che la somma delle correnti si annulla, si ottiene:

$$\underline{E}_0 = \frac{\underline{Y}_1 \underline{E}_{1a} + \underline{Y}_2 \underline{E}_{2a} + \underline{Y}_3 \underline{E}_{3a}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \quad (11)$$

Questa relazione, note le ammettenze e le tensioni principali, permette di individuare il centro concreto O tramite \underline{E}_0 . Questo vettore, introdotto nelle (10) permette di calcolare le correnti.

Si ricordi che il sistema trifase è simmetrico e che la terna delle tensioni concatenate è diretta. Questo consente di dedurre alcune proprietà fondamentali delle tensioni principali (vedi figura 9).

$$\underline{E}_{1a} + \underline{E}_{2a} + \underline{E}_{3a} = 0$$

$$|\underline{E}_{1a}| = |\underline{E}_{2a}| = |\underline{E}_{3a}| = E$$

$$E = \frac{V}{\sqrt{3}}$$

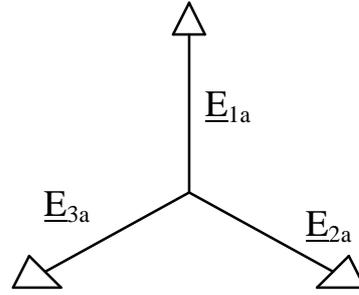


Figura 9.

Si deduce quindi che anche la terna delle tensioni principali di fase è una terna diretta espressa da $(\underline{E}_{1a}, \alpha^2 \underline{E}_{1a}, \alpha \underline{E}_{1a})$.

STELLE EQUILIBRATE

Le stelle equilibrate sono formate da tre impedenze uguali $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}$ (e quindi $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \underline{Y}_3 = \underline{Y}$). In questo caso la (11) fornisce $\underline{E}_0 = 0$ e quindi le tensioni di fase coincidono con le tensioni principali di fase. Dalla (10) si ottiene:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}\underline{E}_{1a} \\ \underline{I}_2 = \underline{Y}\underline{E}_{2a} \\ \underline{I}_3 = \underline{Y}\underline{E}_{3a} \end{cases}$$

da cui si deduce che il sistema è anche equilibrato ($|\underline{I}_1| = |\underline{I}_2| = |\underline{I}_3|$).

TRIANGOLO DI IMPEDENZE

Il calcolo delle correnti nei rami di un triangolo di impedenze (vedi figura 10) si esegue direttamente se sono note le impedenze dei rami e le tensioni concatenate. Dalle correnti di fase \underline{I}_{12} , \underline{I}_{23} , \underline{I}_{31} si deducono immediatamente le correnti assorbite dalla linea \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_3 :

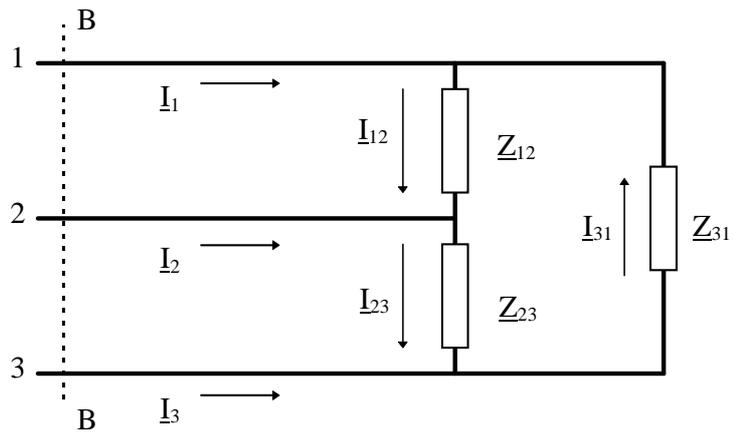


Figura 10.

$$\begin{cases} \underline{I}_{12} = \underline{V}_{12} / \underline{Z}_{12} \\ \underline{I}_{23} = \underline{V}_{23} / \underline{Z}_{23} \\ \underline{I}_{31} = \underline{V}_{31} / \underline{Z}_{31} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} \\ \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} \\ \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} \end{cases}$$

TEOREMA DI THEVENIN

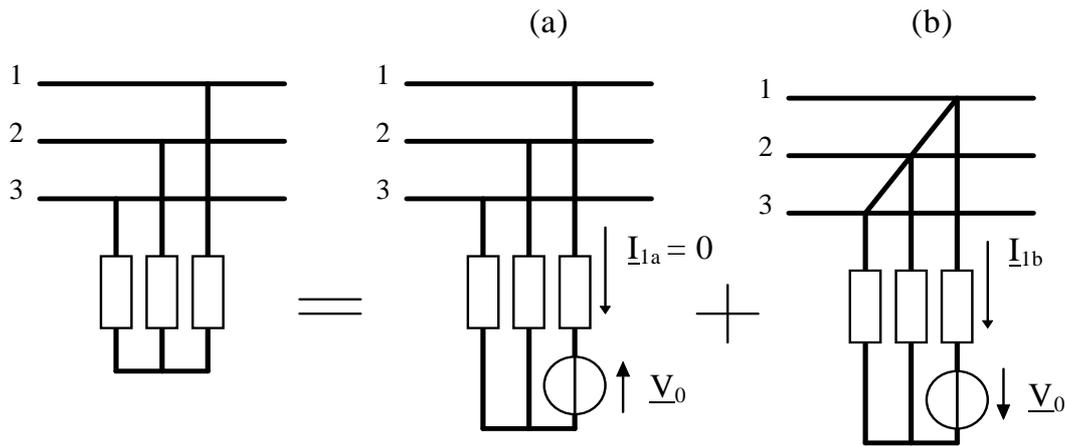


Figura 11.

Assegnata una stella di impedenze, se si è interessati a calcolare una sola corrente di ramo (ad esempio \underline{I}_1), può essere utile il teorema di Thevenin. Grazie alla linearità di tutte le equazioni viste finora si può sfruttare la sovrapposizione degli effetti (vedi figura 11) per separare il circuito iniziale nei due circuiti (a) e (b). Nel circuito (a) è presente sia la rete che un generatore \underline{V}_0 tale per cui $\underline{I}_{1a} = 0$. Nel circuito (b) la rete è cortocircuitata e un generatore $-\underline{V}_0$ viene posto sul ramo 1. La corrente sul ramo 1 è data da:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{1a} + \underline{I}_{1b} = \underline{I}_{1b}$$

La corrente \underline{I}_{1b} si calcola facilmente dal circuito (b):
$$\underline{I}_{1b} = \frac{\underline{V}_0}{\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}}$$

La tensione \underline{V}_0 , con il vincolo $\underline{I}_{1a} = 0$ si calcola dal circuito (a):

$$\begin{cases} \underline{I}_{2a} + \underline{I}_{3a} = 0 \\ \underline{V}_{23} = \underline{Z}_2 \underline{I}_{2a} - \underline{Z}_3 \underline{I}_{3a} \\ \underline{V}_{12} = \underline{V}_0 - \underline{Z}_2 \underline{I}_{2a} \end{cases} \Rightarrow \underline{V}_0 = \underline{V}_{12} + \frac{\underline{Z}_2 \underline{V}_{23}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$$

Risulta quindi:
$$\underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}} \cdot \left(\underline{V}_{12} + \frac{\underline{Z}_2 \underline{V}_{23}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \right) = \frac{\underline{Z}_3 \underline{V}_{12} - \underline{Z}_2 \underline{V}_{31}}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3}$$

UTILIZZATORE QUALUNQUE - TEOREMA DI EQUIVALENZA

Definiamo **stella equivalente** di un utilizzatore assegnato una stella di impedenze che sotto le stesse tensioni concatenate richiama le stesse correnti dell'utilizzatore (vedi figura 12). **Esistono ∞^2 terne di impedenze a stella equivalenti a un dato utilizzatore.**

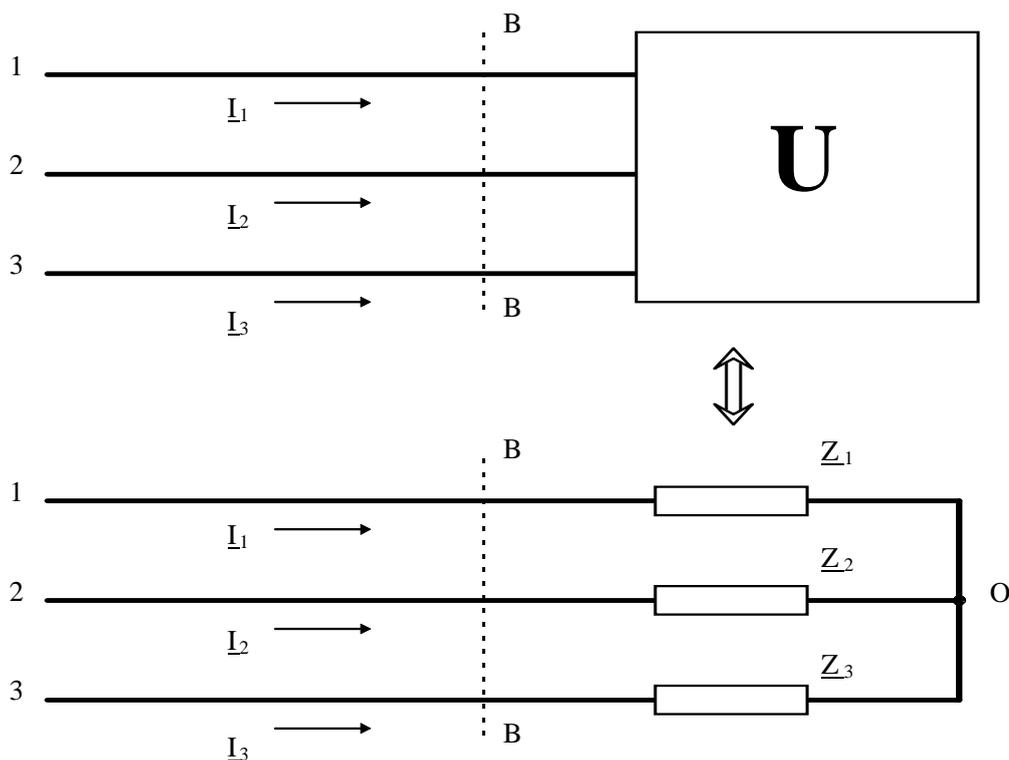


Figura 12. - Schematizzazione del Teorema di Equivalenza

Infatti il sistema da risolvere per trovare le impedenze $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$ è dato da:

$$\begin{cases} \underline{V}_{12} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{Z}_2 \underline{I}_2 \\ \underline{V}_{23} = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 - \underline{Z}_3 \underline{I}_3 \\ \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \end{cases}$$

ove si intendono assegnate tensioni e correnti. Pertanto la terza equazione è completamente ininfluyente sulla determinazione delle impedenze. Il sistema è completamente determinato fissando una delle impedenze incognite. Si ha quindi a che fare con un sistema indeterminato che ammette ∞^2 soluzioni. Infatti la scelta di una impedenza implica la scelta di due parametri: $\underline{Z} = R + jX$.

Una stella equivalente all'utilizzatore U può essere anche scelta, anziché fissando un'impedenza, assumendo arbitrariamente una delle tre tensioni di fase relative alla stella stessa e deducendo le altre due dalle relazioni:

$$\begin{cases} \underline{V}_{12} = \underline{E}_1 - \underline{E}_2 \\ \underline{V}_{23} = \underline{E}_2 - \underline{E}_3 \end{cases}$$

Note le tensioni di fase, le impedenze si ricavano facilmente dalle $\underline{Z}_k = \underline{E}_k / \underline{I}_k$ (con $k=1,2,3$). Questo procedimento coincide sostanzialmente col definire la posizione del centro concreto O del sistema delle tensioni di fase.

POTENZA NEI SISTEMI A TRE FILI

Il teorema di equivalenza permette di esprimere la **potenza istantanea** assorbita da un utilizzatore U qualsiasi come la somma delle potenze istantanee relative ad ogni singola fase:

$$p(t) = e_1(t)i_1(t) + e_2(t)i_2(t) + e_3(t)i_3(t) \quad (12)$$

In questa relazione compaiono le tensioni istantanee di fase $e_k(t)$ che non si possono misurare direttamente sul sistema in quanto ricavate dalla terna di tensioni \underline{E}_k . Deve essere possibile esprimere la potenza apparente tramite grandezze misurabili, cioè tensioni concatenate e correnti di linea. Per fare questo è sufficiente esprimere una corrente in funzione delle altre:

$$i_1(t) = -i_2(t) - i_3(t)$$

ottenendo così la relazione:

$$p(t) = (e_2(t) - e_1(t))i_2(t) + (e_3(t) - e_1(t))i_3(t)$$

E ricordando che:
$$\begin{cases} v_{12}(t) = e_1(t) - e_2(t) \\ v_{31}(t) = e_3(t) - e_1(t) \end{cases}$$

Si ottiene:

$$p(t) = -v_{12}(t)i_2(t) + v_{31}(t)i_3(t) \quad (13)$$

Questa relazione e le altre due ottenibili scegliendo la fase di riferimento sono fondamentali per la misura delle potenze.

Grazie al teorema di equivalenza la **potenza complessa** di un sistema trifase si può esprimere come somma dei contributi relativi ai singoli rami di una delle ∞^2 stelle equivalenti. Si ha quindi:

$$\underline{N} = \underline{E}_1 \underline{I}_1^* + \underline{E}_2 \underline{I}_2^* + \underline{E}_3 \underline{I}_3^* \quad (14)$$

La \underline{N} così definita risulta invariante rispetto al sistema di tensioni di fase che in essa si introduce. Benché tale invarianza sia una naturale conseguenza del teorema di equivalenza, è bene verificarla direttamente. Si considerino quindi due punti O e O' con le corrispondenti terne di tensioni di fase. Si riconosce dalla figura 13 che sussistono le seguenti relazioni:

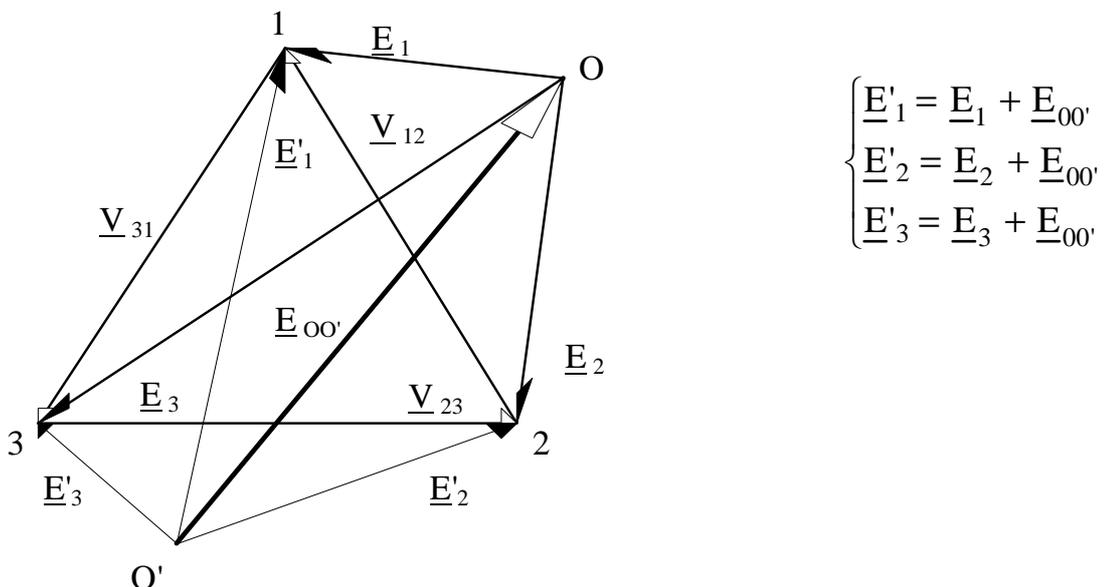


Figura 13.

Risulta quindi:

$$\underline{N}' = \underline{E}'_1 \underline{I}'_1^* + \underline{E}'_2 \underline{I}'_2^* + \underline{E}'_3 \underline{I}'_3^* = \underline{E}_1 \underline{I}_1^* + \underline{E}_2 \underline{I}_2^* + \underline{E}_3 \underline{I}_3^* + \underline{E}_{oo'} (\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3)^* = \underline{N}$$

essendo il termine tra parentesi chiaramente nullo.

Per quanto detto sopra la **potenza attiva** di un sistema trifase si può esprimere come la potenza attiva assorbita da una qualunque stella equivalente:

$$P = E_1 I_1 \cos \varphi_1 + E_2 I_2 \cos \varphi_2 + E_3 I_3 \cos \varphi_3 \quad (15)$$

dove $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sono gli angoli di sfasamento tra una qualsiasi terna di tensioni di fase e la terna delle correnti.

Analogamente, la **potenza reattiva** di un sistema trifase si può esprimere come la potenza reattiva assorbita da una qualunque stella equivalente:

$$Q = E_1 I_1 \sin \varphi_1 + E_2 I_2 \sin \varphi_2 + E_3 I_3 \sin \varphi_3 \quad (16)$$

Consideriamo ora l'espressione 14 della potenza complessa, sostituendo in essa la legge di Kirchhoff delle correnti si ottiene:

$$\dot{N} = \dot{E}_1 \dot{I}_1^* + \dot{E}_2 \dot{I}_2^* + \dot{E}_3 \dot{I}_3^* = \dot{E}_1 \dot{I}_1^* + \dot{E}_2 \dot{I}_2^* + \dot{E}_3 (-\dot{I}_1^* - \dot{I}_2^*) = (\dot{E}_1 - \dot{E}_3) \dot{I}_1^* + (\dot{E}_2 - \dot{E}_3) \dot{I}_2^* \quad (16.a)$$

da cui si deduce la seguente formula binomi della potenza complessa

$$\dot{N} = \dot{V}_{13} \dot{I}_1^* + \dot{V}_{23} \dot{I}_2^* \quad (16.b)$$

o equivalentemente

$$\dot{N} = \dot{V}_{12} \dot{I}_1^* + \dot{V}_{32} \dot{I}_3^* \quad (16.c)$$

$$\dot{N} = \dot{V}_{21} \dot{I}_2^* + \dot{V}_{31} \dot{I}_3^*$$

UTILIZZATORE EQUILIBRATO

Nel caso particolare, di notevole interesse tecnico, che l'utilizzatore U sia equilibrato è conveniente esprimere la potenza complessa attraverso le tensioni principali:

$$\underline{N} = \underline{E}_{1a} \underline{I}_1^* + \underline{E}_{2a} \underline{I}_2^* + \underline{E}_{3a} \underline{I}_3^* = 3 \underline{E}_{1a} \underline{I}_1^*$$

avendo posto, come usuale:

$$|\underline{V}_{12}| = |\underline{V}_{23}| = |\underline{V}_{31}| = V$$

$$|\underline{I}_1| = |\underline{I}_2| = |\underline{I}_3| = I$$

$$|\underline{E}_{1a}| = |\underline{E}_{2a}| = |\underline{E}_{3a}| = E$$

Assumendo che sia φ l'angolo di sfasamento tra la terna delle tensioni principali e la terna delle correnti, risulta anche:

$$\underline{N} = 3EIe^{j\varphi} = 3EI \cos \varphi + j3EI \sin \varphi \quad (18)$$

Da cui si deduce per le potenze attiva e reattiva (poiché $\underline{N} = P + jQ$):

$$P = 3EI \cos \varphi = \sqrt{3}VI \cos \varphi \quad (19.a)$$

$$Q = 3EI \sin \varphi = \sqrt{3}VI \sin \varphi \quad (19.b)$$

Queste ultime sono relazioni di uso corrente per i carichi equilibrati. È importante ricordare che l'angolo φ che compare in esse è l'angolo di sfasamento tra una tensione principale e la corrispondente corrente.

È rilevante osservare che **la potenza istantanea nei sistemi simmetrici ed equilibrati non è funzione del tempo**, contrariamente a quanto accade per i sistemi monofase o per il generico trifase non simmetrico o non equilibrato. La proprietà si dimostra facilmente utilizzando la relazione tra numeri complessi e grandezze sinusoidali:

$$\begin{aligned} p(t) &= e_1(t)i_1(t) + e_2(t)i_2(t) + e_3(t)i_3(t) = \\ &= E_m I_m \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) + E_m I_m \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) + E_m I_m \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right) = \\ &= 2EI \left[\cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) + \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right) \right] = \\ &= EI \left[\cos(\varphi) + \cos(2\omega t - \varphi) + \cos(\varphi) + \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right) + \cos(\varphi) + \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{8\pi}{3}\right) \right] = \\ &= 3EI \cos \varphi + EI \left[\cos(2\omega t - \varphi) + \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \right] = \\ &= 3EI \cos \varphi = P \end{aligned}$$

MISURA DELLE POTENZE - INSERZIONE ARON

Si consideri il problema della misura delle grandezze N, P e Q con riferimento ai sistemi trifase simmetrici. Dati i tre fili di linea per misurare la potenza attiva assorbita da una sola fase è sufficiente inserire un wattmetro in modo che la bobina amperometrica sia percorsa dalla corrente di fase e quella voltmetrica sia inserita tra il filo di linea e ed il centro della stella (vedi figura 17).

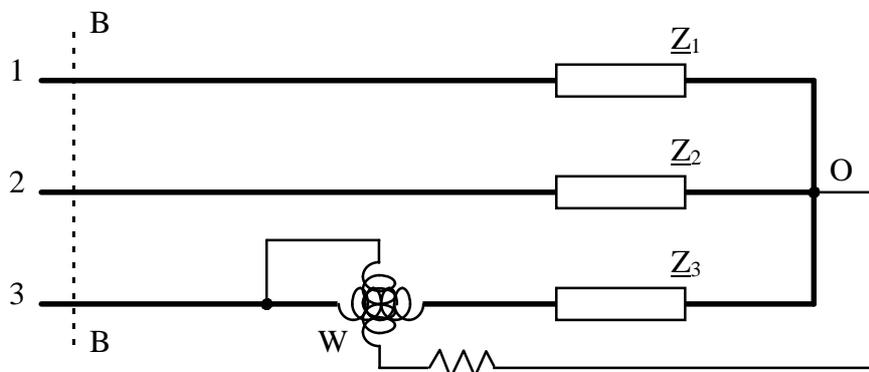


Figura 17.

Se il centro della stella non è accessibile bisogna ricorrere al centro stella artificiale mediante l'impiego di due resistori di valore uguale alla resistenza in serie alla bobina voltmetrica, dato che in tal modo la tensione sulla bobina voltmetrica coincide con la tensione di fase (vedi figura 18).

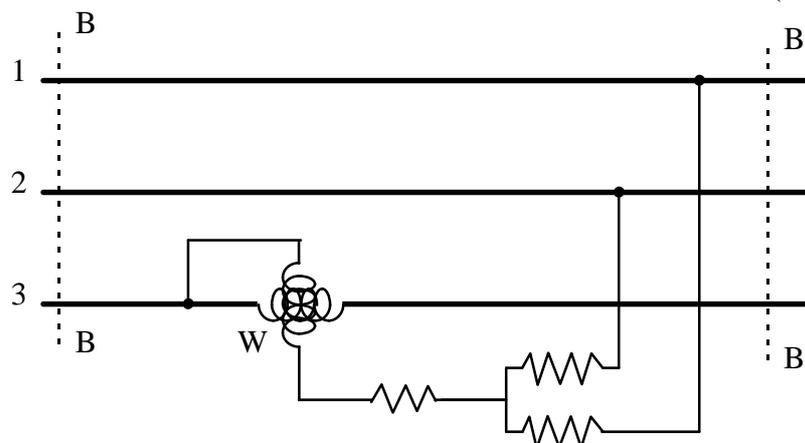


Figura 18.

Come si è visto la potenza attiva può essere espressa in forma binomia:

$$P = \text{Re} \left[\dot{V}_{12} \dot{I}_1^* + \dot{V}_{32} \dot{I}_3^* \right]$$

Questa formula mostra come la potenza attiva possa misurarsi sommando le letture di due soli Wattmetri inseriti come in figura 19 (inserzione Aron)

Teorema di Aron

“La misura della potenza attiva per sistemi trifase può essere eseguita con due wattmetri inseriti con le bobine amperometriche disposte in due qualsiasi dei tre fili e le corrispondenti voltmetriche derivate tra il filo che contiene l'amperometrica ed il terzo filo”.

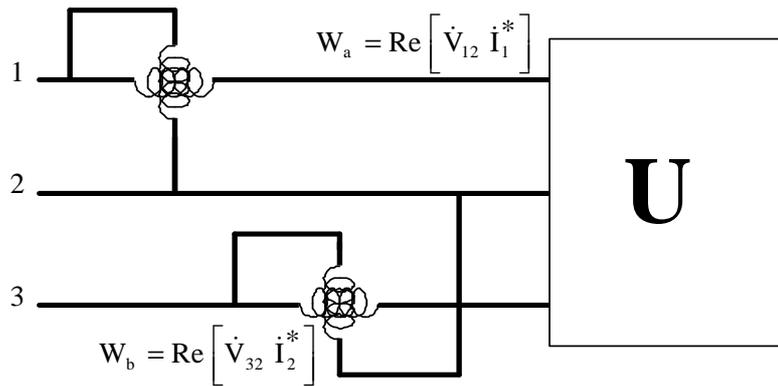


Figura 19. - Misura della potenza attiva.

cioè $P = W_a + W_b$. Nel caso particolare, di notevole interesse tecnico, che l'utilizzatore U sia equilibrato P e Q sono date dalle eq.(19). Facendo riferimento all'inserzione Aron e alle figure 19 e 21 si ricavano le letture dei due Wattmetri:

$$W_a = VI \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) = VI \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \right) \quad (20)$$

$$W_b = VI \cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) = VI \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \right)$$

Sommando e sottraendo membro a membro le (20) si trova il risultato notevole:

$$W_b + W_a = \sqrt{3}VI \cos \varphi = P \quad (21)$$

$$W_b - W_a = VI \sin \varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

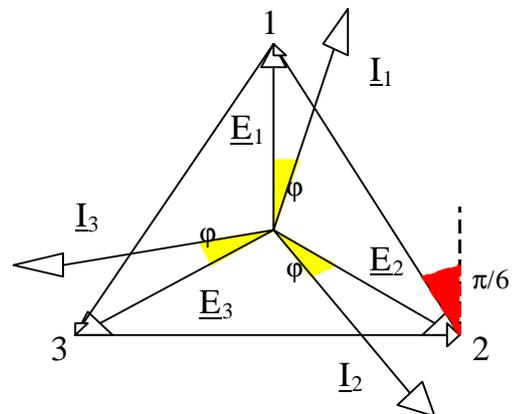


Figura 21.

Dalla prima delle (21) si trova il risultato già noto, dalla seconda si deduce che nei sistemi equilibrati la potenza reattiva può ricavarsi, a meno del fattore $\sqrt{3}$, anch'essa dall'inserzione Aron per differenza fra le letture dei due Wattmetri.

FATTORE DI POTENZA

Per un sistema a tre fili simmetrico ed equilibrato il **fattore di potenza** è espresso dal coseno dell'angolo φ di sfasamento fra una qualsiasi delle correnti di linea e la corrispondente tensione di fase. Quando il sistema è non equilibrato, la definizione di fattore di potenza è:

Il fattore di potenza del sistema è il coseno dell'angolo di cui occorre ruotare la stella delle correnti rispetto a quella delle tensioni principali affinché la potenza attiva assuma il valore massimo.

Sia dunque Φ il generico angolo di sfasamento. La potenza attiva risulta quindi:

$$P(\Phi) = \sum_{k=1}^3 E_k I_k \cos(\varphi_k - \Phi)$$

Si impone che la derivata di P rispetto a Φ sia nulla:

$$\frac{dP}{d\Phi}(\Phi) = -\sum_{k=1}^3 E_k I_k \sin(\varphi_k - \Phi) = 0$$

cioè:

$$\cos \Phi \sum_{k=1}^3 E_k I_k \sin \varphi_k - \sin \Phi \sum_{k=1}^3 E_k I_k \cos \varphi_k = 0$$

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{\sum_{k=1}^3 E_k I_k \sin \varphi_k}{\sum_{k=1}^3 E_k I_k \cos \varphi_k} = \frac{Q}{P}$$

$$\cos \Phi = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{P}{N} \quad (22)$$

La definizione data di fattore di potenza per i sistemi trifase è quindi formalmente identica al $\cos \varphi$ definito per i sistemi monofase. Da questa definizione deriva anche il metodo per la misura del fattore di potenza di un sistema a tre fili: è sufficiente misurare le potenze attiva e reattiva e quindi applicare una delle due espressioni sopra riportate.

SISTEMI A QUATTRO FILI (TRIFASE CON NEUTRO)

La presenza di un quarto filo n (**neutro**), porta a considerare sistemi del tipo indicato in figura 22. Se si alimenta il sistema con tre generatori disposti a stella aventi f.e.m. simmetriche disposte in terna diretta ($\underline{E}_g, \alpha^2 \underline{E}_g, \alpha \underline{E}_g$) si stabilisce fra i fili 1,2,3 una terna di tensioni concatenate simmetrica (a meno delle eventuali cadute), le cui tensioni principali di fase sono le f.e.m. suddette. Oltre a ciò si rende disponibile fra ciascuna fase ed il neutro una tensione di modulo E. In nessun caso ci sono particolari problemi di calcolo in quanto, trascurando le cadute di tensione sulla linea, è sempre nota a priori la tensione applicata a ciascuna impedenza.

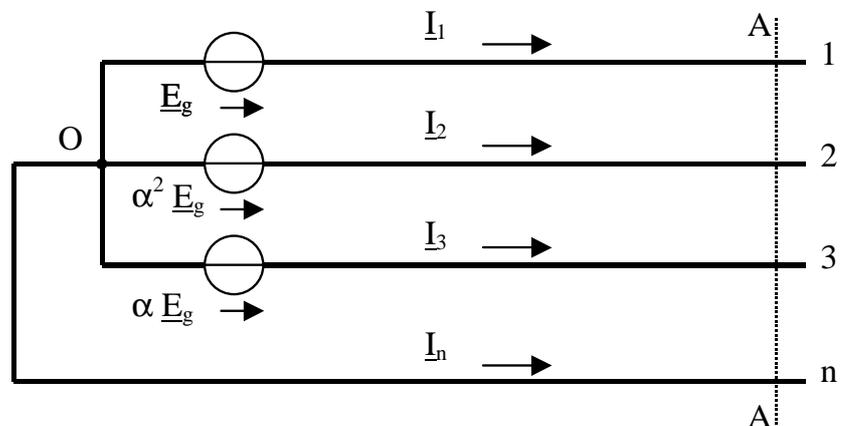


Figura 22. - Schema del generatore per sistemi trifase con neutro.

Il collegamento è adatto per carichi aventi una certa probabilità di squilibrio: in tal modo si assicurano tensioni con lo stesso valore efficace su tutte le impedenze di carico a stella, anche se sono diverse tra loro. Infatti, trascurando le cadute di tensione sul neutro, la tensione tra i centri stella è nulla e le correnti assorbite dalla linea sono calcolabili come $\underline{I}_k = \underline{E}_k / \underline{Z}_k$, $k = 1, 2, 3$. La corrente nel neutro sarà tanto maggiore quanto più è pronunciato lo squilibrio dei carichi, come risulta dalla seguente formula:

$$\underline{I}_n = -(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3) = -\left(\frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_3}\right) \quad (23)$$

RIFASAMENTO DI UN UTILIZZATORE TRIFASE

Si consideri un utilizzatore U di tipo induttivo che assorba dalla linea la potenza reattiva Q e la potenza attiva P e sia caratterizzato da un fattore di potenza $\cos \Phi$. Si supponga inoltre di conoscere le tensioni di linea e che il sistema sia simmetrico diretto.

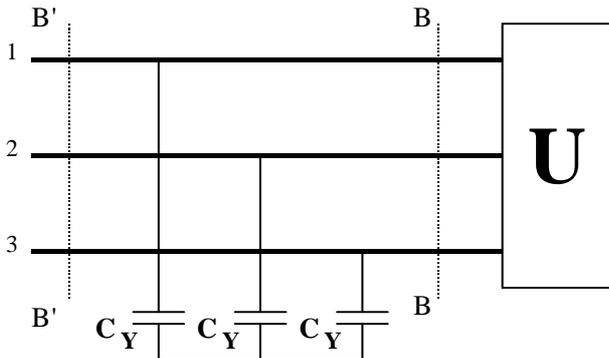


Figura 23. - Condensatori a stella

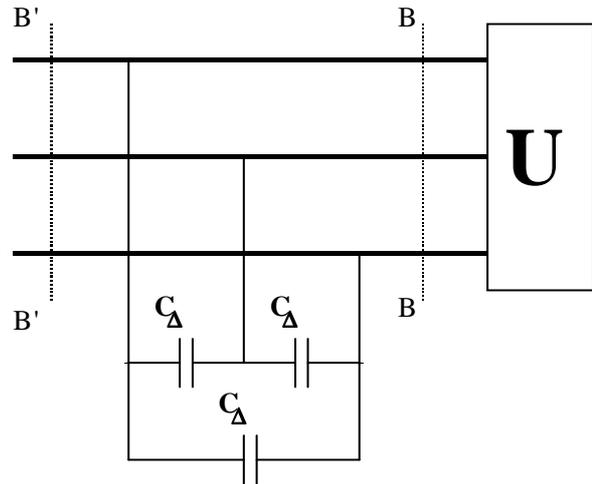


Figura 24. Condensatori a triangolo

È noto che $\tan \Phi = Q/P$. Vogliamo portare il fattore di potenza dell'impianto dal valore $\cos \Phi$ al valore $\cos \Phi'$. All'ingresso della linea mettiamo dunque un sistema idoneo ad assorbire una potenza reattiva di tipo capacitivo. Facendo riferimento alla figura 23, la potenza reattiva assorbita dalla linea a destra della sezione B'B' è data da:

$$Q_t = Q + Q_c = P \tan \Phi + Q_c$$

avendo indicato con Q_c la potenza reattiva assorbita dalle batteria di condensatori.

Si ha quindi: $\tan \Phi' = \frac{Q_t}{P} = \tan \Phi + \frac{Q_c}{P} \Rightarrow Q_c = P(\tan \Phi' - \tan \Phi)$ (24)

L'ultima relazione esprime la potenza reattiva che deve essere assorbita dalla batteria di condensatori per portare il fattore di potenza da $\cos \Phi$ a $\cos \Phi'$.

◆ Condensatori a stella

Se, come nel caso di figura 23, i condensatori sono disposti a stella, si ha:

$$Q_c = 3X_c I_c^2 = 3 \left(-\frac{1}{\omega C_Y} \right) \left(\frac{V/\sqrt{3}}{\left(\frac{1}{\omega C_Y} \right)} \right)^2 = -\omega C_Y V^2$$

da cui:

$$C_Y = \frac{P(\tan \Phi - \tan \Phi')}{\omega V^2} \quad (25)$$

Questa relazione esprime il valore comune delle capacità dei condensatori, disposti a stella, atti a rifasare l'impianto.

◆ Condensatori a triangolo

Supponiamo che i condensatori che costituiscono la batteria siano collegati a triangolo come mostrato in figura 24. In tal caso si ha:

$$Q_c = 3X_c I_c^2 = 3 \left(-\frac{1}{\omega C_\Delta} \right) \left(\frac{V}{\left(\frac{1}{\omega C_\Delta} \right)} \right)^2 = -3\omega C_\Delta V^2$$

da cui:

$$C_\Delta = \frac{P(\operatorname{tg}\Phi - \operatorname{tg}\Phi')}{3\omega V^2} \quad (26)$$

Questa relazione esprime il valore comune delle capacità dei condensatori, disposti a triangolo, atti a rifasare l'impianto. Quindi se i condensatori sono disposti a triangolo si richiede che essi abbiano capacità tre volte inferiori di quelle di un collegamento a stella. Tuttavia con un collegamento a triangolo ciascun condensatore è sottoposto alla tensione di linea V , mentre con un collegamento a stella ciascun condensatore è sottoposto alla tensione di fase $E = V/\sqrt{3}$.

I morsetti dei condensatori sono fra loro collegati a due a due mediante resistenze di valore molto elevato, le quali, quando i condensatori sono in esercizio, dissipano una potenza molto piccola, in relazione al loro valore elevato, ma consentono ai condensatori di scaricarsi non appena venga interrotto il collegamento con la linea.

TRASMISSIONE E DISTRIBUZIONE DELL'ENERGIA ELETTRICA

In generale il trasferimento di energia elettrica tra due punti, nei sistemi elettrici di potenza (escludendo quindi il campo delle telecomunicazioni), può avvenire nei seguenti tre modi:

- corrente continua;
- corrente alternata monofase a frequenza industriale (50 Hz per l'Europa, 60 Hz per gli USA);
- corrente alternata trifase a frequenza industriale.

Il confronto tra i pesi di materiale conduttore è uno dei criteri che determina la convenienza economica della linea. Infatti, il peso del conduttore incide sia sul costo proprio dei conduttori che su quello dei sostegni, della posa in opera della linea, etc. Il confronto tra i tre sistemi di trasmissione deve essere effettuato rispettando le seguenti ipotesi:

- parità della potenza trasmessa P [W];
- parità della tensione di trasmissione V [V];
- parità della lunghezza della linea L [m];
- parità della potenza dissipata sulla linea Δp [W];
- parità di conduttore (quindi stesso peso specifico γ e stessa resistività ρ).

- 1) **corrente continua:** Indicando con R_1 la resistenza di linea relativa ad un conduttore e con I la corrente di linea, la potenza persa nei due conduttori è data da:

$$\Delta p = 2 R_1 I^2$$

Sostituendo le espressioni $R_1 = \rho L/S$ e $I = P/V$ si ottiene: $\Delta p = \frac{2\rho L P^2}{S V^2} \Rightarrow S = \frac{2\rho L P^2}{\Delta p V^2}$

Essendo S e $2LS$ rispettivamente la sezione ed il volume dei conduttori di linea, il peso totale dei conduttori di linea è dato da:

$$G_{cc} = 2LS\gamma = \frac{4\gamma\rho L^2 P^2}{\Delta p V^2} = 4k \quad (31)$$

dove si è definito il fattore costante $k = \gamma\rho L^2 P^2 / (V^2 \Delta p)$.

- 2) **corrente alternata monofase:** rispetto al caso precedente cambia solo l'espressione della corrente che è $I = P/(V \cos\phi)$ e pertanto, nella formula del peso comparirà a denominatore il termine $\cos^2\phi$, ottenendo:

$$G_{cam} = 2LS\gamma = \frac{4\gamma\rho L^2 P^2}{\Delta p V^2 \cos^2 \phi} = \frac{4k}{\cos^2 \phi} \quad (32)$$

- 3) **corrente alternata trifase:** essendo tre i conduttori si ha

$$\Delta p = 3 R_1 I^2, \text{ dove } R_1 = \frac{\rho L}{S} \text{ e } I = \frac{P}{\sqrt{3} V \cos \phi}$$

Sostituendo si ottiene:

$$\Delta p = \frac{\rho L P^2}{S V^2 \cos^2 \phi} \Rightarrow S = \frac{\rho L P^2}{\Delta p V^2 \cos^2 \phi}$$

Il peso dei tre conduttori di linea è dato da:

$$G_{cat} = 3LS\gamma = \frac{3\gamma\rho L^2 P^2}{\Delta p V^2 \cos^2 \phi} = \frac{3k}{\cos^2 \phi} \quad (33)$$

Confrontando le espressioni (31), (32) e (33) e tenendo presente che $\cos^2\varphi \leq 1$, si possono trarre le seguenti conclusioni:

- i pesi in corrente alternata monofase e trifase dipendono dal fattore di potenza, tendendo all'infinito per $\cos\varphi$ tendente a zero e assumendo i valori minimi per $\cos\varphi = 1$, valori che sono rispettivamente: $(G_{cam})_{min} = 4k$, $(G_{cat})_{min} = 3k$;
- per qualsiasi valore di $\cos\varphi$, essendo $G_{cat} < G_{cam}$, il peso della linea in corrente alternata trifase è sempre minore di quello in corrente alternata monofase;
- per qualsiasi valore di $\cos\varphi$, essendo $G_{cc} < G_{cam}$, il peso dei conduttori in corrente continua è sempre inferiore a quello in corrente alternata monofase, salvo che per $\cos\varphi = 1$, caso in cui i due pesi sono uguali;
- risolvendo la disequazione $G_{cc} < G_{cat}$ si ottiene $\cos^2\varphi \leq 3/4$ e quindi, considerando solo il valore positivo, $\cos\varphi \leq \sqrt{3}/2 = 0.866$. Quanto sopra porta alla conclusione che, per valori di $\cos\varphi < 0.866$, il peso in corrente alternata trifase è maggiore di quello in corrente continua e viceversa; per di $\cos\varphi = 0.866$ i due pesi sono uguali.

In definitiva, per fattori di potenza maggiori di 0.866, il sistema di trasmissione più conveniente, per quanto concerne il peso dei conduttori, è quello in corrente alternata trifase, mentre per $\cos\varphi < 0.866$ diventa più conveniente quello in corrente continua. Risulta anche evidente, nei casi di impiego della corrente alternata, la convenienza di un elevato valore del $\cos\varphi$, essendo il peso dei conduttori proporzionale al suo quadrato. Le considerazioni fatte possono essere sintetizzate nel grafico di figura 25.

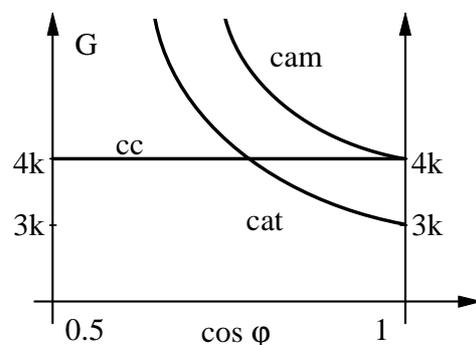


Figura 25.

Oltre al criterio precedente occorre considerare anche altri elementi di valutazione.

- La generazione di energia elettrica avviene quasi totalmente sotto forma di corrente alternata trifase, in quanto i relativi generatori (alternatori trifase) sono costruttivamente più semplici e robusti dei generatori in corrente continua; anche l'utilizzazione avviene prevalentemente in corrente alternata. Volendo effettuare la trasmissione in corrente continua occorre una stazione di conversione a monte ed una a valle della linea. Attualmente la conversione avviene mediante raddrizzatori statici.
- La trasmissione in corrente continua presenta il vantaggio, rispetto alle linee trifase, di un minore costo degli isolatori e dei sostegni, sia per il fatto di impiegare due conduttori (o anche uno se il ritorno è effettuato a terra) anziché tre, sia perché, a parità di valore efficace della tensione V , la linea a corrente alternata va costruita con un livello di isolamento proporzionato al valore massimo $V_M = \sqrt{2}V$, mentre quella a corrente continua deve essere isolata solo per la tensione V ; questi vantaggi risultano particolarmente importanti per le linee lunghe ad altissima tensione;
- In corrente continua c'è una minore caduta di tensione di linea perché manca la caduta di tensione dovuta alla reattanza induttiva. Altro vantaggio, particolarmente sensibile nelle linee in cavo, è l'assenza di effetti capacitivi.

Attualmente la trasmissione di energia elettrica a tensione 220kV - 380kV si effettua con linee aeree trifasi; la corrente continua è stata adottata, per esempio, per l'attraversamento di tratti di mare con cavo sottomarino (Toscana - Corsica - Sardegna a 200kV, Inghilterra - Francia, fiordi norvegesi, etc.).