TEORIA DEI CIRCUITI

DEFINIZIONI E LEGGI DI KIRCHHOFF

Un **circuito elettrico** è un tubo di flusso del vettore densità di corrente totale ($\mathbf{J}_t = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D}/\partial t$); tale vettore è solenoidale in tutto lo spazio (legge della circuitazione magnetica: $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_t$) e quindi è univocamente definita la corrente I del circuito, come il flusso del vettore $\mathbf{J}_t$ attraverso una qualsiasi sezione normale del circuito.

Un **circuito elettrico a costanti concentrate**, o rete elettrica, è un insieme di componenti elettrici ideali descritto dalle leggi di Kirchhoff. Nel seguito, per semplicità, con la parola circuito elettrico si intenderà circuito elettrico a costanti concentrate.

Un componente elettrico ideale (vedi figura 1) è caratterizzato da un numero di terminali, o morsetti. A ciascun terminale è associata una corrente che è univocamente definita, in valore e segno, una volta che sia stato arbitrariamente scelto il suo verso positivo (indicato dalla freccia): una corrente $i_1 = 2$ A significa che una corrente di intensità pari a 2 Ampére entra nel componente A attraverso il terminale 1, viceversa, una corrente $i_1 = -2$ A significa che una corrente di intensità pari a 2 Ampére esce dal componente A attraverso il terminale 1.

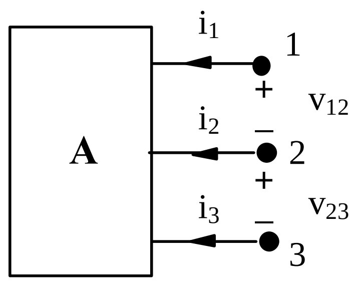


Figura 1. - Componente a tre terminali

Ad ogni coppia di terminali è associata una tensione che è univocamente definita, in valore e segno, una volta che sia stato arbitrariamente scelto il terminale di riferimento (indicato col segno -): una tensione $v_{12} = 2$ V significa che il terminale 1 si trova ad un potenziale superiore di 2 Volt rispetto a quello del terminale 2, viceversa una tensione $v_{12} = -2$ V significa che il terminale 1 si trova ad un potenziale inferiore di 2 Volt rispetto a quello del terminale 2.

Un componente con due terminali viene chiamato bipolo. Nel seguito, per semplicità, si supporrà che i circuiti in esame siano costituiti di soli bipoli; se ciò non fosse vero, si può pensare di ricondursi alla ipotesi, sostituendo i componenti con più di due terminali con opportuni circuiti equivalenti costituiti da soli bipoli: ciò è sicuramente possibile mediante l'introduzione dei generatori controllati (o pilotati) che verranno definiti nel seguito.

I terminali dei componenti sono collegati tramite **connessioni ideali**, caratterizzate dall'avere una tensione nulla ai loro capi (vedi figura 2).

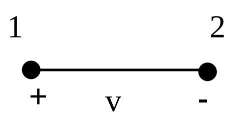


Figura. 2 - Connessione ideale (v =0)

Un nodo di un circuito elettrico è un punto a cui sono collegati due o più terminali, oppure è un terminale isolato. Il circuito della figura 3 è costituito da cinque bipoli; collegati a quattro nodi (A, B, C, D). Una sequenza chiusa di nodi è una successione di nodi tale che il primo nodo coincide con l'ultimo. (Ad esempio, sono sequenze chiuse AA, ABA, ABCA, ABCDA, etc.)

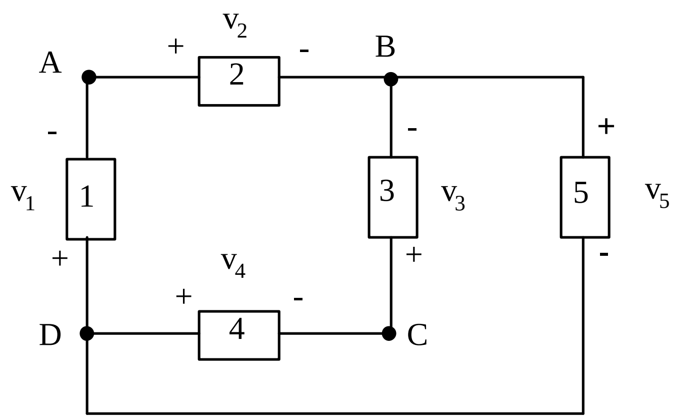


Figura 3. - Circuito con cinque elementi e quattro nodi.

La **LEGGE DI KIRCHHOFF DELLE TENSIONI (LKT)** afferma che per una qualsiasi sequenza chiusa di nodi la somma algebrica delle tensioni (tra due nodi successivi) è nulla.

Con riferimento al circuito della figura 3, applicando la LKT alla sequenza chiusa di nodi ABCA si ottiene la seguente equazione:

$$v_{AB} + v_{BC} + v_{CA} = 0 \qquad (1)$$

Le tensioni di nodo di un circuito sono le tensioni dei nodi del circuito rispetto ad un nodo di riferimento, la cui scelta è arbitraria. La LKT permette di scrivere la tensione tra una qualsiasi coppia di nodi del circuito in funzione delle tensioni di nodo: con riferimento alla figura 3, supponendo di scegliere il nodo A come nodo di riferimento, ed indicando con e_B ed e_C le tensioni di nodo dei nodi B e C ($e_B = v_{BA}$; $e_C = v_{CA}$) la equazione (1) permette di scrivere:

$$v_{BC} = e_B - e_C \qquad (2)$$

La sequenza chiusa di nodi ABCDA individua un percorso chiuso attraverso i componenti del circuito: i tratti di tale percorso all'interno di ciascun componente vengono detti rami ed il percorso, maglia. Applicando la LKT alla maglia ABCDA, tenendo conto dei versi positivi scelti per le tensioni ai capi dei componenti (tensioni di ramo) si ottiene la seguente relazione:

$$v_2 - v_3 - v_4 + v_1 = 0 \qquad (3)$$

La LKT applicata ad una maglia del circuito afferma che la somma algebrica delle tensioni di ramo è nulla.

La **LEGGE DI KIRCHHOFF DELLE CORRENTI (LKC)** afferma che per ogni superficie chiusa che interseca unicamente le connessioni tra i componenti, e non i componenti stessi, la somma algebrica delle correnti che attraversano la superficie è nulla.

Si consideri in primo luogo una superficie chiusa S che racchiuda al suo interno solo un bipolo (vedi figura 4.a). La corrente i_1 entra nella superficie S, mentre la corrente i_2 esce da tale superficie. La LKC afferma quindi che deve essere:

$$i_2 = i_1$$

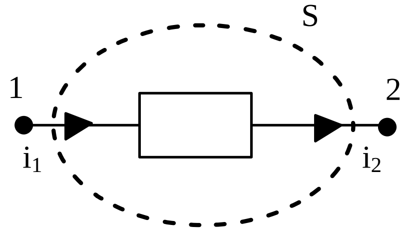


Figura 4.a. - Legge di Kirchhoff delle correnti applicata ad un bipolo.

Tenendo conto di ciò, con riferimento alla figura 4.b si consideri la superficie chiusa la cui rappresentazione nel piano del disegno è la linea tratteggiata S_1.

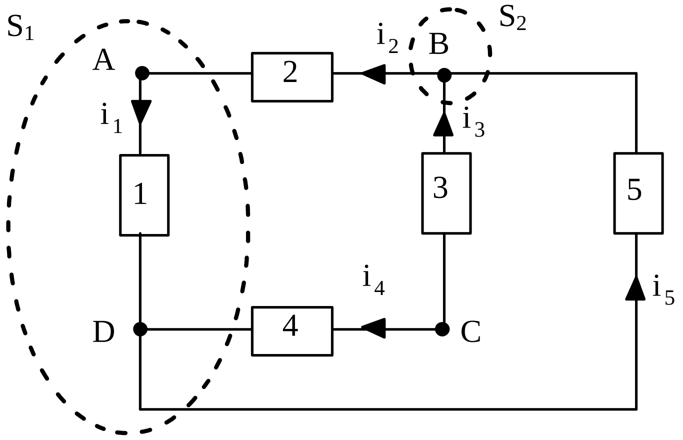


Figura 4.b. - Legge di Kirchhoff delle correnti.

Le correnti che attraversano tale superficie sono la corrente i_2 e la corrente i_4 che entrano nella superficie e la corrente i_5 che esce, per cui la LKC applicata a tale superficie permette di scrivere la seguente equazione:

$$i_2 + i_4 - i_5 = 0 \tag{4}$$

Si consideri la superficie chiusa la cui rappresentazione nel piano del disegno è la linea tratteggiata S_2 : tale superficie racchiude al suo interno solo il nodo B e la LKC ad essa associata afferma che la somma algebrica delle correnti dei rami che convergono nel nodo B è nulla:

$$-i_2 + i_3 + i_5 = 0 \tag{5}$$

Applicando la LKC a tutti i quattro nodi del circuito di figura 4.b, ottiene quindi il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{array}{cccccc}
+i_1 & -i_2 & & & & =0 \\
 & +i_2 & -i_3 & & -i_5 & =0 \\
 & & +i_3 & +i_4 & & =0 \\
-i_1 & & & -i_4 & +i_5 & =0 \\
\hline
+0 & +0 & +0 & +0 & +0 & =0
\end{array}$$

Come è immediato verificare, la somma delle equazioni porta ad una identità (0 = 0). Tale risultato generale è dovuto la fatto che ogni corrente di ramo i_k compare esattamente due volte, con segni opposti, nelle LKC relative ai nodi che sono i terminali del ramo k. Una delle equazioni è dunque una combinazione lineare delle altre N – 1 = 3, e si può omettere. Le rimanenti N – 1 = 3 equazioni sono chiaramente indipendenti in quanto, qualunque sia l’equazione omessa (ad esempio la quarta, nodo D), tutte le correnti di ramo presenti nell’equazione eliminata compaiono *una sola volta* nelle restanti equazioni (ad esempio i_1, i_4 ed i_5). Le equazioni LKC indipendenti sono quindi N – 1.

Le due leggi di Kirchhoff, delle tensioni e delle correnti, permettono di scrivere delle equazioni lineari tra le tensioni e le correnti che non dipendono dalla natura dei componenti pre-

senti nel circuito, ma unicamente da come essi sono collegati tra di loro (topologia del circuito).

Sia dato un circuito caratterizzato da R rami ed N nodi. Per ciascun ramo si assumano versi positivi per la tensione di ramo e la corrente di ramo associati: i versi della tensione e della corrente si dicono associati quando la corrente entra nel terminale positivo (vedi figura 5).

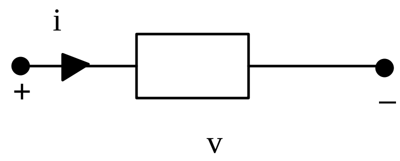


Figura 5. - Versi di riferimento associati per la tensione e la corrente di ramo.

Preso arbitrariamente un nodo come nodo di riferimento del circuito, la LKT permette di scrivere R relazioni del tipo (2) linearmente indipendenti che in forma matriciale assumono la forma:

$$\mathbf{v} = \mathbf{M}\,\mathbf{e} \tag{6}$$

dove **v** è il vettore delle tensioni di ramo, **e** è il vettore delle tensioni di nodo ed **M** è una matrice avente R righe ed (N – 1) colonne, il cui generico elemento M_{hk} risulta nullo se il ramo h non è collegato al nodo k, uguale a + 1 se la corrente del ramo h esce dal nodo k, – 1 se la corrente del ramo h entra nel nodo k. A titolo di esempio si consideri ancora il circuito di figura 4.b, utilizzando *versi di riferimento associati per le tensioni e le correnti di ramo* e prendendo D come nodo di riferimento ($e_D = 0$). Si ha quindi:

$$\begin{cases} v_1 = e_A \\ v_2 = e_B - e_A \\ v_3 = e_C - e_B \\ v_4 = e_C \\ v_5 = -e_B \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_A \\ e_B \\ e_C \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

La LKC applicata a tutti i nodi tranne quello di riferimento permette di scrivere (N – 1) equazioni del tipo (5) che in forma matriciale assumono la forma:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{i} = \mathbf{0} \tag{7}$$

dove **i** è il vettore delle correnti di ramo ed **A** è una matrice, chiamata matrice di incidenza ridotta, avente (N – 1) righe ed R colonne, il cui generico elemento A_{hk} risulta nullo se il ramo k non è collegato al nodo h, uguale a +1 se la corrente del ramo k esce dal nodo h, -1 se la corrente del ramo k entra nel nodo h. A titolo di esempio si consideri ancora il circuito di figura 4.b. Si ha quindi:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 = 0 \\ i_2 - i_3 - i_5 = 0 \\ i_3 + i_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & 0 \end{bmatrix}$$

Risulta quindi dalle definizioni che **M** è la trasposta di **A**, cioè:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^T \tag{8}$$

Dalle equazioni (6), (7) ed (8) segue il **Teorema di Tellegen** che afferma che: *Per un dato circuito, preso un qualsiasi vettore di tensioni di ramo* $\mathbf{v}_1$*, che soddisfi la LKT per quel circuito, ed un vettore di correnti di ramo* $\mathbf{i}_2$*, che soddisfi la LKC per quel circuito, allora vale la seguente relazione:*

$$\mathbf{v}_1^T \, \mathbf{i}_2 = 0 \tag{9}$$

La dimostrazione è immediata. Risulta infatti:

$$\mathbf{v}_1^T \, \mathbf{i}_2 = (\mathbf{M} \, \mathbf{e}_1)^T \, \mathbf{i}_2 = \mathbf{e}_1^T \, \mathbf{M}^T \, \mathbf{i}_2 = \mathbf{e}_1^T \, \mathbf{A} \, \mathbf{i}_2 = \mathbf{e}_1^T \, (\mathbf{A} \, \mathbf{i}_2) = 0$$

La (9) esprime la *conservazione delle potenze virtuali*. Infatti, l'insieme delle $\mathbf{v}_1$ e l'insieme delle $\mathbf{i}_2$ possono essere, come si è detto, indipendenti fra di loro, purché ciascuno soddisfi separatamente al relativo principio di Kirchhoff per la rete data. In particolare, se l'insieme delle $\mathbf{v}_1$ è quello corrispondente alla circolazione dell'insieme delle $\mathbf{i}_2$, la (9) esprime il **Principio di conservazione dell'energia elettrica**. I termini positivi corrispondono a potenze assorbite, i termini negativi a potenze erogate.

Facendo riferimento a versi associati di tensione e corrente (figura 5), si definisce potenza elettrica assorbita da un bipolo in un generico istante t, il prodotto tra la tensione presente ai suoi terminali all'istante t e la corrente che lo attraversa in quell'istante:

$$p(t) = v(t)\, i(t) \tag{10}$$

Più in generale, facendo riferimento ad un generico componente con N terminali, la potenza elettrica assorbita da tale componente in un generico istante t è data dalla seguente espressione:

$$p(t) = \sum_{k=1}^{N} v_{kN}(t)\, i_k(t) \tag{10.a}$$

dove si è preso l'ennesimo terminale come terminale di riferimento per le tensioni ed i versi positivi delle correnti sono tutti entranti nell'elemento. Si dimostra che la potenza elettrica assorbita non dipende dalla scelta del terminale di riferimento, infatti, facendo uso delle leggi di Kirchhoff delle tensioni prima e della legge di Kirchhoff delle correnti poi, si ottiene:

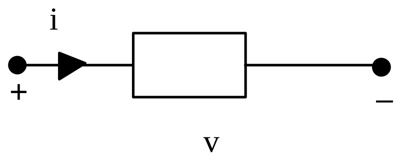
$$p' = \sum_{k=1}^{N} v_{kj}\, i_k = \sum_{k=1}^{N} \left(v_{kN} - v_{jN}\right) i_k = \sum_{k=1}^{N} v_{kN}\, i_k - v_{jN} \sum_{k=1}^{N} i_k = p \tag{10.b}$$

Se si applica il teorema di Tellegen (9) considerando il vettore delle tensioni ed il vettore delle correnti che effettivamente sono presenti nel circuito ad un generico istante t, si ottiene la relazione (11) che, sulla base della definizione (10), mostra come la potenza elettrica assorbita da tutti i componenti del circuito risulti in ogni istante nulla.

$$\mathbf{v}(t)^T \mathbf{i}(t) = v_1(t)\, i_1(t) + v_2(t)\, i_2(t) + \ldots = p_1(t) + p_2(t) + \ldots = 0 \tag{11}$$

Componenti

Nel seguito vengono descritte e discusse le equazioni costitutive e le proprietà fondamentali di alcuni tra i componenti di impiego più diffuso in elettrotecnica. In generale i componenti sono caratterizzati da una relazione (caratteristica o equazione costitutiva) tra la corrente che li attraversa e la tensione tra i loro terminali. **Un componente in cui sia determinabile la tensione nota la corrente si dice** ***controllato in corrente*** (cioè, è possibile alimentarlo con un generatore di corrente con corrente impressa qualsiasi e ad ogni valore della corrente impressa corrisponde un solo valore della tensione ai terminali); analogamente, **un componente in cui sia determinabile la corrente nota la tensione si dice *controllato in tensione*** (cioè, è possibile alimentarlo con un generatore di tensione con tensione impressa qualsiasi e ad ogni valore della tensione impressa corrisponde un solo valore della corrente assorbita). Infine, si premette che **due componenti si dicono <u>equivalenti</u> quando presentano la stessa caratteristica tensione-corrente** (anche se hanno una struttura interna differente).



Caratteristica del componente: $f(\mathrm{i}, \mathrm{v}) = 0$

Se il componente è *controllato in corrente*: $\mathrm{v} = h(\mathrm{i})$

Se il componente è *controllato in tensione*: $\mathrm{i} = g(\mathrm{v})$

Un componente si dice <u>lineare</u>, se la sua caratteristica soddisfa la relazione

$$f(\alpha\, \mathrm{i}_a + \beta\, \mathrm{i}_b, \alpha\, \mathrm{v}_a + \beta\, \mathrm{v}_b) = \alpha f(\mathrm{i}_a, \mathrm{v}_a) + \beta f(\mathrm{i}_b, \mathrm{v}_b) \quad \text{, per ogni } \alpha \text{ e } \beta \text{ reale}$$

in particolare,

Se il componente è *controllato in corrente*: $h(\alpha\, \mathrm{i}_a + \beta\, \mathrm{i}_b) = \alpha\, h(\mathrm{i}_a) + \beta\, h(\mathrm{i}_b)$

Se il componente è *controllato in tensione*: $g(\alpha\, \mathrm{v}_a + \beta\, \mathrm{v}_b) = \alpha\, g(\mathrm{v}_a) + \beta\, g(\mathrm{v}_b)$

Resistore lineare

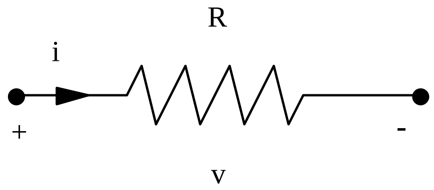


Figura 6. - Resistore lineare

Il simbolo del resistore lineare è indicato nella figura 6. Con riferimento a versi associati di tensione e corrente, la legge costitutiva del resistore (Legge di Ohm) è la seguente:

$$\mathrm{v} = \mathrm{R}\ \mathrm{i} \qquad (12.a)$$

o, alternativamente

$$\mathrm{i} = \mathrm{G}\ \mathrm{v} \qquad (12.b)$$

duttanza (misurata in S [Siemens]) e risulta G = 1/R. L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (13) e risulta:

$$\mathrm{p} = \mathrm{v}\ \mathrm{i} = (\mathrm{R}\ \mathrm{i})\ \mathrm{i} = \mathrm{R}\ \mathrm{i}^2 = \mathrm{i}^2/\mathrm{G} \qquad (13.a)$$

o, alternativamente

$$\mathrm{p} = \mathrm{v}\ \mathrm{i} = \mathrm{v}\ (\mathrm{v}/\mathrm{R}) = \mathrm{v}^2/\mathrm{R} = \mathrm{G}\ \mathrm{v}^2 \qquad (13.b)$$

Se la resistenza R è positiva, la potenza elettrica assorbita risulta essere sempre positiva, o al più nulla quando la corrente è nulla; i componenti che godono di tale proprietà vengono detti **componenti passivi**. Dalla fisica, si può dimostrare che un filo di rame di lunghezza L e sezione S può essere modellato per mezzo di un resistore di resistenza R pari a $\rho L/S$, in cui la potenza elettrica assorbita viene trasformata in energia termica mediante un fenomeno noto come “effetto Joule”.

Dalla (12.a) segue che se è nota la corrente che circola sul resistore è nota anche la tensione ai suoi capi; quindi il resistore è un componente controllato in corrente. Inoltre, <u>se R è diversa da zero</u>, quando è nota la tensione è anche nota la corrente, pari a v/R; quindi il resistore è anche un componente controllato in tensione. Pertanto, il resistore non nullo risulta un componente controllato sia in tensione che in corrente. Inoltre il resistore è un componente lineare. Si ha infatti:

$$(\alpha\, \mathrm{v}_a + \beta\, \mathrm{v}_b) - \mathrm{R}\,(\alpha\, \mathrm{i}_a + \beta\, \mathrm{i}_b) = \alpha\,(\mathrm{v}_a - \mathrm{R}\, \mathrm{i}_a) + \beta\,(\mathrm{v}_b - \mathrm{R}\, \mathrm{i}_b) \quad \text{, per ogni } \alpha \text{ e } \beta \text{ reale}$$

La connessione ideale, illustrata nella figura 2 ed anche chiamata **corto circuito**, può essere considerata un resistore lineare di resistenza nulla (o conduttanza infinita), e come tale risulta essere un componente controllato in corrente, ma non in tensione; infatti ad un unico valore di tensione corrispondono infiniti valori possibili della corrente.

Viceversa, un **circuito aperto**, il cui simbolo è rappresentato nella figura 7, può essere considerato come un resistore di resistenza infinita (o conduttanza zero) e come tale è un componente controllato in tensione, ma non in corrente: infatti all'unico valore possibile della corrente (zero) corrisponde una infinità di valori possibili della tensione ai capi del circuito aperto.

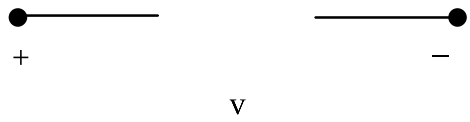
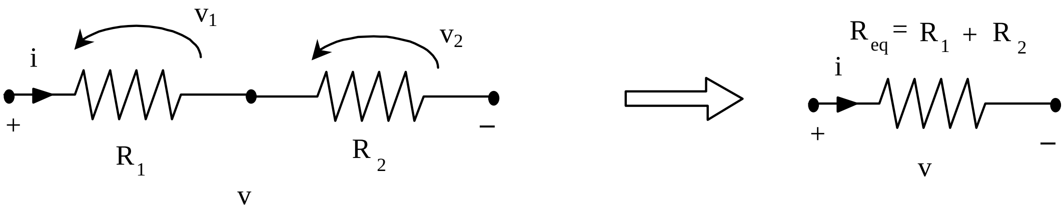


Figura 7. - Circuito aperto

Due resistori si dicono collegati in <u>serie</u> quando sono percorsi dalla stessa corrente (figura 8); dalle equazioni costitutive dei due resistori si vede che essi sono equivalenti ad un unico resistore avente una resistenza equivalente data dalla somma delle due resistenze. La relazione ottenuta è generalizzabile ad un numero qualsiasi di resistori in serie (per definizione tutti percorsi dalla stessa corrente): $R_{eq} = \Sigma_k R_k$.

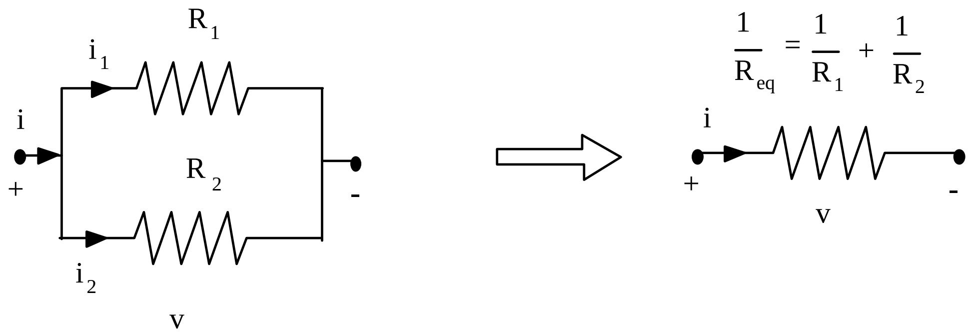


$v = v_1 + v_2 = R_1\, i + R_2\, i = (R_1 + R_2)\, i$

$v = R_{eq}\, i$

Figura 8. - Resistori collegati in serie.

Due resistori si dicono collegati in <u>parallelo</u> quando la tensione ai loro capi è la stessa (vedi figura 9); dalle equazioni costitutive dei due resistori si vede che essi sono equivalenti ad un unico resistore avente una resistenza equivalente il cui inverso è dato dalla somma degli inversi delle due resistenze (ovvero, ricordando la definizione di conduttanza, due resistori in parallelo sono equivalenti ad un unico resistore avente una conduttanza equivalente pari alla somma delle due conduttanze: $G_{eq} = G_1 + G_2$.). La relazione ottenuta è generalizzabile ad un numero qualsiasi di resistori in parallelo (per definizione tutti soggetti alla stessa tensione): $G_{eq} = \Sigma_k G_k$.



$$i = i_1 + i_2 = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v$$

$$i = \frac{v}{R_{eq}}$$

Figura 9. - Resistori collegati in parallelo.

Diodo ideale

Il simbolo del diodo ideale è indicato in figura 10. La legge costitutiva del diodo ideale è rappresentata, nel piano tensione - corrente, dal semiasse negativo delle tensioni e dal semiasse positivo delle correnti (vedi figura 11).

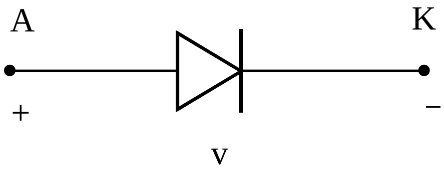


Figura 10. - Diodo ideale.

Se la tensione anodo (A) - catodo (K) è negativa, si dice che il diodo è polarizzato inversamente, in questo caso il passaggio della corrente è interdetto; viceversa, se il diodo è percorso da corrente (diodo in conduzione) la tensione ai suoi capi è nulla

Come si può vedere dalla caratteristica del diodo ideale (vedi figura 11), il diodo non è controllato né in corrente, perché quando la corrente è nulla la tensione può assumere una infinità di valori (tutti quelli negativi), né in tensione, perché quando la tensione è nulla la corrente può assumere una infinità di valori, tutti quelli positivi. A seconda quindi che il diodo ideale sia polarizzato in diretta od in inversa, può essere considerato rispettivamente un corto circuito od un circuito aperto; in ogni caso la potenza elettrica assorbita dal diodo è nulla. Si noti infine che il diodo ideale, anche se non lineare, può essere considerato *lineare a tratti*.

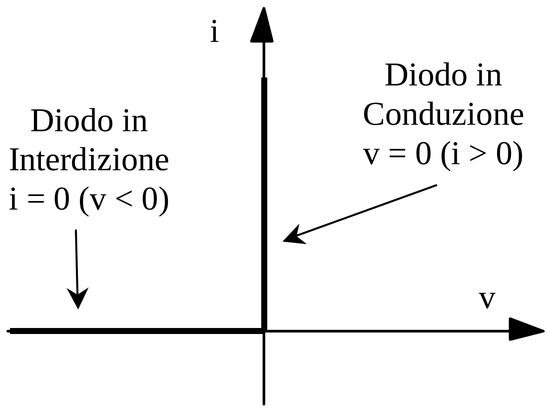


Figura 11. - Caratteristica del diodo ideale.

La caratteristica tensione - corrente di una giunzione p-n (diodo reale) è rappresentata nella figura 12. Quando il diodo reale è in conduzione, è presente ai suoi capi una tensione positiva (V_d) ed il diodo assorbe potenza elettrica dalla rete a cui è collegato. Quando il diodo è polarizzato in inversa, fintanto che la tensione è inferiore, in valore assoluto, ad un valore limite (tensione di rottura o breakdown V_b) circola una piccola corrente inversa (dal catodo all'anodo) (I_0). Il valore della corrente inversa cresce sensibilmente quando la tensione cresce, in valore assoluto, oltre la tensione di rottura. Il diodo reale può essere considerato come un resistore non lineare, la cui resistenza è una funzione della corrente.

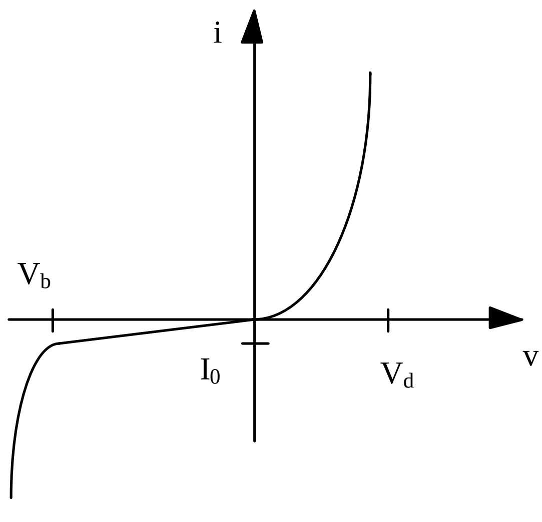


Figura 12. - Caratteristica del diodo reale

Induttore lineare

Il simbolo dell'induttore lineare è indicato nella figura 13, la sua legge costitutiva è la seguente:

$$v = L \frac{di}{dt} \qquad (14)$$

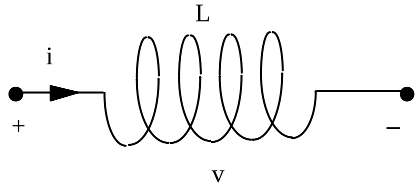


Figura 13. - Induttore

dove L è una costante chiamata induttanza dell'induttore (misurata in Henry [H]). È immediato verificare che la caratteristica, e quindi il componente, è lineare.L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (10) e risulta:

$$p = vi = L\frac{di}{dt}i = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) \tag{15}$$

La (15) mostra come tutta la energia elettrica assorbita dall'induttore vada ad incrementare il termine $E_m = ½\ L\ i^2$ che assume quindi il significato di energia elettromagnetica immagazzinata nell'induttore; tale energia, una volta immagazzinata, può essere interamente restituita ai componenti del circuito cui è collegato l'induttore durante un transitorio successivo. La potenza elettrica assorbita dall'induttore può quindi assumere valori sia positivi che negativi.

Un avvolgimento costituito da N spire finemente avvolte sopra un nucleo di materiale ferromagnetico dolce, qualora l'intensità della corrente che lo percorre non sia troppo elevata, in modo da poter trascurare la saturazione del materiale ferromagnetico, può essere modellato come un resistore ed un induttore collegati in serie (vedi figura 14).

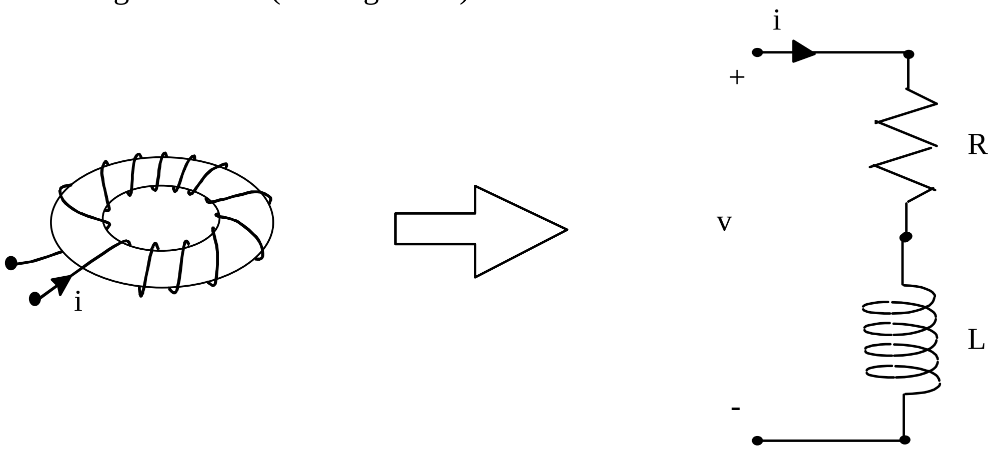


Figura 14. - Induttore reale.

Il campo magnetico prodotto dalla corrente i, a causa dell'elevato valore della permeabilità magnetica (μ) del materiale di cui è costituito il nucleo dell'avvolgimento, tende a concentrarsi in tale regione. Trascurando i flussi dispersi, il valore della induttanza dell'induttore è definito dalla relazione:

$$E_m = \frac{1}{2}Li^2 = \int_{V_{ferro}} \frac{B^2}{2\mu}dV \tag{16}$$

La potenza elettrica assorbita dall'induttore reale viene in parte trasformata in energia interna per effetto Joule (e quindi ceduta all'ambiente sotto forma di calore, se la temperatura del sistema viene mantenuta costante) ed in parte immagazzinata nel campo magnetico presente all'interno del nucleo toroidale. Per sottolineare il fatto che alla energia elettromagnetica E_m è associato un campo magnetico, tale energia viene più specificatamente chiamata energia magnetica immagazzinata nell'induttore.

L'equazione costitutiva dell'induttore (14) permette in ogni istante, se è noto il valore della tensione ai suoi capi, di calcolare la derivata temporale della corrente che lo attraversa lasciandone però completamente indeterminato il valore. Il valore della corrente individua univocamente l'energia magnetica immagazzinata nell'induttore e dipende dal transitorio subìto dall'induttore nel periodo precedente all'istante di tempo che si considera. Infatti, integrando nel tempo la (14), supponendo che all'istante $-\infty$, quando è stato assemblato il circuito ed è iniziato il transitorio, la corrente sull'induttore fosse nulla, si ottiene:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\, d\tau \qquad (17)$$

La (17) mostra che il valore della corrente all'istante t dipende dal valore della tensione in tutti gli istanti precedenti. Per indicare ciò si dice che l'induttore ha memoria. Il valore della corrente che attraversa l'induttore individua univocamente l'energia magnetica immagazzinata al suo interno e perciò costituisce la sua variabile di stato.

Condensatore lineare

Il simbolo del condensatore è indicato nella figura 15, la sua legge costitutiva è la seguente:

$$i = C\frac{dv}{dt} \qquad (18)$$

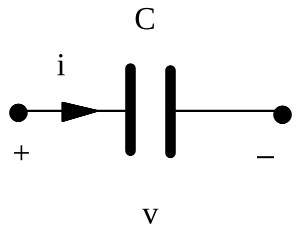


Figura 15. - Condensatore

dove C è una costante chiamata capacità del condensatore (misurata in Farad [F]). È immediato verificare che la caratteristica, e quindi il componente, è lineare. L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (10) e risulta:

$$p = vi = vC\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cv^2\right) \qquad (19)$$

La (19) mostra come tutta la energia elettrica assorbita dall'induttore vada ad incrementare il termine E_e = ½ C v^2 che assume quindi il significato di energia elettromagnetica immagazzinata nel condensatore; tale energia, una volta immagazzinata, può essere interamente restituita ai componenti del circuito cui è collegato il condensatore durante un transitorio successivo. La potenza elettrica assorbita dall'induttore può quindi assumere valori sia positivi che negativi.

Un cilindro ed una corona cilindrica coassiali, costituiti di materiale conduttore, separate da una corona cilindrica, coassiale con le precedenti, costituita di materiale isolante, formano un condensatore cilindrico che può essere modellato con un condensatore ideale (vedi figura 16).

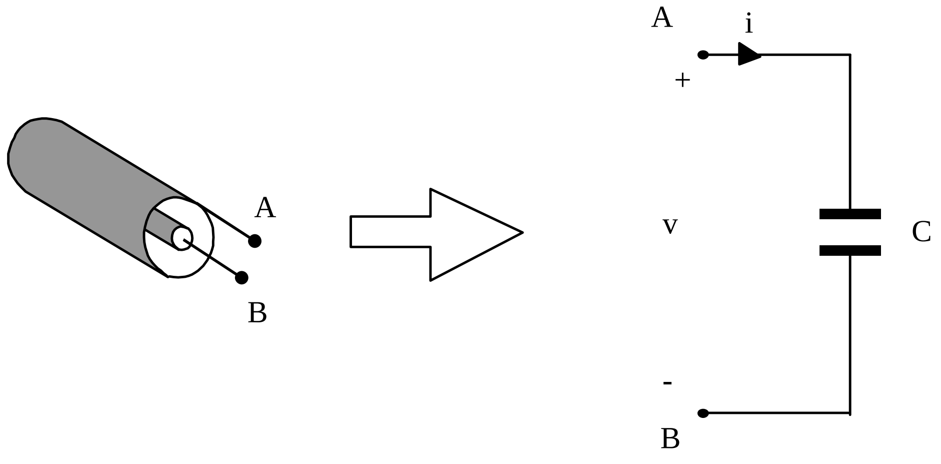


Figura 16. - Condensatore cilindrico

Quando una carica q viene spostata tramite una connessione elettrica dalla armatura esterna (collegata al terminale A) a quella interna (collegata al terminale B), la regione di spazio occupata dall'isolante interposto tra le armature del condensatore è sede di un campo elettrico. Trascurando il campo elettrico all'esterno di tale regione, il valore della capacità del condensatore è definito dalla relazione:

$$E_e = \frac{1}{2} C\, v^2 = \int_{V_{isolante}} \frac{1}{2} \varepsilon\, E^2\, dV \qquad (20)$$

dove ε è la costante dielettrica dell'isolante. La potenza elettrica assorbita dal condensatore cilindrico viene immagazzinata nel campo elettrico presente nell'isolante tra le armature del condensatore. Per sottolineare il fatto che all'energia elettromagnetica E_e è associato un campo elettrico, tale energia viene più specificatamente chiamata energia elettrica immagazzinata nel condensatore.

Le relazioni (18), (19) e (20) mostrano come esista una relazione di dualità tra il condensatore e l'induttore; infatti è possibile ottenere le relazioni caratteristiche di un componente da quelle dell'altro, scambiando tra di loro i simboli della tensione con la corrente, dell'induttanza con la capacità, del campo magnetico con il campo elettrico e della permeabilità magnetica con la costante dielettrica.

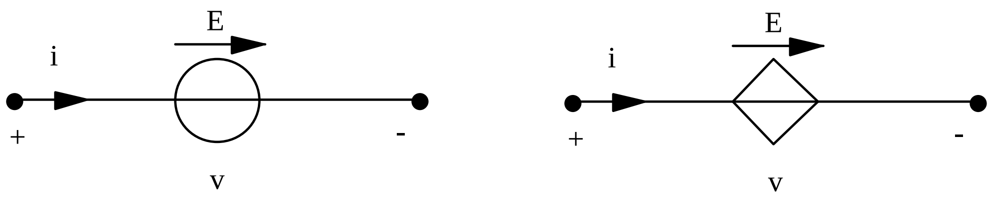
Analogamente all'induttore, anche il condensatore è un componente con memoria; integrando la (18) dall'istante -∞, in cui è stato assemblato il circuito ed in cui la tensione ai capi del condensatore si è supposta nulla, al generico istante t si ottiene:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau \qquad (21)$$

La (21) mostra che il valore della tensione in un generico istante t dipende dal valore della corrente in tutti gli istanti precedenti. Il valore della tensione ai capi del condensatore individua univocamente l'energia elettrica immagazzinata al suo interno e perciò rappresenta la sua variabile di stato.

Generatore di tensione

Il simbolo del generatore indipendente di tensione è indicato nella figura 17a, quello del generatore dipendente di tensione nella figura 17b; nel primo caso la tensione impressa E del generatore (o forza elettro-motrice del generatore) è una funzione nota del tempo, nel secondo caso dipende dal valore della tensione (generatore di tensione pilotato in tensione: GTPT) o della corrente (generatore di tensione pilotato in corrente: GTPC) di un altro ramo del circuito.



(a) (b)

Figura 17. - Generatori di tensione

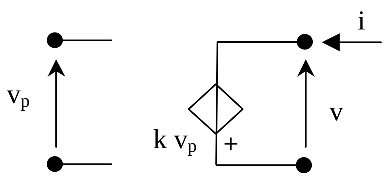
Con riferimento ai versi positivi delle grandezze indicati nella figura 18a, l'equazione costitutiva del generatore di tensione indipendente è la seguente:

$$v = -E \qquad (22)$$

È immediato verificare che la caratteristica del generatore <u>indipendente</u> di tensione, e quindi il componente, <u>non</u> è lineare. Si ha infatti:

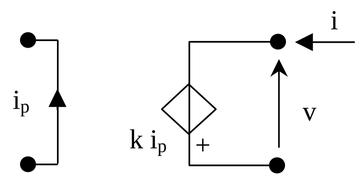
$$(\alpha\, v_a + \beta\, v_b + E) \neq \alpha\,(v_a + E) + \beta\,(v_b + E) \quad \text{, per ogni } \alpha \text{ e } \beta \text{ reale}$$

Per quanto riguarda i generatori pilotati, è necessario estendere la definizione di linearità anche alla variabile pilota. In tal caso, è immediato verificare la linearità dei due componenti GTPT e GTPC illustrati in figura.



GTPT

Caratteristica: $v = -\,k\, v_p$



GTPC

Caratteristica: $v = -\,k\, i_p$

L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (10) e risulta:

$$p = -E\, i \qquad (23)$$

La potenza elettrica assorbita risulta quindi positiva o negativa a seconda che la corrente attraversa il generatore nel verso opposto o concorde rispetto a quello della tensione impressa. Il generatore indipendente di tensione è quindi in grado di assorbire od erogare una potenza elettrica di valore qualsiasi, mantenendo comunque inalterato il valore della tensione ai suoi capi. Il generatore indipendente di tensione è un componente controllato in corrente. Il generatore dipendente di tensione non è un componente controllato né in tensione né in corrente.

Una batteria può essere modellata elettricamente mediante lo schema illustrato nella figura 18a, costituito da un resistore e da un generatore indipendente di tensione collegati in serie.

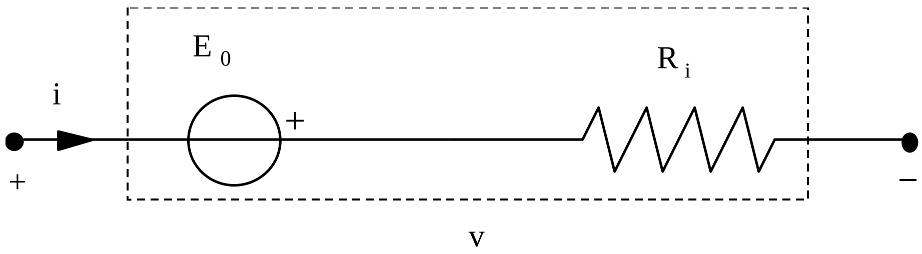


Figura 18a Modello circuitale di una batteria

Il generatore di tensione permette di simulare la trasformazione di energia chimica in elettrica e viceversa che avviene all'interno della batteria; la tensione impressa E_0 è pari alla tensione ai capi della batteria durante il funzionamento a vuoto (quando non eroga corrente). La resistenza R_i del resistore, viene detta resistenza interna della batteria e permette di simulare la dissipazione di energia elettrica, per effetto Joule, in calore che viene ceduto all'ambiente circostante, che accompagna il passaggio della corrente nella batteria. A questa dissipazione è associata una caduta di tensione. La caratteristica tensione-corrente del bipolo di figura 18a è illustrata in figura 18b. Il generatore di tensione reale (la batteria) è un componente controllato sia in tensione che in corrente.

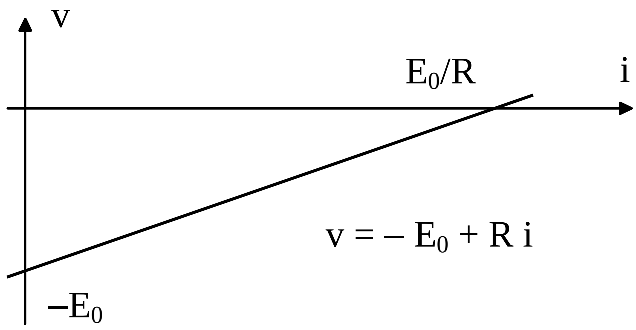


Figura 18b Caratteristica tensione-corrente di un generatore di tensione reale (batteria).

Generatore di corrente

Il simbolo del generatore indipendente di corrente è indicato nella figura 20a, quello del generatore dipendente di corrente nella figura 20b; nel primo caso la corrente impressa del generatore (I) è una funzione nota del tempo, mentre nel secondo dipende da un'altra grandezza che può essere la corrente (generatore di corrente pilotato in corrente: GCPC) o la tensione (generatore di corrente pilotato in tensione: GCPT) di un altro componente del circuito.

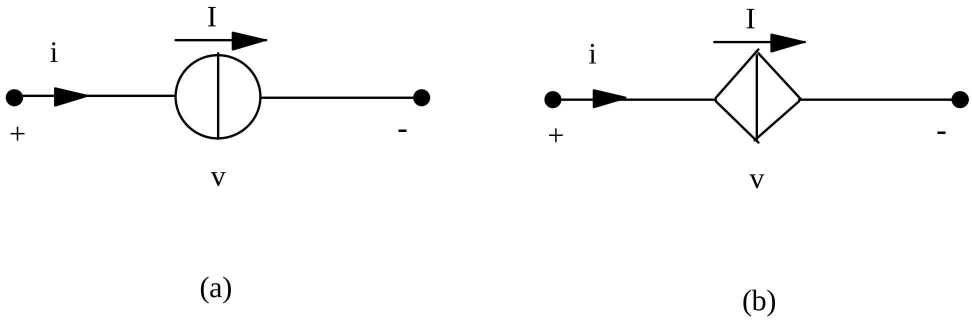


Figura 19. - Generatore di corrente

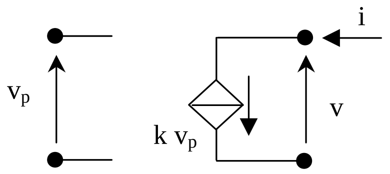
Con riferimento ai versi positivi delle grandezze indicati nella figura, l'equazione costitutiva del generatore di corrente è la seguente:

$$i = I \qquad (24)$$

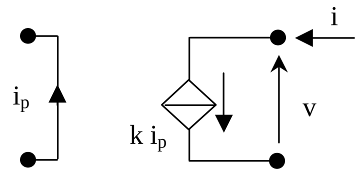
È immediato verificare che la caratteristica del generatore <u>indipendente</u> di corrente, e quindi il componente, <u>non</u> è lineare. Si ha infatti:

$$(\alpha\, i_a + \beta\, i_b - I) \neq \alpha\,(i_a - I) + \beta\,(i_b - I) \qquad \text{, per ogni } \alpha \text{ e } \beta \text{ reale}$$

Per quanto riguarda i generatori pilotati, è necessario estendere la definizione di linearità anche alla variabile pilota. In tal caso, è immediato verificare la linearità dei due componenti GCPT e GCPC illustrati in figura.



GCPT



GCPC

Caratteristica: $i = k\, v_p$ Caratteristica: $i = k\, i_p$

L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (10) e risulta:

$$p = v\, I \tag{25}$$

La potenza elettrica assorbita risulta quindi positiva o negativa a seconda che la tensione ai capi del generatore abbia verso discorde o concorde rispetto a quello della corrente impressa. Il generatore indipendente di corrente è quindi in grado di assorbire od erogare una potenza elettrica di valore qualsiasi, mantenendo comunque inalterato il valore della corrente che lo attraversa. Il generatore indipendente di corrente è un componente controllato in tensione. Il generatore dipendente di corrente non è un componente controllato né in tensione né in corrente.

A differenza dei componenti visti in precedenza, non esiste un componente elettrico reale che venga modellato elettricamente, con buona approssimazione, da un solo generatore di corrente. Il generatore di corrente interviene invece nel circuito elettrico equivalente dei dispositivi elettronici. Ad esempio, è possibile realizzare un circuito complesso che modella un transistore n-p-n in cui sono presenti due generatori di corrente pilotati in corrente.

CENNI SUI COMPONENTI REALI

I componenti reali si discostano in vari modi dai componenti ideali trattati finora; il grado di scostamento del modello ideale dal componente reale dipende fondamentalmente dal regime di funzionamento. La non idealità di un componente si traduce nella comparsa di uno o più fenomeni che non possono essere spiegati dal comportamento di un bipolo "puro": la schematizzazione elettrica fa ricorso, allora, ad una rete equivalente ottenuta aggiungendo al componente di base un insieme di altri bipoli, ognuno dei quali tiene conto separatamente di uno specifico aspetto. Tali parametri aggiuntivi vengono usualmente definiti *parassiti* in quanto espressione di fenomeni indesiderati o imprevisti. L'aggiunta dei parametri parassiti può complicare enormemente la geometria di una rete.

- **Generatori indipendenti**

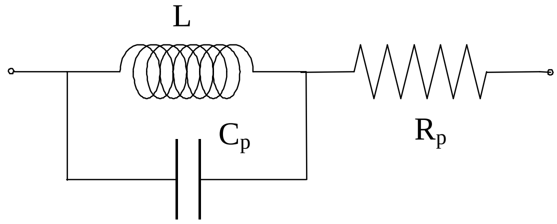
Analogamente a quanto già visto per il regime stazionario, si può assumere quale generatore di tensione reale la serie di un generatore di tensione ideale e di una resistenza R_i, detta resistenza interna. Dualmente, un generatore di corrente reale è costituito da un generatore di corrente ideale posto in parallelo alla sua resistenza interna.

- **Resistori**

Un resistore realizzato avvolgendo del filo metallico su un supporto (come nel caso di una stufa elettrica) è rigorosamente rappresentabile con il simbolo di una resistenza pura solo nel caso di funzionamento in regime stazionario, All'aumentare della frequenza acquista un peso crescente l'autoinduttanza dell'avvolgimento: il circuito equivalente diventa quindi una serie RL, in cui in serie alla resistenza è posta una induttanza L_p, detta induttanza parassita. Anche altre forme o tecniche realizzative associano alla resistenza una induttanza ed una capacità parassite, la cui importanza dipende esclusivamente dalla frequenza alla quale si prevede dovrà funzionare il componente reale. La presenza di una induttanza parassita (quasi del tutto ininfluente nella pratica a frequenza industriale) può diventare importante nel caso di misure con metodi “di confronto” con resistenze campione in regime non stazionario: in tal caso le resistenze, oltre che di precisione, dovranno essere anche rigorosamente anti-induttive.

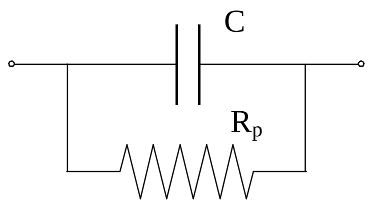
- **Induttori**

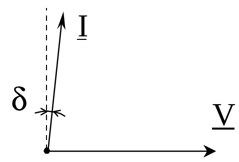
Un induttore viene realizzato con un filo metallico (o una piattina) di materiale conduttore avvolto su un supporto in un opportuno numero di spire. Per quanto si scelga elevata la sezione del conduttore, la sua resistenza complessiva non può essere, a rigore, trascurata. Il suo valore, inoltre, viene incrementato a causa di fenomeni che si verificano ad alta frequenza (il cosiddetto “effetto pelle”, che porta ad un aumento della densità di corrente sulla superficie laterale del conduttore). Sempre a frequenze elevate, occorre tenere conto dell’accoppiamento capacitivo tra spira e spira dell’avvolgimento. Il circuito equivalente diventa quindi quello di figura, in cui in parallelo all’induttanza L è posta una capacità parassita C_p ed in serie è posta una resistenza parassita R_p.



- **Condensatori**

Anche il condensatore reale può essere considerato un componente ideale soltanto a frequenze molto basse, dell’ordine della frequenza industriale. All’aumentare della frequenza il dielettrico diventa sede di fenomeni dissipativi (*Perdite dielettriche*) per isteresi elettrica e per conduzione ohmica. Per tenerne conto in misura adeguata, il circuito equivalente comprende sempre una resistenza parassita R_p in parallelo al condensatore C. La corrente risulta quindi in anticipo sulla tensione non più di $\pi/2$ ma di un angolo minore, pari a $\pi/2 - \delta$. La tangente dell’angolo δ (generalmente piuttosto piccolo nei buoni dielettrici), detto *fattore di perdita* del dielettrico o *tangente dell’angolo di perdita*, viene assunta come un indice sintetico della bontà del condensatore.





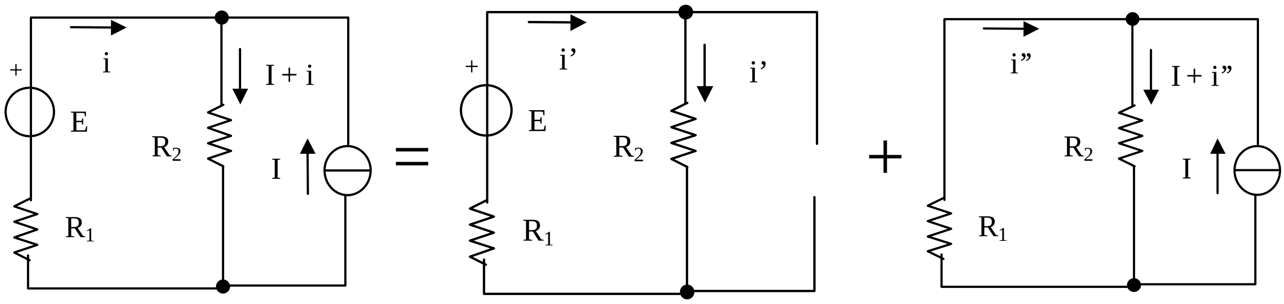
TEOREMI SULLE RETI LINEARI

Nel seguito vengono illustrati alcuni teoremi sulle reti lineari. Si suppone che tutti i componenti all’interno della rete siano dei bipoli lineari. L’applicazione dei principi di Kirchhoff ad una rete siffatta conduce ad un sistema di equazioni integro - differenziali lineari a coefficienti costanti. In tal caso, *la corrente in un generico ramo della rete è uguale alla somma delle correnti che vi sarebbero prodotte dai singoli generatori* *<u>indipendenti</u>* *presenti nella rete se agissero separatamente*: ciò esprime il **Principio di sovrapposizione degli effetti**.

Risolvere una rete <u>lineare</u> con il principio di sovrapposizione degli effetti significa allora scomporre la rete originaria in tante rete parziali quanti sono i generatori indipendenti, calcolare la corrente nei rami per ognuna di queste reti, e sommare algebricamente le correnti parziali. Si calcoli ad esempio la corrente i nella resistenza R_1 della rete di figura. Si ha:

$$i = \frac{E}{R_1 + R_2} - \frac{R_2 I}{R_1 + R_2}$$

Ponendo $i' = \dfrac{E}{R_1 + R_2}$; $i'' = -\dfrac{R_2 I}{R_1 + R_2}$ si ha $i = i' + i''$, dove i' ed i" sono le correnti nelle due sottoreti:



La prima è la rete che si ottiene da quella originaria, annullando l'azione del generatore indipendente di corrente, la seconda quella in cui è annullata l'azione del generatore indipendente di tensione. La figura illustra il concetto mostrando, nel contempo, in che modo si esclude l'azione dei generatori: i generatori indipendenti di tensione nulla sono equivalenti a cortocircuiti, i generatori indipendenti di corrente nulla sono equivalenti a circuiti aperti.

Il principio di sovrapposizione facilita spesso il calcolo delle correnti in una rete assegnata, prodotte da più forze elettromotrici (f.e.m.) di generatori; esso inoltre consente di determinare come variano le correnti nei diversi rami di una rete resistiva lineare, quando essa viene modificata per l'inserzione di una resistenza R in un suo ramo generico. Sia data infatti la rete di figura 20.a; in essa nulla cambia se fra i punti A e B del ramo n - esimo si inseriscono una resistenza R ed un generatore $E_n = RI_n$ (vedi figura 20.b): in tal caso infatti la tensione v_{AB} resta nulla.

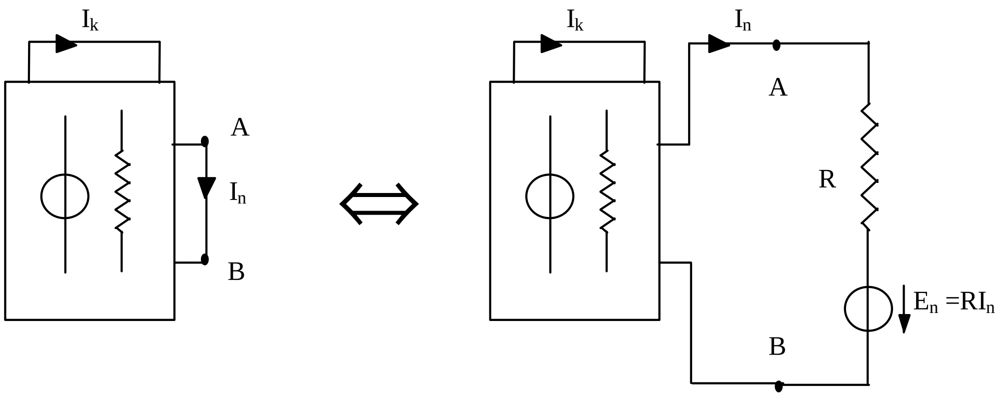
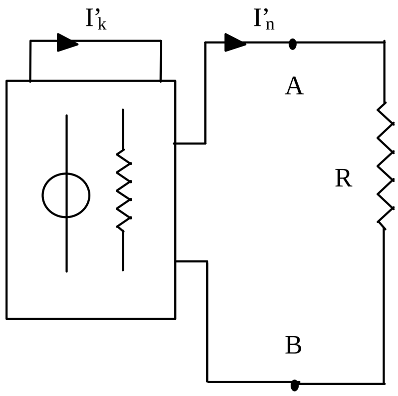


Figura 20.a. *Figura 20.b.*

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, si può quindi considerare la corrente I_k che circola nel generico ramo k della rete di figura 20.b, come la somma della I'_k che circolerebbe, in assenza di E_n, per effetto di tutte le altre f.e.m. presenti (vedi figura 20.c), e della I''_k, prodotta dalla sola E_n (vedi figura 20.d). Entrambe queste correnti sono calcolate per la stessa rete, comprendente la resistenza R.

Per conoscere le correnti I'_k della rete di figura 20.c, quando siano già note le correnti I_k che esistono nella stessa rete per R =0 di figura 20.a, è sufficiente quindi determinare le correnti I''_k, prodotte dalla sola sorgente fittizia $E_n = RI_n$, ed applicare poi la relazione:

$$I'_k = I_k - I''_k$$



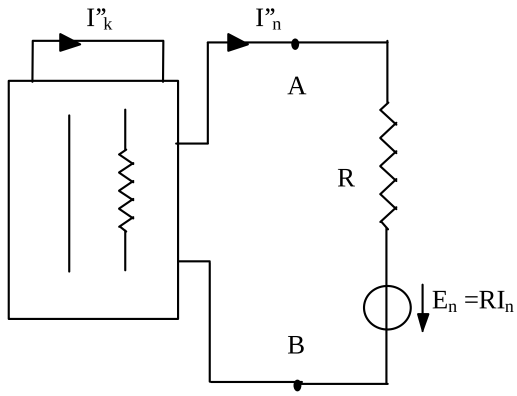
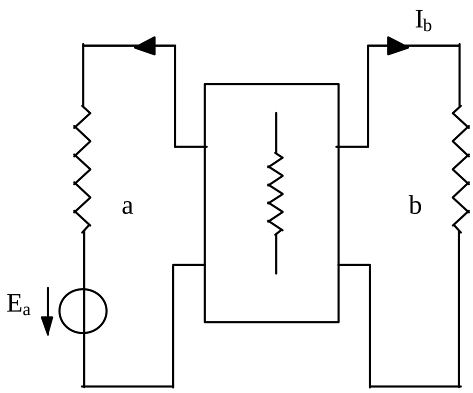


Figura 20.c. *Figura 20.d.*

Questa relazione può anche essere espressa mediante l’enunciato del seguente **Principio di compensazione**: *se in una rete lineare si introduce, nel ramo n - esimo, percorso dalla corrente* I_n*, una resistenza* R*, le correnti nei singoli rami subiscono delle variazioni* $(-I''_k)$ *uguali alle correnti che sarebbero prodotte da una sorgente di f.e.m. di valore* $-RI_n$ *,inserita nel lato n - esimo, in serie con* R*, quando tutti i generatori indipendenti sono spenti.*

Si consideri ora una rete resistiva lineare in cui si mettono in evidenza due rami a e b, in cui si prefissano i versi di riferimento per le correnti. Della rete data si considerino due versioni distinte, l’una in cui esiste solo una f.e.m. E_a nel lato a (vedi figura 21.a) ed una nella quale esiste solo una f.e.m. E'_b nel lato b (vedi figura 21.b). Tali f.e.m. siano inserire nello stesso verso assunto per le correnti.



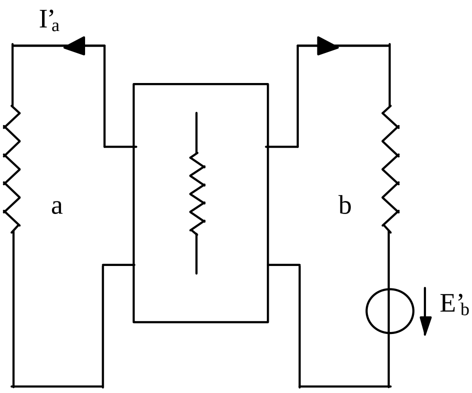


Figura 21.a. *Figura 21.b.*

Considerando tutte le tensioni di ramo **v** esistenti nel primo schema e tutte le correnti **i'** esistenti nel secondo schema, per il Teorema di Tellegen si ha:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{i'} = \sum_r V_r I'_r = 0$$

Analogamente, considerando tutte le tensioni di ramo **v'** esistenti nel secondo schema e tutte le correnti **i** esistenti nel primo schema, per il Teorema di Tellegen si ha:

$$\mathbf{v'}\cdot\mathbf{i} = \sum_r V'_r I_r = 0$$

Le **v** comprendono la f.e.m. E_a, così come le **v'** comprendono la f.e.m. E'_b. Si può quindi scrivere, introducendo le cadute di tensione resistive su tutti i rami (r):

$$-E_a I'_a + \sum_r R_r I_r I'_r = 0 \qquad\qquad -E'_b I_b + \sum_r R_r I'_r I_r = 0$$

da cui si ottiene la relazione:

$$E_a I'_a = E'_b I_b$$

che esprime il **Principio di reciprocità**, che può essere così enunciato: *se una f.e.m.* E_a *agente nel ramo a di una rete resistiva lineare produce nel ramo b una corrente* I_b*, una f.e.m.* E'_b*, agente nel ramo b, produce nel ramo a una corrente* I'_a *tale che:*

$$\frac{E_a}{E'_b} = \frac{I_b}{I'_a} \tag{26}$$

in particolare, se $E_a = E'_b$, si ha: $I'_a = I_b$

Una rete resistiva lineare che faccia capo a due morsetti AB viene denominata *bipolo lineare passivo*. Applicando ai morsetti una f.e.m. E il bipolo assorbe una corrente I, che può essere valutata applicando le Leggi di Kirchhoff alla rete. Il bipolo si comporta come un'unica resistenza equivalente R_e che è ovviamente funzione delle resistenze dei vari rami della rete (R_k). La relazione tra tensione e corrente è data da: $E = R_e I$. Il **Teorema di Cohn** afferma che *fra la corrente* I_k *che percorre la generica resistenza* R_k *della rete e la corrente* I *che entra dai morsetti AB esiste la relazione:*

$$I_k^2 = I^2 \frac{\partial R_e}{\partial R_k} \tag{27}$$

Se infatti produciamo nella rete una variazione dR_k nella resistenza R_k, si produrranno delle variazioni di corrente nella rete di partenza riconducibili, per il principio di compensazione, all'azione della f.e.m. infinitesima $de_k = - I_k\, dR_k$, inserita sul ramo k - esimo. Per il principio di reciprocità, la variazione dI della corrente di ingresso, dovuta alla f.e.m. de_k vale:

$$dI = I_k \frac{de_k}{E} = -\frac{I_k^2}{R_e I} dR_k$$

D'altra parte, essendo costante la f.e.m. di alimentazione E, si ha $d(R_e I) = 0$, ovvero:

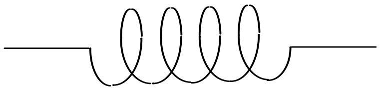
$$I dR_e = -R_e dI \quad \Rightarrow \quad I \frac{\partial R_e}{\partial R_k} dR_k = \frac{I_k^2}{I} dR_k$$

da cui si deduce che la relazione che lega la corrente I_k alla I è data dalla (27).

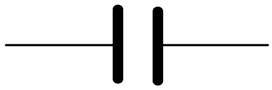
Tabella dei simboli circuitali più comuni

Resistore Lineare

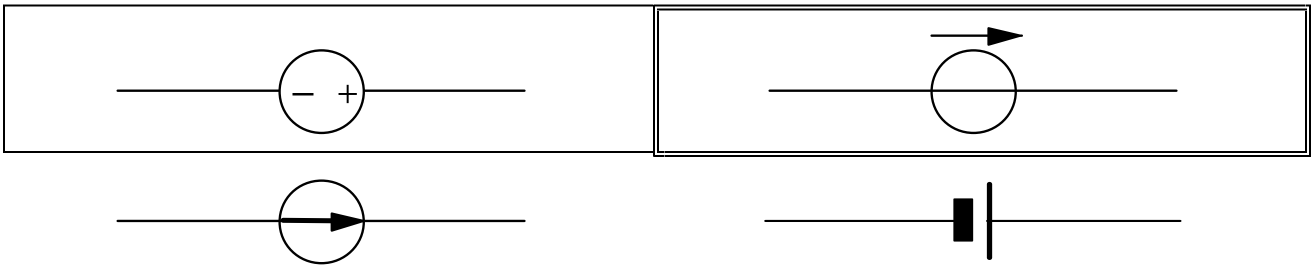
Induttore Lineare



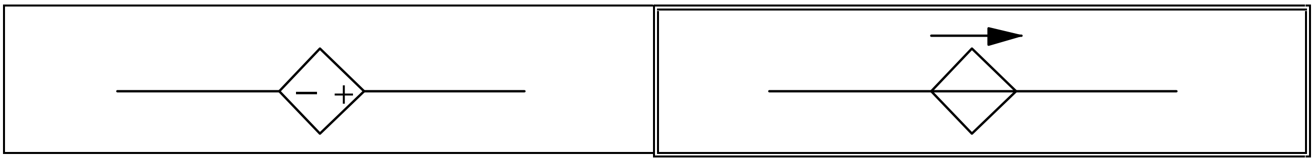
Condensatore Lineare



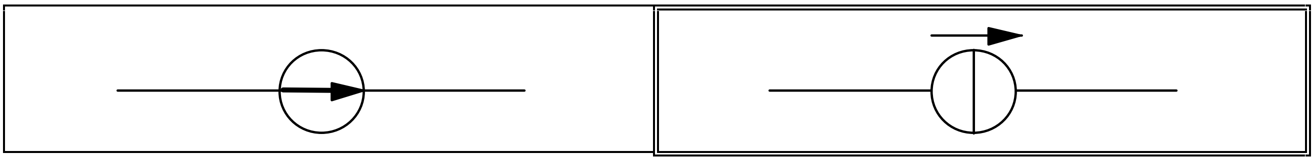
Generatore di Tensione Indipendente



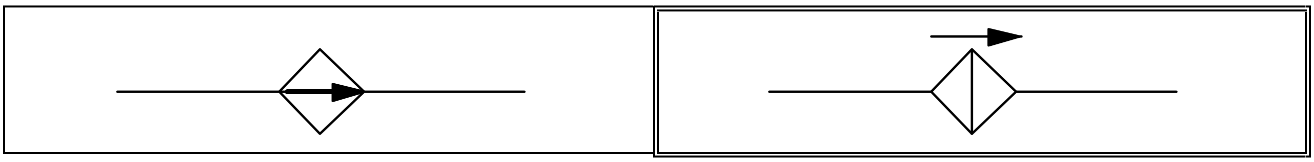
Generatore di Tensione Pilotato



Generatore di Corrente Indipendente



Generatore di Corrente Pilotato



La tabella mostra le due convenzioni più utilizzate per i generatori, rispettivamente a destra e a sinistra. Si noti che il generatore di tensione indipendente viene spesso rappresentato con un simbolo (il cerchio con la freccia centrata) che può essere confuso con un generatore di corrente indipendente.