

MAGNETOSTATICA

1. I MODELLI DELLA MAGNETOSTATICA

Come necessaria premessa alla magnetostatica si ripropongono alcune evidenze sperimentali:

- I magneti naturali*, che per l'uso di laboratorio sono perlopiù nella forma di barre sottili (aghi magnetici), *tendono ad orientarsi secondo il meridiano terrestre*; convenzionalmente si dà in nome di estremità Nord (N) a quella che punta verso il nord geografico, Sud (S) all'altra. Un ago magnetico è un dipolo magnetico naturale.
- I dipoli magnetici naturali interagiscono tra loro nel vuoto presentando un comportamento del tutto analogo ai dipoli elettrici*; l'analogia porta a caratterizzare il dipolo naturale "puntiforme" con un vettore applicato $\delta \mathbf{p}_m$ nel punto in cui è centrato il dipolo (*momento magnetico coulombiano del dipolo*). Il verso di $\delta \mathbf{p}_m$ è quello che va dall'estremità S alla N (vedi figura 1.c). L'unità di misura di $\delta \mathbf{p}_m$ è il weber · metro (Wb·m), corrispondente al (coulomb·metro) per il dipolo elettrico $\delta \mathbf{p}$ (vedi figura 1.a). Nella concezione formale del dipolo magnetico naturale come un aggregato inscindibile di "cariche magnetiche" puntiformi di segno opposto dislocate agli estremi di un segmento, l'unità di misura per la carica magnetica è il weber.
- I dipoli magnetici amperiani di momento $\delta \mathbf{m}$ interagiscono tra loro nel vuoto presentando un comportamento del tutto analogo ai dipoli elettrici e ai dipoli magnetici naturali*. L'interazione tra dipoli amperiani (vedi figura 1.b) è quindi del tutto analoga a quella tra dipoli elettrici. L'unità di misura di $\delta \mathbf{m}$ è l'Ampère-metro² (A·m²).
- L'aspetto fondamentale dell'elettromagnetismo in regime stazionario è il fatto che *le azioni su correnti e/o magneti prodotte da un dipolo amperiano di momento $\delta \mathbf{m}$ sono del tutto uguali a quelle prodotte su correnti e/o magneti dal dipolo magnetico naturale (coulombiano) $\delta \mathbf{p}_m$ se:*

$$\delta \mathbf{p}_m = \mu_0 \delta \mathbf{m} \quad (1.1)$$

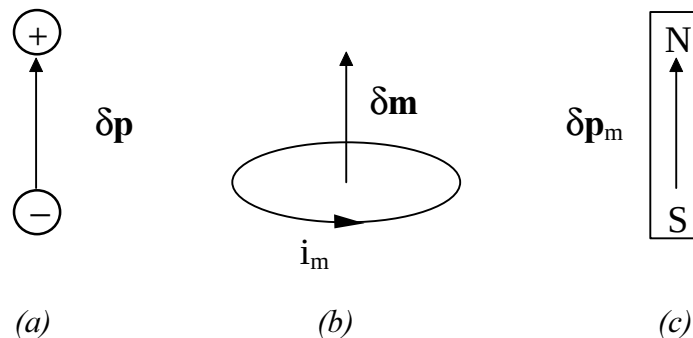


Figura 1. - Schematizzazioni di dipoli: a) dipolo elettrico, b) dipolo magnetico "amperiano", c) dipolo magnetico "coulombiano".

L'introduzione delle grandezze essenziali per la descrizione del campo magnetico prodotto dai dipoli può farsi in base alla stretta analogia con il caso dei dipoli elettrici. Si individua subito, pertanto, il modello che ammette, quale sorgente, una distribuzione continua di dipoli descritta dalla funzione vettoriale $\mathbf{P}_m$. Questa esprime il momento magnetico (coulombiano) specifico in modo del tutto corrispondente al vettore polarizzazione $\mathbf{P}$ che esprime il momento elettrico specifico. In stretta analogia con la relazione di legame materiale tra il campo elettrico $\mathbf{E}$ ed il campo di induzione elettrica $\mathbf{D}$ ($\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$) si può dunque scrivere:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{P}_m \quad (1.2)$$

dove $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$ sono, rispettivamente, il campo magnetico ed il campo di induzione magnetica. L'unità di misura di $\mathbf{P}_m$ è il weber/metro² (Wb/m²), detto anche Tesla (T). Nelle regioni in cui $\mathbf{P}_m = 0$ risulta

pertanto $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. Se esistessero le cariche magnetiche “libere” si avrebbe su una carica magnetica puntiforme di prova q_m nel vuoto, la forza $\mathbf{F} = q_m \mathbf{H}$. Ma *l'esperienza ha sinora escluso l'esistenza di cariche magnetiche libere*, i cosiddetti monopoli magnetici; va fatto pertanto riferimento alle forze agenti sui dipoli magnetici. In particolare, la coppia e la forza agente su un dipolo (coulombiano) risultano essere^(o):

$$\delta C = \delta \mathbf{p}_m \times \mathbf{H} \qquad \delta \mathbf{F} = (\delta \mathbf{p}_m \cdot \nabla) \mathbf{H} \qquad (1.3)$$

Grazie all'equivalenza (1.1), è possibile anche individuare un modello che considera, quale sorgente, una distribuzione continua di dipoli amperiani descritta dalla funzione vettoriale $\mathbf{M}$. Tale *magnetizzazione* esprime il momento magnetico (amperiano) specifico e la sua relazione con $\mathbf{P}_m$ è:

$$\mathbf{P}_m = \mu_0 \mathbf{M}$$

L'unità di misura di $\mathbf{M}$ è l'Ampère /metro (A/m). Si può dunque scrivere, sostituendo nella (1.2):

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} \qquad (1.4)$$

Inoltre, la coppia e la forza agente su un dipolo (amperiano) risultano essere:

$$\delta C = \delta \mathbf{m} \times \mathbf{B} \qquad \delta \mathbf{F} = (\delta \mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \nabla (\delta \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \qquad (1.5)$$

Ci si può dunque chiedere se un mezzo magnetizzato va considerato come un aggregato di dipoli amperiani (di densità $\mathbf{M}$) o di dipoli coulombiani (di densità $\mathbf{P}_m$). La questione non ha rilevanza dal punto di vista macroscopico, data l'equivalenza delle due concezioni. Tuttavia la magnetizzazione microscopica è dovuta sia al moto degli elettroni nelle “orbite” elettroniche (schematizzabili come spirali percorse da corrente) sia a momenti magnetici intrinseci degli elettroni, per i quali non è possibile concepire né uno schema coulombiano né uno schema amperiano. La teoria classica della magnetizzazione è pertanto affetta da limiti intrinseci, che sono stati superati solo nell'ambito delle concezioni quantistiche. In conclusione, nelle trattazioni *prevala il riferimento alla concezione amperiana*. Questo è dovuto alla evidenza sperimentale degli effetti magnetici dovuti alle correnti elettriche di qualsiasi natura ed all'assenza di monopoli magnetici. Per questo motivo per caratterizzare i materiali magnetici lineari si fa spesso uso della relazione tra la magnetizzazione $\mathbf{M}$ ed il campo magnetico $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \qquad (1.6)$$

dove χ_m , adimensionale, è detta *suscettività magnetica*.

Nell'ambito della magnetostatica, il campo magnetico ed il campo di induzione magnetica soddisfano, sperimentalmente, le seguenti relazioni:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \qquad \Leftrightarrow \qquad \oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i_c \qquad (1.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \qquad (1.8)$$

dove $\mathbf{J}$ è la densità di corrente ed i_c la corrente concatenata alla curva chiusa Γ .

La relazione di legame materiale tra campo di induzione $\mathbf{B}$ e campo magnetico $\mathbf{H}$ si scrive usualmente tramite la permeabilità magnetica μ nel seguente modo:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \qquad (1.9.a)$$

() L'operatore differenziale del primo ordine $(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}$ è definito come: $(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} = a_x \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} + a_y \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y} + a_z \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial z}$

Tale relazione descrive mezzi isotropi lineari (se μ è al più funzione del punto e del tempo) o non lineari (se μ è anche funzione del campo magnetico). Se il mezzo è anisotropo la permeabilità magnetica μ diventa un tensore (cioè una matrice 3×3):

$$\mathbf{B} = [\mu] \mathbf{H} \quad (1.9.b)$$

Il modello differenziale (1.7) - (1.8), accoppiato alla relazione di legame materiale nella forma (1.9) o (1.4), può essere risolto introducendo il *potenziale vettore* $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.10)$$

Sostituendo la (1.10) nella (1.4) e applicando l'operatore rotore ad entrambi i membri si ottiene:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \nabla \times \mathbf{H} + \mu_0 \nabla \times \mathbf{M}$$

Sostituendo la (1.7) e applicando l'identità vettoriale $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ si ottiene:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \nabla \times \mathbf{M}$$

Come è noto dalla teoria dei campi, la (1.10) non è sufficiente a definire univocamente $\mathbf{A}$. Si impone pertanto la condizione aggiuntiva:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (1.11)$$

Risulta quindi:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \nabla \times \mathbf{M} \quad (1.12)$$

Le sorgenti di $\mathbf{A}$, e dunque di $\mathbf{B}$, sono dunque di due tipi: la densità di corrente di conduzione $\mathbf{J}$ ed il rotore della magnetizzazione. Seguendo lo schema amperiano, si definisce *corrente di magnetizzazione* il vettore $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$. Con questa definizione la (1.12) si riscrive come:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_m) \quad (1.13)$$

La (1.13) si dice *Equazione di Poisson vettoriale* ed ammette come unica soluzione la seguente:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d\mathbf{r}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\mathbf{J}_m(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d\mathbf{r}' \quad (1.14)$$

Facendo uso dell'identità vettoriale $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{M}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{M}) - \nabla^2 \mathbf{M}$, la (1.14) si scrive anche come:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d\mathbf{r}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_m} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) d\mathbf{r}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial V_m} \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dS \quad (1.15)$$

Si noti che la (1.15) è una soluzione solo se la magnetizzazione è nota. Nel caso assai comune in cui la magnetizzazione sia una funzione del campo magnetico, cioè $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$, la (1.15) rappresenta soltanto una formulazione alternativa della (1.13).

Nel caso in cui $\mathbf{J} = 0$, cioè se non vi sono correnti di conduzione, conviene utilizzare il *potenziale magnetico scalare* ψ . Infatti, in questo modo l'incognita del problema è una grandezza scalare invece che vettoriale, il che solitamente conduce ad espressioni più semplici. Se $\mathbf{J} = 0$, il campo magnetico $\mathbf{H}$ è irrotazionale in tutto lo spazio e può essere derivato da un potenziale scalare:

$$\mathbf{H} = -\nabla \psi \quad (1.16)$$

Sostituendo la (1.16) nella (1.4) e applicando l'operatore divergenza ad entrambi i membri si ottiene:

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot (-\nabla \psi) + \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M}$$

Risulta quindi:

$$\nabla^2 \psi = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (1.17)$$

La sorgente di ψ , e dunque di $\mathbf{H}$, è dunque la divergenza della magnetizzazione. Seguendo lo schema coulombiano, si definisce *densità di carica magnetica* la grandezza $\rho_m = \nabla \cdot \mathbf{P}_m = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M}$. L'unità di misura di ρ_m è il weber /metro³ (Wb/m³) oppure il Tesla /metro (T/m). Con questa definizione la (1.17) si riscrive come:

$$\nabla^2 \psi = -\rho_m / \mu_0 \quad (1.18)$$

La (1.18) si dice *Equazione di Poisson* ed ammette come unica soluzione la seguente:

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int_{V_\infty} \frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d\mathbf{r}' \quad (1.19)$$

Facendo uso dell'identità vettoriale $\phi \nabla \cdot \mathbf{M} = \nabla \cdot (\phi \mathbf{M}) - \mathbf{M} \cdot \nabla \phi$, la (1.19) si scrive anche come:

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_m} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) d\mathbf{r}' + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V_m} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dS \quad (1.20)$$

2. PROPRIETÀ MAGNETICHE DEI MATERIALI

La considerazione di aggregati di dipoli magnetici ci ha consentito di riconoscere la stretta analogia tra i sistemi elettrostatici ed i sistemi magnetici stazionari. Per questi ultimi il comportamento della materia magnetizzata è stato caratterizzato formalmente dalla funzione vettoriale $\mathbf{M}$ e dal suo legame (il cosiddetto legame costitutivo) con uno dei vettori magnetici; in particolare con il campo magnetico $\mathbf{H}$. Osserviamo subito, però, che tale analogia vale soltanto a livello macroscopico. Infatti, se si intende approfondire la connessione tra il comportamento macroscopico della materia e quello dei suoi costituenti elementari a livello atomico, è necessario considerare il momento magnetico dei singoli atomi (si ricordi la definizione di $\mathbf{M}$ come limite del rapporto $\Delta \mathbf{m} / \Delta V$). Il momento magnetico del singolo atomo è dato dalla sovrapposizione dei moti orbitali degli elettroni attorno al nucleo e dei loro momenti intrinseci.

Diamagnetismo

Si consideri un mezzo nel quale, in assenza di campo magnetico applicato dall'esterno, si abbia una perfetta compensazione tra i momenti magnetici degli elettroni di ogni singolo atomo (ciò accade ad esempio per i gas nobili). L'esperienza mostra che in tal caso l'applicazione di un campo magnetico esterno anche molto intenso dà luogo ad una magnetizzazione indotta ad esso proporzionale molto debole a carattere smagnetizzante. Il comportamento è diamagnetico per cui la suscettività χ_m è negativa (si ricordi che $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$). Si tratta di suscettività molto piccole ed, in generale, indipendenti dalla temperatura (dell'ordine di -10^{-5} nella maggior parte dei casi, ad esempio $-0.9 \cdot 10^{-5}$ per il rame; fa eccezione il bismuto per il quale $\chi_m = -1.6 \cdot 10^{-4}$).

Paramagnetismo

Quando gli atomi, gli ioni o le molecole possiedono un momento magnetico proprio, l'azione di un campo esterno produce un allineamento parziale dei momenti secondo il verso del campo. Tale effetto magnetizzante è il risultato dell'equilibrio statistico tra l'azione ordinatrice del campo e quella dell'agitazione termica. Se l'interazione magnetica tra atomi adiacenti è trascurabile, non si ha magnetizzazione spontanea a livello macroscopico: la suscettività magnetica χ_m è positiva ed ha valori molto modesti alla temperatura ambiente (dell'ordine di 10^{-3}). Essa decresce con la temperatura secondo la Legge di Curie: $\chi_m = C/T$. I materiali che così si comportano sono detti paramagnetici. Essi hanno dunque un comportamento lineare ed isotropo caratterizzato da una permeabilità relativa poco discosta dall'unità. Essi pertanto, come i materiali diamagnetici, modificano in modo inessenziale i campi prodotti "nel vuoto".

Ferromagnetismo

Quando gli atomi, gli ioni o le molecole possiedono un momento magnetico proprio e sono fortemente interagenti tra loro, gli aggregati risultanti sono ferromagnetici. L'esperienza mostra che in tal caso con campi esterni facilmente realizzabili si raggiunge la saturazione (cioè il parallelismo di tutti i dipoli magnetici) a temperatura ambiente. Si riscontrano inoltre vistosi fenomeni di magnetizzazione residua (in assenza di campo magnetico) e di isteresi. Per quanto riguarda la dipendenza dalla temperatura, a partire da un valore critico T_c della temperatura (**temperatura di Curie**) si ha un comportamento paramagnetico e quindi una suscettività magnetica che segue la Legge di Curie - Weiss: $\chi_m = C/(T - T_c)$. Questo insieme di proprietà, ma particolarmente quella di poter dar luogo ad intense magnetizzazioni con deboli campi applicati in materiali di ottimo comportamento meccanico - strutturale, rende il ferromagnetismo di fondamentale importanza per le applicazioni elettrotecniche.

Dal punto di vista microscopico, i materiali ferromagnetici sono formati dall'aggregazione di innumerevoli "domini magnetici" o "domini di Weiss" delle dimensioni di $10^{-3} \div 10^{-6}$ m che sono composti da molecole o atomi che possiedono un momento magnetico proprio e sono allineati fra loro (vedi figura 2).

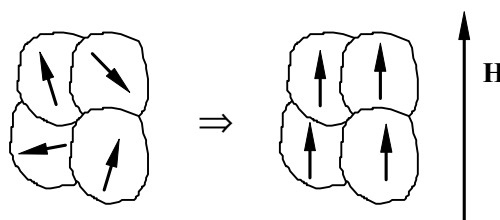


Figura 2. - Domini di Weiss prima e dopo l'allineamento con il campo magnetico esterno

Se il materiale è allo stato nativo i momenti magnetici dei domini di Weiss sono orientati casualmente, producendo quindi una magnetizzazione macroscopicamente nulla. In presenza di un campo magnetico esterno, tuttavia, i momenti magnetici tendono ad allinearsi. Tale allineamento permane anche se il campo magnetico esterno è rimosso, dando origine ad una magnetizzazione residua. Tale effetto magnetizzante è il risultato dell'equilibrio statistico tra l'azione ordinatrice del campo e quella dell'agitazione termica. Aumentando la temperatura l'effetto dell'agitazione diventa sempre più sensibile, causando la completa smagnetizzazione quando si raggiunge la temperatura di Curie.

Per studiare i materiali ferromagnetici ci si basa, in concreto, sulle **caratteristiche di magnetizzazione**, cioè sui diagrammi che forniscono il valore in modulo e verso dell'induzione magnetica B in funzione del campo magnetico H per provini omogenei.

In figura 3 è rappresentato un tipico processo di magnetizzazione. Il materiale sia allo stato nativo (smagnetizzato). Si distinguono una curva di prima magnetizzazione, (tratto OA) e, a partire da A un processo ciclico che non si richiude esattamente. Se il campo magnetico viene invertito ripetutamente tra i valori $\pm H_M$, l'evoluzione si assesta su cicli simmetrici di **isteresi**. Al variare di H_M varia l'ampiezza dei cicli.

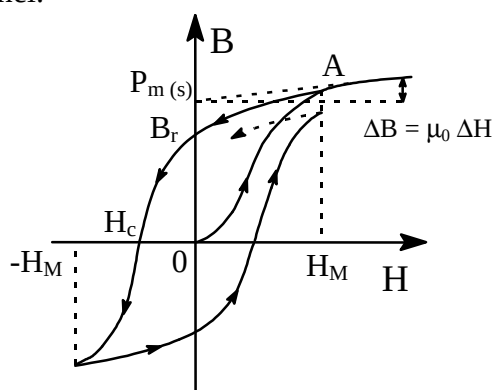


Figura 3.

Il raggiungimento della saturazione è evidenziato dal fatto che, per campi maggiori di H_M , l'incremento ΔB corrispondente ad un incremento ΔH è lo stesso che si avrebbe nel vuoto, cioè $\mu_0 \Delta H$. Il ciclo di isteresi che viene assunto come termine di paragone è quello descritto a partire dalla saturazione.

I principali parametri usualmente considerati per la caratterizzazione dei legami B-H sono:

- le permeabilità relative differenziali valutate lungo la curva di prima magnetizzazione secondo la formula $\mu_{r(d)} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{dB}{dH} \right)_{dH>0}$, in particolare quella iniziale ($B = 0, H = 0$) e quella massima;
- il valore della magnetizzazione di saturazione $P_m(s)$;
- l'induzione residua B_r che si ha quando il campo esterno viene portato a zero;
- il campo coercitivo H_c che è necessario applicare in verso opposto a B_r per ridurre a zero l'induzione;
- alcuni valori di energie specifiche del ciclo, quali l'area W_{ist} del ciclo oppure il valore del massimo del prodotto $|BH|$ lungo il ciclo.

L'area W_{ist} del ciclo di isteresi ha un significato particolare: come si vedrà più diffusamente nel seguito, la variazione di densità di energia magnetica immagazzinata in seguito ad una variazione $d\mathbf{B}$ del campo di induzione è $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$. Tale energia magnetica viene convertita in parte in energia conservativa ed in parte in energia dissipata (calore), secondo la relazione:

$$\int_{V_m} (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}) d\tau = dE_c + \delta E_d \quad (2.3)$$

Integrando la (2.3) su un ciclo di isteresi, si ottiene:

$$\int_{V_m} \oint (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}) d\tau = \oint dE_c + \oint \delta E_d = E_d \quad (2.4)$$

Se si considera la densità di energia dissipata (misurata in joule /ciclo·m³), la (2.4) diventa:

$$P_d = \oint (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}) = W_{ist} \propto B_M^{1.6} \quad (2.5)$$

La relazione di proporzionalità dell'area del ciclo di isteresi W_{ist} con una potenza del campo di induzione massimo B_M è specificata dalle Norme. L'esponente è solitamente compreso tra 1.6 e 2. Per una trattazione più completa delle perdite nel ferro vedi capitolo sulle Norme.

MATERIALI FERROMAGNETICI DOLCI

Un importante sottogruppo nei materiali ferromagnetici è dato dai **materiali ferromagnetici dolci** che sono caratterizzati da elevati valori della permeabilità e basso valore del campo coercitivo ($H_c < 10^3$ A/m) cui si collega il basso valore dell'area del ciclo di isteresi (vedi figura 4).

I materiali di questo gruppo vengono impiegati laddove interessa limitare al massimo le correnti necessarie per produrre e controllare i flussi di induzione (nuclei di elettromagneti, nuclei di trasformatori, rotor e statori di macchine rotanti). I materiali di questo gruppo principalmente utilizzati sono il ferro e le sue leghe con nickel, cobalto e silicio, gli acciai a basso tenore di carbonio e le ferriti dolci. Le caratteristiche principali di alcuni materiali dolci sono presentate nella Tabella 1.a. Le caratteristiche di magnetizzazione di alcuni materiali dolci sono mostrate in figura 5.

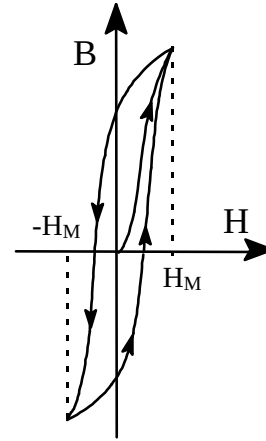


Figura 4. - Ciclo di isteresi per materiali ferromagnetici dolci

Tabella 1.a. Caratteristiche principali di alcuni materiali ferromagnetici dolci

Nome	Composizione	μ_r		$P_{m(s)}$ (T)	B_r (T)	H_c (A/m)	σ (S/m)
		iniziale	max				
Cobalto	Co 99.9%	10	175	1.79	0.31	1000	$1.5 \cdot 10^7$
Nichel	Ni 99.9%	400	1100	0.61	0.33	130	$1.4 \cdot 10^7$
Ferro (puro)	Fe 99.9%	10^4	$2 \cdot 10^5$	2.16	1.2	4	$1 \cdot 10^7$
Acciaio (Low Carbon)	Fe 99.5%	200	5000	2.16	1.2	80	$9.5 \cdot 10^6$
Ghisa	Fe, C 1.8÷4.5%	70	600	2.1	1.4	500	$1.1 \cdot 10^6$
Ferro al Silicio (isotropo)	Fe, Si 3%	500	7000	2.14	0.8	40	$2 \cdot 10^6$
Ferro al Silicio (anisotropo)	Fe, Si 3%	1400	$5 \cdot 10^4$	2.14	1.2	7	$2 \cdot 10^6$
4750 alloy	Fe, Ni 48%	$1.1 \cdot 10^4$	$8 \cdot 10^4$	1.55	0.8	2	$2.1 \cdot 10^6$
Permalloy	Ni, Fe 22%	10^4	$5 \cdot 10^4$	1.08	0.6	4	$1.8 \cdot 10^6$
4-79 Permalloy	Ni, Fe 17%, Mo 4%	$4 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^5$	0.8	0.4	1	$1.7 \cdot 10^6$
Supermalloy	Ni, Fe 15%, Mo 5%, Mn 0.5%	10^5	$4 \cdot 10^5$	0.78	0.6	0.4	$1.5 \cdot 10^6$
2V - Permendur	Fe, Co 49%, V 2%	800	$4 \cdot 10^5$	2.4	1.5	400	$4 \cdot 10^6$
Supermendur (elevata purezza)	Fe, Co 49%, V 2%	800	$1 \cdot 10^5$	2.4	2.2	16	$2.5 \cdot 10^6$
Metglas 2605SC	$Fe_{81}B_{13.5}Si_{3.5}C_2$	-	$3 \cdot 10^5$	1.6	1.4	3	$8 \cdot 10^5$
Metglas 2605S-2	$Fe_{78}B_{13}Si_9$	-	$6 \cdot 10^5$	1.6	1.3	2	$8 \cdot 10^5$
MnZn Ferrite	H5C2 (codice TDK)	10000	-	0.4	0.09	7	6.6
MnZn Ferrite	H5E (codice TDK)	18000	-	0.4	0.12	3	20
NiZn Ferrite	K5 (codice TDK)	290	-	0.3	0.25	80	$5 \cdot 10^{-6}$

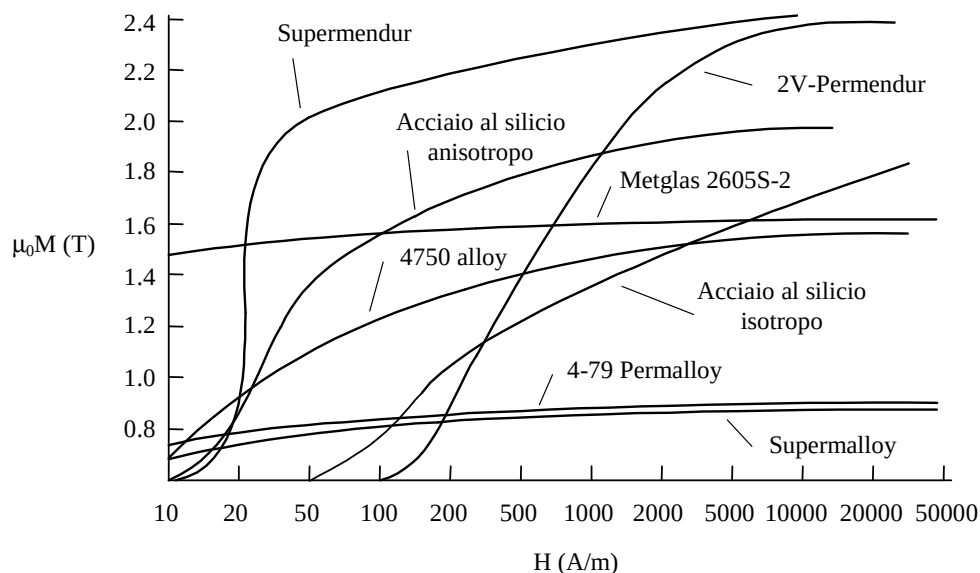


Figura 5. - Caratteristiche di magnetizzazione di alcuni materiali dolci.

Il ferro commercialmente puro (ferro dolce) viene utilizzato nelle applicazioni in continua (nuclei di elettromagneti). Per applicazioni in alternata, ad esempio lamierini per motori, viene utilizzato preferibilmente acciaio a basso tenore di carbonio (Low Carbon) e acciaio al silicio a grani non orientati (isotropo) a causa della loro minore conducibilità. Questi due materiali sono in assoluto i più usati nel mondo (1÷2 Mton/anno). L'isotropia fa sì che le proprietà magnetiche non varino al variare della direzione del flusso magnetico e quindi che non si abbiano problemi particolari nelle operazioni di taglio e montaggio. Questi tipi di materiale sono usati per le macchine rotanti e solo eccezionalmente per i trasformatori. Diversi sono i tipi di lamiere laminate a caldo sia per quanto riguarda lo spessore (0.5 mm oppure 0.35 mm) sia soprattutto per il tenore di silicio che può andare dall'1% al 4.5%. Per i nuclei dei trasformatori (salvo quelli di piccola potenza), in cui il peso e l'efficienza sono importanti, viene utilizzato preferibilmente acciaio al silicio a grani orientati (anisotropo). Il lamierino si ottiene ricorrendo a laminazioni effettuate a freddo, intercalate da trattamenti termici eseguiti a circa 800°C in atmosfera di idrogeno, di leghe ferro - silicio ad alto tenore di silicio (3%) e viene fornito in rotoli. Lo spessore del lamierino è solitamente 0.3 mm, ma per impieghi particolari può arrivare a 0.05 mm. L'anisotropia offerta dalle leghe Fe - Si a cristalli orientati, a differenza delle altre leghe, è tale da presentare per il flusso una sola direzione ottimale (quella di laminazione) per la quale le caratteristiche magnetiche sono molto buone e le perdite molto basse. La lavorazione meccanica permette di raggiungere un allineamento medio tra i momenti magnetici dei domini di Weiss di circa 7°. Un successivo trattamento elettromagnetico consente di ridurre il disallineamento fino a circa 3°, con una sensibile riduzione delle perdite. Ulteriori miglioramenti si sono ottenuti introducendo trattamenti superficiali di levigatura e di ricottura ad alta temperatura (1200°C) per permettere una ricristallizzazione ed ottenere domini di Weiss di dimensioni maggiori. Le caratteristiche principali di alcuni acciai al silicio a grani orientati (anisotropi) per lamierini sono presentate nella Tabella 1.b.

Tabella 1.b. Caratteristiche di alcuni acciai al silicio a grani orientati (anisotropi) per lamierini.

Tipo	Spessore	P_d (50Hz, 1.7T)	P_d (50Hz, 1.3T)
	(mm)	(W/kg)	(W/kg)
Convenzionale	0.27	1.27	0.71
Alta induzione	0.27	1.03	0.57
Alta induzione	0.23	0.90	0.48
Alta induzione	0.15	0.66	0.37
Inciso (Laser)	0.15	0.53	0.30
Inciso (Laser) e levigato	0.15	0.40	0.20
Recristallizzato	0.07	0.35	0.17
Metglas 2605SC	0.04	-	0.16
Recristallizzato	0.03	0.21	0.13

Per le applicazioni elettroniche (trasformatori ed induttori) a frequenza 1÷100 kHz sono solitamente utilizzate le leghe ferro - nickel (permalloys). Queste hanno sia una elevata permeabilità iniziale μ_i sia una duttilità sufficientemente elevata da potere formare strisce molto sottili. I materiali più comuni in questa categoria sono la lega Fe - Ni 48% con $\mu_i \approx 11000$ e la lega Ni - Mo5% con $\mu_i \approx 80000$. Le leghe ferro - cobalto, di solito con un 2% di Vanadio per migliorare la duttilità, sono utilizzate nelle applicazioni al alta temperatura a causa della loro elevata temperatura di Curie ($T_c \approx 980^\circ\text{C}$). Le leghe amorfe ferro - boro (vetri metallici) hanno una composizione del tipo (Fe, Co, Ni)₈₀(B, C, Si)₂₀ e sono ottenute per rapido raffreddamento del materiale fuso. Questa classe di materiali, nata negli anni 70, può essere divisa in tre sottoclassi (vedi Tabella 1.c):

1. Leghe di ferro. La loro induzione di saturazione è 1.6÷1.8T. Originariamente sviluppate per sostituire gli acciai al silicio anisotropi, hanno dimostrato di possedere ad alta frequenza (fino a 100 kHz) caratteristiche anche migliori delle leghe ferro - nickel cristalline;
2. Leghe ferro - nickel. La loro induzione di saturazione è circa 0.9T. Rispetto alle leghe di ferro hanno un minore coefficiente di magnetostrizione λ_s (vedi paragrafo 4) ed una maggiore resistenza alla corrosione, ma sono più costose;
3. Leghe di cobalto. Il loro coefficiente di magnetostrizione è molto piccolo, hanno permeabilità molto maggiori delle precedenti e perdite molto minori, tuttavia sono anche le più costose.

Esse hanno il potenziale per rimpiazzare i materiali cristallini in molti campi: alcune presentano proprietà simili ai migliori permalloys mentre altre hanno perdite sostanzialmente inferiori alle leghe ferro - silicio anisotrope.

Le ferriti (dolci), a causa della loro conducibilità estremamente bassa, sono utilizzate per i nuclei di trasformatori ed induttori funzionanti a frequenza oltre 100 kHz. Le ferriti sono ossidi metallici sinterizzati (facilmente lavorabili) con la formula generale $X\text{Fe}_2\text{O}_4$. Nelle ferriti manganese - zinco X è una combinazione di Mn, Zn e Fe, mentre nelle ferriti nickel - zinco Mn è sostituito da Ni. Le ferriti MnZn hanno un capo di induzione di saturazione piuttosto elevato, ma anche una alta conducibilità, per cui sono utilizzate per applicazioni fino ad 1 MHz. Oltre 1 MHz si utilizzano solitamente le ferriti NiZn che hanno una conducibilità notevolmente più bassa.

Tabella 1.c. Caratteristiche principali di alcuni materiali magnetici amorfi

	$B_{\max}$ (T)	H_c (A/m)	λ_s (10^{-6})	σ (MS/m)	T_c (°C)	P_d (60Hz, 1.4T) (W/kg)	P_d (20kHz, 0.2T) (kW/m ³)
<i>Leghe di ferro</i>							
Metglas 2605SC $Fe_{81}B_{13.5}Si_{3.5}C_2$	1.61	3.2	30	0.77	370	0.3	300
Metglas 2605S-2 $Fe_{78}B_{13}Si_9$	1.56	2.4	27	0.77	415	0.23	-
Metglas 2605CO $Fe_{67}Co_{18}B_{14}Si_1$	1.80	4.0	35	0.77	415	0.55	-
Metglas 2605S-3 $Fe_{79}B_{16}Si_5$	1.58	8.0	27	0.8	405	1.2	58
<i>Leghe ferro-nickel</i>							
Metglas 2826MB $Fe_{67}Ni_{38}Mo_4B_{18}$	0.88	1.2	12	0.63	353	-	200
<i>Leghe di cobalto</i>							
Metglas 2705M $Co_{67}Ni_3Fe_4Mo_2$ $B_{12}Si_{12}$	0.72	0.4	0.5	0.74	340	-	43

MATERIALI FERROMAGNETICI DURI

Un altro importante sottogruppo nei materiali ferromagnetici è dato dai **materiali ferromagnetici duri** che sono caratterizzati da elevati valori della induzione residua e del campo coercitivo ($H_c > 10^4$ A/m) cui si collega l'elevato valore del prodotto $|BH|$ ottenuto nel 2° quadrante, come si osserva in figura 6.

I materiali di questo gruppo vengono impiegati laddove interessa realizzare flussi magnetici costanti nel tempo e pertanto conviene ricorrere al magnetismo permanente invece che a circuiti percorsi da corrente. Alcuni materiali di questo gruppo sono presentati nella Tabella 2. Tra questi sono particolarmente rilevanti le leghe ed i sinterizzati comprendenti terre rare per il loro elevato valore di H_c .

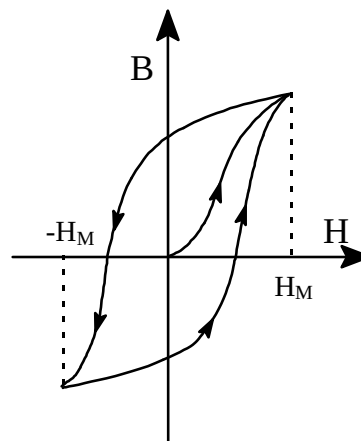


Figura 6. - Ciclo di isteresi per materiali ferromagnetici duri

I materiali magnetici duri commercialmente più importanti sono le ferriti (dure), le leghe ed i sinterizzati comprendenti terre rare e gli Alnico. Il mercato mondiale dei materiali magnetici duri nel 1990 è stato $1.5 \cdot 10^9$ US\$. Le quote di mercato sono state: 65% ferriti, 22% terre rare (18% composti di cobalto, 4% Nd - Fe - B), 11% Alnico, 2% altri.

Tabella 2. Caratteristiche principali di alcuni materiali ferromagnetici duri

Materiale	B_r	H_c	$ B H _{\max}$
	(T)	(kA/m)	(kJ/m ³)
Acciaio al tungsteno Fe, W 5%, C 0.7%	1.05	5.6	2.6
Acciaio al cobalto Fe, Co 18.5%, Cr 3.75%, W 5%, C 0.75%	1.07	13	6
Alnico 2 Fe, Al 10%, Ni 19%, Co 13%, Cu 3%	0.75	45	14
Alnico 5 Fe, Al 8%, Ni 14%, Co 24%, Cu 3%	1.28	51	44
Alnico 9 Fe, Al 7%, Ni 15%, Co 35%, Cu 4%, Ti 5%	1.05	120	72
Ferrite di Bario BaO. 6Fe ₂ O ₃	0.43	170	36
Ferrite di Stronzio SrO. 6Fe ₂ O ₃	0.42	250	36
Samario - Cobalto SmCo ₅	0.87	640	144
Samario - Cobalto Sm(Co _{0.68} Cu _{0.10} Fe _{0.21} Zr _{0.01}) _{7.4}	1.10	510	240
Neodimio - Ferro - Boro Nd ₂ Fe ₁₄ B	1.23	880	290
Lodex 32 Pb, Fe 19.2%, Co 10.8%, Sb 7.6%	0.74	75	28
Cunife Cu, Ni 20%, Fe 20%	0.54	44	12
Vicalloy Co, Fe 38%, V 10%	0.84	19	7
Chromindur II Fe, Cr 28%, Co 10.5%	0.98	30	16
Fe - Co - Cr Fe, Cr 23%, Co 15%, V 3%, Ti 2%	1.35	44	44
Platino - Cobalto Pt, Co 23%	0.65	360	73
Manganese - Alluminio Mn, Al 29.5%, C 0.5%	0.56	180	44

Alnico. Gli Alnico (Fe - Al - Ni - Co - Cu) sono divisi in due sottogruppi: gli alnico isotropi (1-4) che contengono fino al 20% di cobalto e gli alnico anisotropi (5-9) che contengono dal 20% al 40% di cobalto. L'anisotropia viene ottenuta per raffreddamento controllato del materiale fuso in presenza di un campo magnetico esterno. I provini sono successivamente ricotti a 600° per alcune ore per aumentare le dimensioni dei domini di Weiss. Questi materiali hanno un elevato prodotto $|B H|_{\max}$ (40÷70 kJ/m³), una elevata induzione residua (0.7÷1.35 T) e modesto campo coercitivo (40÷160 kA/m). Gli Alnico sono fragili e quindi sono solitamente prodotti per fusione o sinterizzazione. L'Alnico 5 è il materiale più diffuso di questa famiglia.

Ferriti. Le ferriti (dure) sono ossidi metallici sinterizzati (facilmente lavorabili) con la formula generale XFe₁₂O₁₉ dove X è solitamente Ba o Sr. A differenza degli Alnico, le ferriti hanno elevato campo coercitivo (200÷300 kA/m) ma bassa induzione residua (0.4÷0.5 T). Le ferriti di stronzio sono meno diffuse delle ferriti di bario a causa del loro costo più elevato, anche se il loro campo coercitivo è circa doppio. Le ferriti sono prodotte spesso in forma legata elastica o rigida (il legante è solitamente plastica o gomma). Le ferriti legate mostrano una notevole uniformità nelle proprietà magnetiche (importante per la produzione di serie) ed hanno il notevole vantaggio di non essere fra-

gili. Lo svantaggio fondamentale è che le proprietà magnetiche peggiorano notevolmente rispetto alle ferriti non legate (il prodotto $|B H|_{\max}$ si riduce del 50%).

Terre rare. I magneti permanenti contenenti samario sono diventati commercialmente disponibili negli anni 70. I magneti SmCo_5 (a fase singola) hanno ottenuto in laboratorio ottime prestazioni ($B_r = 1\text{T}$, $H_c = 3200\text{ kA/m}$, $|B H|_{\max} = 200\text{ kJ/m}^3$), ma le prestazioni commerciali sono leggermente più basse ($|B H|_{\max} = 130\div 160\text{ kJ/m}^3$). I magneti $\text{Sm}_2(\text{Co, Fe, Cu, Zr})_{17}$ (multifase) hanno prestazioni commerciali anche migliori ($B_r = 1.1\text{T}$, $H_c = 520\text{ kA/m}$, $|B H|_{\max} = 240\text{ kJ/m}^3$). In laboratorio, aumentando il tenore di zirconio, si è ottenuto anche $H_c = 2100\text{ kA/m}$, $|B H|_{\max} = 264\text{ kJ/m}^3$. Questi magneti sono prodotti con la tecnologia ceramica per sinterizzazione, ma anche in forma cristallina e mescolati a leganti plastici per migliorare le caratteristiche meccaniche. I magneti permanenti contenenti neodimio sono diventati commercialmente disponibili nel 1983. I magneti $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ (a fase singola) hanno ottenuto in laboratorio valori record del prodotto $|B H|_{\max} = 405\text{ kJ/m}^3$, ma le prestazioni commerciali sono leggermente più basse ($|B H|_{\max} = 160\div 300\text{ kJ/m}^3$). Eccetto che per la temperatura di Curie relativamente bassa (312°C), i magneti Nd - Fe - B sono decisamente superiori a tutti gli altri materiali magnetici duri disponibili attualmente.

Esistono altri materiali magnetici, per impieghi particolari. Ad esempio gli acciai magnetici (pesime proprietà magnetiche, ottime proprietà meccaniche), le leghe Fe - Cr - Co (simili agli Alnico, ma più duttili per il ridotto contenuto di cobalto), le leghe Cu - Ni - Fe (modeste proprietà magnetiche, ma ottima lavorabilità meccanica a freddo), le leghe V - Co - Fe (modeste proprietà magnetiche, ma laminabili fino a spessori di 0.05mm).

I magneti permanenti sono principalmente utilizzati per motori ed altoparlanti. La figura 7 mostra il progresso avvenuto in questo secolo nel campo dei materiali magnetici. Per definire le proprietà dei magneti si utilizza solitamente il prodotto $|B H|_{\max}$. In particolare è evidente la crescita spettacolare avvenuta negli anni 70 nel campo dei sinterizzati comprendenti terre rare. La figura 8 mostra le curve di demagnetizzazione per alcuni materiali ferromagnetici duri.

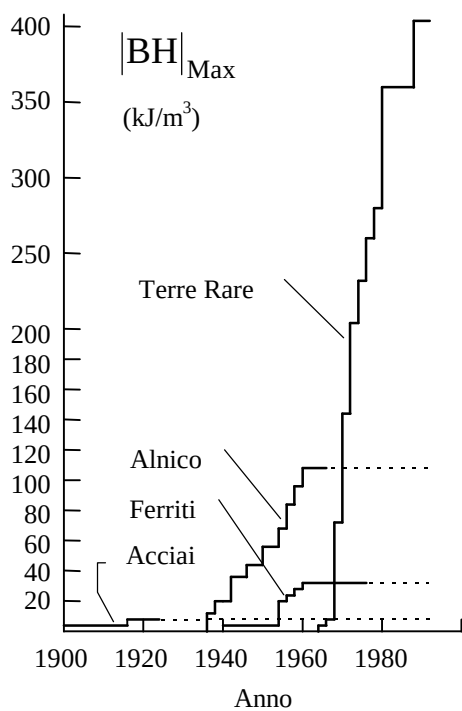


Figura 7.

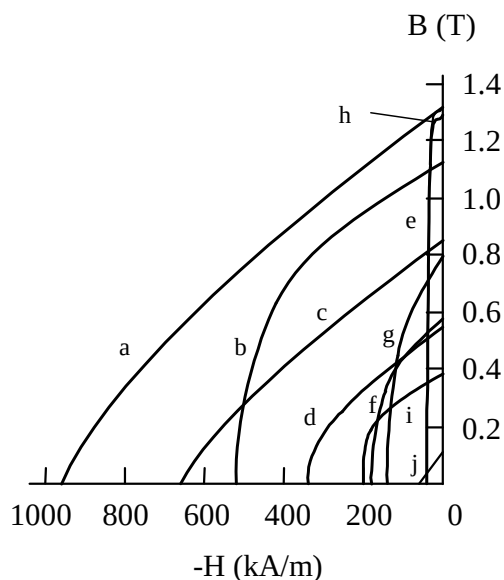


Figura 8. - Curve di demagnetizzazione per materiali ferromagnetici duri: a) $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$, b) $\text{Sm}(\text{Co, Cu, Fe, Zr})_{7.4}$, c) SmCo_5 , d) SmCo_5 legato, e) Alnico 5, f) Mn - Al - C, g) Alnico 9, h) Cr - Co - Fe, i) ferrite, j) ferrite legata.

3. CIRCUITI MAGNETICI

La determinazione di un campo magnetico richiede, in generale, la soluzione delle equazioni di Maxwell insieme alle relazioni di legame materiale per i materiali presenti. Il problema quindi coinvolge i vettori $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$ e gli operatori che compaiono sono spaziali e temporali. Dato che nella pratica la soluzione esatta spesso non è ottenibile, si sono studiate alcune semplificazioni al fine di ottenere soluzioni approssimate ma utili dal punto di vista ingegneristico. Pertanto **l'analisi del campo tridimensionale è ridotta all'analisi di un circuito equivalente**, che fornisce una soluzione accettabile nella maggior parte dei casi. L'ipotesi semplificativa introdotta è la conoscenza, a priori, della geometria del **circuito magnetico**, cioè del tubo di flusso del campo di induzione $\mathbf{B}$. Infatti, **un circuito magnetico, è una struttura composta per la maggior parte da materiale ad elevata permeabilità magnetica** che si suppone, per il momento, lineare. La presenza di materiale ad elevata permeabilità magnetica confina il flusso magnetico all'interno della struttura nello stesso modo in cui i materiali ad elevata conducibilità elettrica confinano la densità di corrente nei circuiti elettrici.

Si consideri il circuito magnetico semplice rappresentato nella figura 9. Si supponga che il materiale che compone il circuito abbia permeabilità molto maggiore di quella dell'aria circostante ($\mu \gg \mu_0$). La sezione S del materiale sia uniforme. L'eccitazione sia fornita da un avvolgimento formato da N spire percorse dalla corrente i . A causa della permeabilità elevata è possibile supporre che il campo di induzione magnetica sia confinato quasi interamente nel materiale.

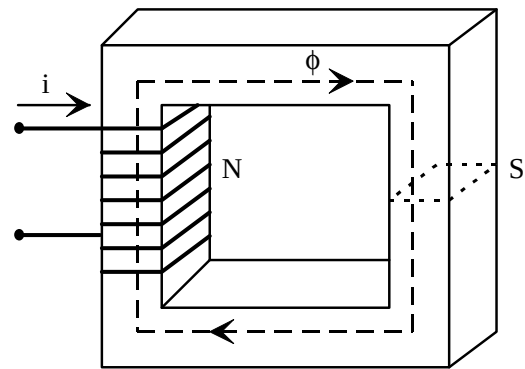


Figura 9.

Il *flusso magnetico* ϕ attraverso una superficie S è definito da: $\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$

Grazie alla solenoidalità di $\mathbf{B}$ e alla supposizione fatta sopra, il flusso magnetico ϕ sarà costante attraverso una qualsiasi sezione normale del materiale. Dato che la sezione è costante (escludendo i vertici) sarà lecito assumere che $\mathbf{B}$ sia uniforme sulla sezione. Questo porta ad una semplice relazione tra flusso magnetico ϕ e modulo dell'induzione magnetica B :

$$\phi = B \cdot S$$

Si definisce ora la *forza magnetomotrice* (f.m.m.) relativa ad una qualsiasi linea chiusa C concatenata con le N spire di eccitazione che passi all'interno del materiale magnetico come la corrente totale che si concatena con tale linea: $F = N i$.

Si ha quindi per la legge di Ampere: $F = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$

È possibile collegare la f.m.m. al flusso magnetico. Dalla definizione:

$$F = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \frac{\mathbf{B}}{\mu} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C (BS) \frac{d\mathbf{l}}{\mu S} = \oint_C \phi \frac{d\mathbf{l}}{\mu S} = \phi \oint_C \frac{d\mathbf{l}}{\mu S} = \mathcal{R} \phi \quad (3.1)$$

La relazione lineare tra f.m.m. e flusso magnetico appena ottenuta ($F = \mathcal{R} \phi$) è detta **Legge di Hopkinson** e rappresenta l'analogo della legge di Ohm ($V = RI$) per i circuiti magnetici. La supposizione che il campo di induzione magnetica sia confinato quasi interamente nel materiale permette di

effettuare tutti i passaggi eccetto il primo per cui si è considerata l'equazione di legame materiale lineare $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. La grandezza $\mathcal{R}$ che compare è detta *riluttanza* del circuito ed è definita da:

$$\mathcal{R} = \oint_c \frac{dl}{\mu S} \quad (3.2)$$

Nel caso di figura, in cui la sezione S è uniforme e la permeabilità μ è costante, la riluttanza si può scrivere:

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S}$$

dove l rappresenta la lunghezza della linea di flusso media nel materiale magnetico.

Si consideri ora il circuito magnetico rappresentato nella figura 10 in cui è stato introdotto un traferro. **Se la dimensione δ del traferro è piccola rispetto alle dimensioni della sezione normale, è possibile trascurare gli effetti di bordo.** In questo modo si trascura l'allargamento delle linee di campo ed è possibile considerare il flusso ϕ continuo anche attraverso il traferro.

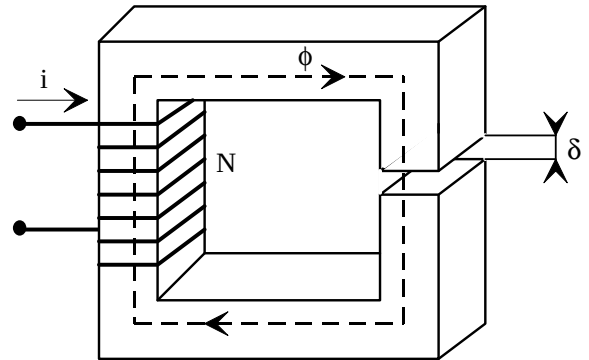


Figura 10.

Solitamente gli effetti di bordo vengono trascurati. Qualora però se ne voglia tenere conto, è possibile introdurre una sezione trasversale del traferro S_0 , aumentata rispetto ad S . Un semplice modo per ottenere S_0 è aggiungere ad S un orlo di spessore pari al traferro. Come si può notare dalla figura 11, oltre questa distanza le linee di campo sono molto deformate. Il campo di induzione nel traferro non è certamente uniforme, tuttavia si farà riferimento al valore medio B_0 del campo in aria come se il campo di induzione fosse uniforme sulla sezione S_0 .

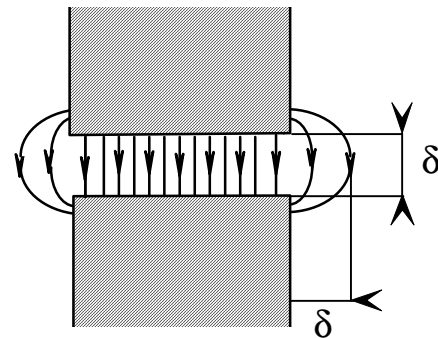


Figura 11.

Si intende ora calcolare la riluttanza associata al circuito rappresentato nella figura 10. Dalla eq.(3.2):

$$\mathcal{R} = \oint_c \frac{dl}{\mu S} = \int_{\text{materiale magnetico}} \frac{dl}{\mu S} + \int_{\text{traferro}} \frac{dl}{\mu S} = \frac{l_f}{\mu S} + \frac{\delta}{\mu_0 S_0} = \mathcal{R}_f + \mathcal{R}_0$$

La legge di Hopkinson fornisce quindi: $F = (\mathcal{R}_f + \mathcal{R}_0) \phi$

Risolvendo questa equazione per il flusso si ottiene quindi: $\phi = \frac{F}{\mathcal{R}_f + \mathcal{R}_0}$

ANALOGIA TRA CIRCUITI MAGNETICI E CIRCUITI ELETTRICI

Si considerino i sistemi risolutivi per l'elettrodinamica stazionaria (a sinistra) e per la magnetostatica (a destra).

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Poiché i problemi sono impostati in maniera matematicamente equivalente, si possono definire le seguenti equivalenze:

$$\mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{H}$$

$$\mathbf{J} \Leftrightarrow \mathbf{B}$$

$$\sigma \Leftrightarrow \mu$$

Le variabili a sinistra sono riferite ai circuiti elettrici, quelle a destra ai circuiti magnetici. Questa equivalenza è particolarmente utile per definire ed analizzare i circuiti magnetici.

È definibile un potenziale elettrico scalare v , da cui calcolare il campo $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} = -\nabla v$$

È possibile introdurre una forza elettromotrice esterna V (*fem*) utilizzando una batteria o un generatore di tensione.

$\mathbf{J}$ è solenoidale. I tubi di flusso di $\mathbf{J}$ definiscono il circuito elettrico. La corrente I in ogni tubo di flusso è definita da:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS$$

Per ciascun nodo del circuito elettrico si ha (Legge di Kirchhoff delle Correnti):

$$\sum_k I_k = 0$$

La resistenza di un tratto di tubo di flusso di lunghezza l in cui la sezione S è uniforme e la conducibilità σ è costante è definita da:

$$R = \frac{l}{\sigma S}$$

Per resistenze in serie ed in parallelo si possono definire le resistenze equivalenti:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

Esempio:

È definibile un potenziale magnetico scalare ψ , da cui calcolare il campo $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = -\nabla \psi$$

È possibile introdurre una forza magnetomotrice esterna F (*fmm*) utilizzando un magnete permanente o un elettromagnete.

$\mathbf{B}$ è solenoidale. I tubi di flusso di $\mathbf{B}$ definiscono il circuito magnetico. Il flusso ϕ in ogni tubo di flusso è definito da:

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$$

Per ciascun nodo del circuito magnetico si ha:

$$\sum_k \phi_k = 0$$

La riluttanza di un tratto di tubo di flusso di lunghezza l in cui la sezione S è uniforme e la permeabilità μ è costante è definita da:

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S}$$

Per riluttanze in serie ed in parallelo si possono definire le riluttanze equivalenti:

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \dots + \mathcal{R}_n$$

$$\frac{1}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} + \dots + \frac{1}{\mathcal{R}_n}$$

Esempio:

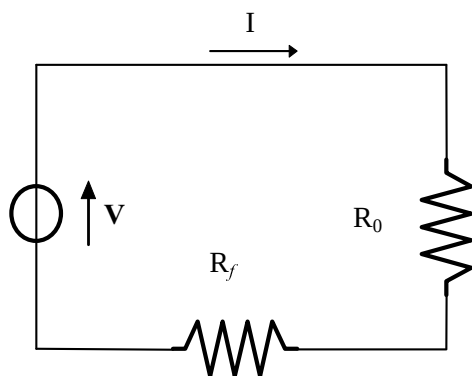


Figura 12.a.

Assumendo che la conducibilità delle connessioni nel circuito sia infinita, la sola resistenza al passaggio della corrente la oppone R_0 . Vale la Legge di Ohm:

$$V = R_0 I$$

Per ciascuna maglia del circuito elettrico si ha (Legge di Kirchhoff delle Tensioni):

$$\sum_k V_k = \sum_k R_k I_k$$

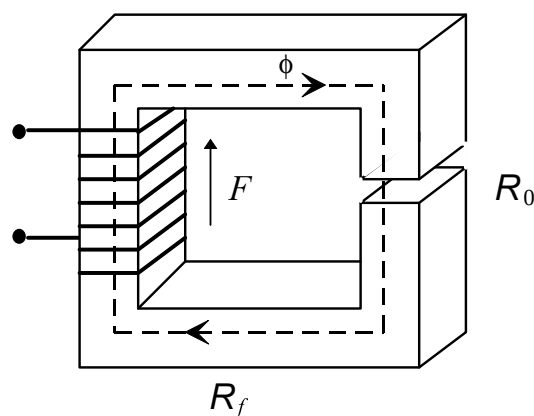


Figura 12.b.

Assumendo che la permeabilità del ferro nel circuito sia infinita, la sola resistenza al passaggio del flusso magnetico la oppone $\mathcal{R}_0$. Vale la Legge di Hopkinson:

$$F = \mathcal{R}_0 \Phi$$

Per ciascuna maglia del circuito magnetico si ha:

$$\sum_j F_j = \sum_j \mathcal{R}_j \Phi_j$$

Questa analogia tra le soluzioni di circuiti elettrici e magnetici può essere portata avanti per ottenere soluzioni semplici per i flussi magnetici in configurazioni anche molto complesse, purché sia sempre possibile individuare a priori i tubi di flusso di $\mathbf{B}$. **Valgono infatti per i circuiti magnetici leggi analoghe alle leggi di Kirchhoff, purché sia possibile individuare senza ambiguità nodi, rami e maglie.** In generale quindi, definite la geometria e le caratteristiche del circuito magnetico, si introduce il circuito elettrico equivalente dalla cui risoluzione si deducono, grazie all'analogia, le grandezze di interesse per il circuito magnetico. **La soluzione così ottenuta risente delle due ipotesi fatte: 1) trascurare i flussi dispersi; 2) considerare tutti i materiali lineari.** Mentre l'ipotesi (1) non comporta grossi errori, l'ipotesi (2) è da ritenersi valida solo come prima approssimazione. In realtà l'impiego nei circuiti magnetici dei materiali ferromagnetici comporta di dovere tenere in conto in modo adeguato delle loro complesse caratteristiche.

CIRCUITI MAGNETICI NON LINEARI

È possibile estendere al caso non lineare la teoria dei circuiti magnetici: come si è visto la curva di prima magnetizzazione non è reversibile, tuttavia generalmente quando si ha a che fare con materiali magneticamente dolci, si può fare riferimento ad essa nel ruolo di curva su cui si appiattisce il ciclo di isteresi e dotata dei caratteri di univocità e reversibilità richiesti dai problemi in esame. Questo è possibile poiché i materiali ferromagnetici dolci sono caratterizzati da cicli di isteresi molto stretti ed allungati. Spesso in luogo della curva di prima magnetizzazione si fa riferimento alla curva di magnetizzazione normale definita come luogo dei vertici dei cicli di isteresi simmetrici. Tale curva si discosta poco dalla caratteristica di prima magnetizzazione e può essere utilizzata in sostituzione di questa.

Si consideri nuovamente il circuito magnetico di figura 10, in cui si voglia tenere conto della non linearità del materiale. Sia assegnata dunque la caratteristica B-H del materiale nella forma $H=H(B)$. Si mantenga invece l'ipotesi di assenza di flussi dispersi che consente di definire a priori il tubo di flusso di $\mathbf{B}$. È necessario dunque individuare la funzione (che si chiamerà caratteristica del circuito magnetico) che lega il flusso ϕ che attraversa una qualsiasi sezione trasversale del tubo alla forza magnetomotrice $F=NI$ generata dall'avvolgimento di eccitazione.

La determinazione della caratteristica del circuito magnetico è assai semplice nel caso in cui il nucleo sia omogeneo, la sezione costante e il traferro di piccolo spessore. Si ottiene infatti dalla eq.(3.1):

$$\begin{aligned} NI = F &= \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\text{materiale magnetico}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\text{traferro}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_f l_f + H_0 \delta = \\ &= H(B_f) l_f + \frac{B_0}{\mu_0} \delta = H\left(\frac{\phi}{S}\right) l_f + \frac{\phi}{\mu_0 S_0} \delta = \psi_f(\phi) + \mathcal{R}_0 \phi \end{aligned}$$

Questa relazione lega le Amperspire di eccitazione con una funzione non lineare del flusso ϕ . La tensione magnetica nel materiale $\psi(\phi)$ è facilmente ottenibile dalla caratteristica $H(B)$ che viene assegnata solitamente tramite un grafico sperimentale.

In generale, per un circuito magnetico composto da più tratti in serie senza dispersione la forma generale della caratteristica è:

$$F = \sum_i \psi_i(\phi)$$

in cui ogni termine della somma è dato dalla tensione magnetica ψ_i desunta dalla caratteristica magnetica relativa al tratto considerato. È evidente dunque che ci sono due classi fondamentali di problemi relativi ai circuiti magnetici:

1. Assegnato il flusso ϕ , determinare la forza magnetomotrice F ;
2. Assegnata la forza magnetomotrice F , determinare il flusso ϕ .

Mentre la prima classe di problemi è molto semplice da risolvere, una volta scritta la caratteristica del circuito, la seconda classe di problemi richiede un approccio grafico e iterativo. Volendo definire un circuito elettrico equivalente anche in questo caso si ottengono dunque resistori non lineari.

È possibile anche tenere conto dei **flussi dispersi**. L'errore che si commette trascurando la dispersione magnetica nei circuiti magnetici di forma e dimensioni usuali non è in generale tale da imporre vistose correzioni, ma quando queste sono necessarie il loro calcolo è complicato e laborioso. Del resto la modestia degli errori da correggere è tale da rendere valido il ricorso a drastiche semplificazioni, per non dovere risolvere il problema del calcolo del campo tramite soluzione numerica (solitamente complicato dalla presenza dei materiali non lineari).

Si consideri il consueto circuito semplice, mostrato in figura 13, con un avvolgimento di eccitazione e un traferro. Sia assegnata la caratteristica di magnetizzazione. Il nucleo convoglia la maggior parte del flusso in un traferro, e sull'area S dell'una e dell'altra delle due superfici del traferro si suppone debba stabilirsi il flusso ϕ . Si è già visto che a causa della dispersione il nucleo non costituisce un tubo di flusso per $\mathbf{B}$. Il flusso di $\mathbf{B}$ varia infatti con continuità da sezione a sezione, variando a causa del flusso che attraversa la superficie laterale.

Risulta in questo caso opportuna la suddivisione del circuito magnetico in tratti interessati dallo stesso flusso. La caratteristica del circuito sarà data quindi da:

$$F = \sum_i \psi_i(\phi_i)$$

dove ϕ_i è il valore del flusso nel tratto considerato. Posto genericamente $\phi_i = \sigma_i \phi$ si ha:

$$F = \sum_i \psi_i(\sigma_i \phi)$$

L'unica differenza formale tra questa espressione e quella ottenuta trascurando i flussi dispersi riguarda la presenza dei coefficienti σ_i , in generale maggiori di uno e diversi da tratto a tratto. La difficoltà nel calcolo dei coefficienti σ_i risiede nella complessa geometria del campo magnetico esterno al nucleo.

Si è visto dunque come, fissata la geometria ed i materiali, sia possibile trovare una relazione tra la f.m.m. F ed il flusso ϕ . Da questa è sempre possibile ottenere una relazione tra la corrente i ed il flusso concatenato con il circuito di eccitazione φ :

$$i = i(\varphi)$$

Tale relazione è in generale non - lineare e non - biunivoca. Inoltre, se la geometria del sistema può essere variata, questa relazione dipende anche dai gradi di libertà del sistema ($\mathbf{x}$):

$$i = i(\varphi, \mathbf{x})$$

CIRCUITI MAGNETICI CON MAGNETI PERMANENTI

Esiste una classe di circuiti magnetici in cui la f.m.m. è nulla. In tal caso il flusso di induzione è prodotto da un magnete permanente (cioè un ferromagnete "duro"). Si consideri ad esempio la semplice struttura di figura 14. Il magnete propriamente detto (indicato con M) è di forma parallelepipedica con area di base S_m e lunghezza l_m ; il restante nucleo magnetico ha sezione S_p e lunghezza l_p ; i due traferri sono di sezione S_0 e spessore complessivo δ . Il nucleo sia costituito di materiale magnetico "dolce". Per la legge della circuitazione, in assenza di correnti, si ha:

$$H_m l_m + H_p l_p + H_0 \delta = 0$$

Per la solenoidalità di $\mathbf{B}$, trascurando le dispersioni, si può scrivere:

$$\phi = B_m S_m = \mu_p H_p S_p = \mu_0 H_0 S_0$$

dove ϕ è il flusso del circuito magnetico e μ_p la permeabilità magnetica delle espansioni polari. Poiché si ha $\mu_p \gg \mu_0$, la caduta di tensione magnetica nel materiale magnetico delle espansioni polari risulta trascurabile.

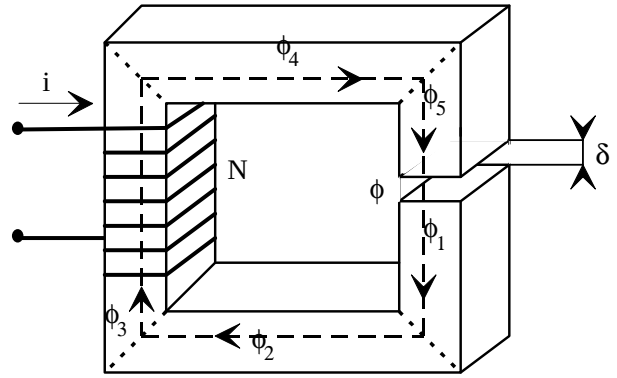


Figura 13. - Suddivisione del circuito magnetico in tratti interessati dallo stesso flusso

Si ha dunque:

$$\begin{cases} H_m = -\frac{\delta}{l_m} H_0 \\ B_m = \mu_0 \frac{S_0}{S_m} H_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{B_m}{H_m} = -\mu_0 \frac{S_0}{S_m} \cdot \frac{l_m}{\delta} \quad (3.6)$$

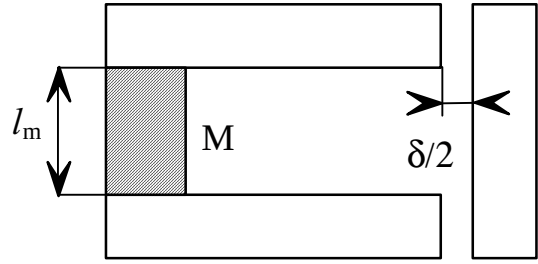


Figura 14.

Sul piano (B, H) la relazione (3.6) individua una retta per l'origine. Il segno meno indica che a valori positivi di B corrispondono valori negativi di H. Quindi all'interno del magnete **H** e **B** hanno versi opposti. L'intersezione tra la retta di carico e la caratteristica del magnete individua il punto di lavoro del magnete.

Si consideri ora il **problema del progetto del magnete**, cioè del suo dimensionamento allo scopo di ottenere in un dato traferro di sezione S_0 e spessore δ un valore assegnato dell'induzione magnetica B_0 . Dalle equazioni (3.6) si ricava:

$$|B_m H_m| V_m = |B_0 H_0| V_0 \quad (3.7)$$

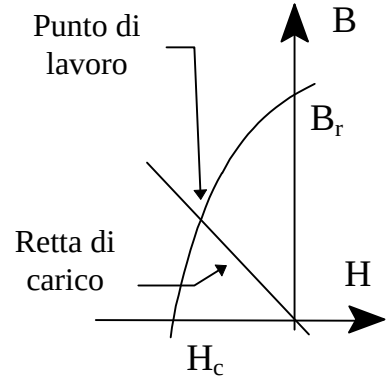


Figura 15. Caratteristica magnetica e retta di carico

dove con V_m e V_0 si indicano i volumi, rispettivamente, del magnete e del traferro. Si vede allora che, essendo assegnata la quantità a secondo membro, il volume del magnete risulta minimo quando il punto di lavoro del magnete coincide con quello che sulla caratteristica di magnetizzazione offre il massimo valore del prodotto $|B_m H_m|$; si realizza così la massima economia di materiale nella costruzione del magnete. Nel caso in cui non sia disponibile la caratteristica magnetica del materiale, è possibile utilizzare la seguente proprietà. Per i materiali ferromagnetici "duri" lo stato (H_m^* , B_m^*) nel quale è massimo il prodotto $|B_m H_m|$ è anche caratterizzato dalla seguente relazione:

$$\frac{B_m^*}{|H_m^*|} \cong \frac{B_r}{|H_c|} \quad (3.8)$$

È possibile quindi ricavare le formule di dimensionamento del magnete dalla (3.6) e dalla (3.7):

$$\frac{l_m / \delta}{S_m / S_0} \cong \frac{B_r}{|\mu_0 H_c|}, \quad \frac{S_m}{S_0} \frac{l_m}{\delta} \cong \frac{\mu_0 H_0^2}{|B_m H_m|_{\max}} \quad (3.9)$$

che risolte forniscono:

$$\frac{l_m}{\delta} \cong H_0 \sqrt{\frac{B_r}{|H_c| \cdot |B_m H_m|_{\max}}}, \quad \frac{S_m}{S_0} \cong \mu_0 H_0 \sqrt{\frac{|H_c|}{B_r \cdot |B_m H_m|_{\max}}} \quad (3.10)$$

Da esse risulta che i fattori numerici determinanti per stabilire l'attitudine di un materiale a fungere da magnete permanente sono $|B_m H_m|_{\max}$ e $|B_r / H_c|$.

4. COEFFICIENTI DI AUTO E MUTUA INDUZIONE

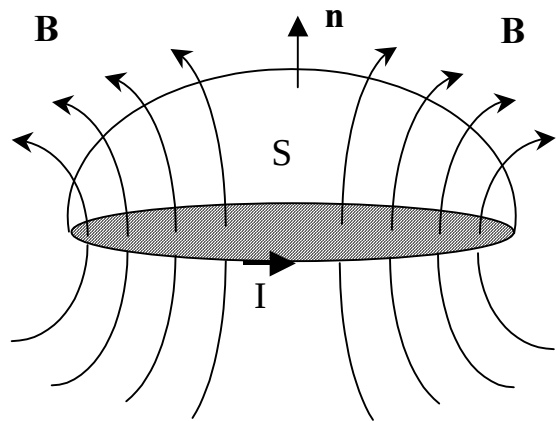
In assenza di altre sorgenti, si può immaginare il campo di induzione $\mathbf{B}$ dovuto a una corrente I , che si suppone, per semplicità, circolante in un conduttore filiforme. In un mezzo lineare, omogeneo e isotropo (quale ad esempio il vuoto), il campo di induzione è, inoltre, proporzionale alla corrente. Sia il campo di corrente nel conduttore che quello di induzione magnetica sono solenoidali: le rispettive linee di flusso dovranno, pertanto, essere chiuse e **concatenate** le une con le altre. In particolare, esiste una relazione di proporzionalità fra la corrente I ed il flusso di induzione concatenato con la linea che rappresenta il circuito entro il quale circola la corrente (vedi figura):

$$\Phi = L I \quad [4.1]$$

Il coefficiente di proporzionalità L è noto come **coefficiente di autoinduzione** o, più semplicemente, **autoinduttanza** del circuito. Per le convenzioni assunte, l'autoinduttanza L ha:

- segno intrinsecamente positivo e
- valore che dipende dalla geometria del circuito e dalle proprietà del mezzo; le sue dimensioni sono di "flusso diviso una corrente": nel SI è espresso da $\text{Wb/A} = \text{Henry [H]}$.

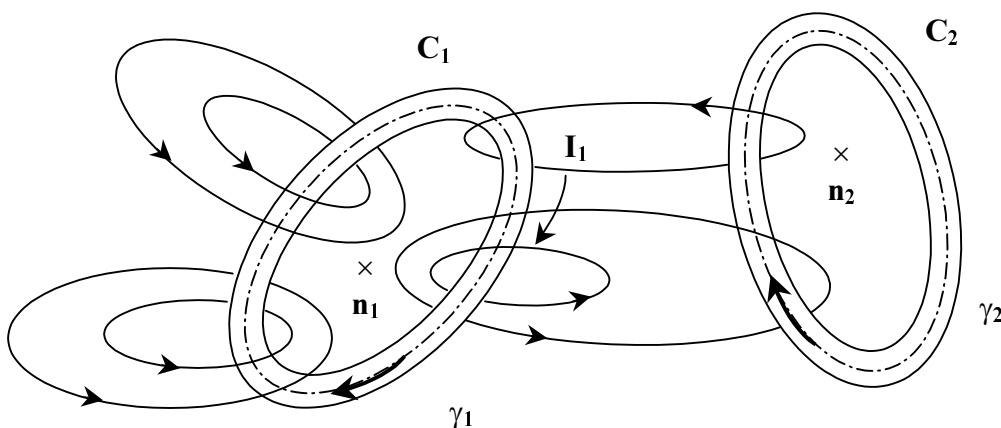
Nel caso in cui la corrente I circoli in un conduttore massiccio la definizione stessa dell'autoinduttanza risulta decisamente più complessa.



Sia dato ora un sistema costituito da due circuiti quasi filiformi indicati rispettivamente con C_1 e C_2 . Supponiamo che nel primo circoli una corrente I_1 (valutata in base a un verso di riferimento arbitrariamente prefissato) e che nel secondo invece non circoli corrente. Fissiamo arbitrariamente un verso positivo su γ_2 , asse di C_2 , e detta S_2 una qualunque superficie aperta che abbia tale linea come orlo, orientiamone la normale $\mathbf{n}_2$ mediante la regola della mano destra. Vogliamo determinare il flusso del campo magnetico prodotto da I_1 concatenato con γ_2 . Ragionando come per il coefficiente di autoinduzione, risulta

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1 \quad [4.2]$$

dove Φ_{21} rappresenta il flusso, concatenato con γ_2 , prodotto da I_1 , e M_{21} un fattore di proporzionalità avente le dimensioni di un induttanza (e misurabile quindi come L , in Henry), denominato **coefficiente di mutua induzione** del primo circuito sul secondo.



M_{21} può essere maggiore o minore di zero a seconda dell'orientamento dei circuiti. Nella figura, ad esempio, l'andamento delle linee vettoriali di $\mathbf{B}$ prodotte da una corrente I_1 positiva, è tale che nei punti della superficie S_2 , $\mathbf{B}$ e $\mathbf{n}_2$ hanno verso contrario, per cui $\Phi_{21} < 0$. In questo caso il coefficiente di mutua induzione M_{21} è negativo. Se, ferma restando l'orientazione del primo circuito, si invertisse quella del secondo, e di conseguenza il verso positivo della normale a S_2 , il flusso Φ_{21} , prodotto dalla stessa corrente I_1 , risulterebbe positivo e tale sarebbe anche il coefficiente M_{21} .

Consideriamo ora una situazione simmetrica rispetto alla precedente, in cui cioè circoli corrente solo nel circuito C_2 . Ragionando come sopra si ottiene

$$\Phi_{12} = M_{12}I_2 \quad [4.3]$$

dove Φ_{12} rappresenta il flusso concatenato con C_1 prodotto da I_2 , e M_{12} è il coefficiente di mutua induzione del secondo circuito sul primo.

Si verifica che

$$M_{21} = M_{12} \quad [4.4]$$

Cosicché è lecito parlare di un unico coefficiente di mutua induzione M tra i due circuiti. Calcoliamo infatti il valore di M_{21} e M_{12} , supponendo nota la distribuzione di potenziale vettore prodotta nel primo caso da I_1 , e, nel secondo, da I_2 . Nel primo caso si ha:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau_1} \frac{\mathbf{J}}{r} d\tau = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\gamma_1} \frac{\mathbf{t}_1}{r} dl_1$$

dove γ_1 è la linea che costituisce l'asse longitudinale del primo circuito e $\mathbf{t}$ il versore della tangente a tale curva. Per definizione si ha

$$\Phi_{21} = \oint_{\gamma_2} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{t}_2 dl_2$$

dove γ_1 è l'asse del secondo circuito. Dalle precedenti si ha dunque

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\gamma_2} \left(\oint_{\gamma_1} \frac{\mathbf{t}_1}{r} dl_1 \right) \cdot \mathbf{t}_2 dl_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\gamma_2} \oint_{\gamma_1} \frac{\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2}{r} dl_1 dl_2 \quad [4.5]$$

Con un procedimento analogo si deduce

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\gamma_1} \left(\oint_{\gamma_2} \frac{\mathbf{t}_2}{r} dl_2 \right) \cdot \mathbf{t}_1 dl_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \frac{\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2}{r} dl_2 dl_1$$

per cui $M_{21} = M_{12} = M$. L'eguaglianza è stata dimostrata supponendo che i flussi siano proporzionali alle correnti: ove tale proporzionalità non sia verificata (come nel caso dei materiali ferromagnetici), il risultato non è più valido. Nei casi lineari invece la [4.5] (detta anche *integrale di Neumann*), costituisce un'utile via per il calcolo dei coefficienti di mutua induzione.

In generale il calcolo dei coefficienti di auto e mutua induzione può effettuarsi anche utilizzando le espressioni dell'energia magnetica.

Si dice che due circuiti orientati sono mutuamente accoppiati se per una corrente i_1 circolante nel primo si concatena con il secondo un flusso di induzione relativo al campo di induzione magnetica generato dalla corrente i_1 . Il flusso mutuamente concatenato è legato alla corrente che ha generato il campo di induzione attraverso il coefficiente di mutua induzione M , detto anche mutua induttanza, definito dalle relazioni seguenti, ciascuna valevole a seconda che si consideri l'azione sul circuito "2" della corrente i_1 o viceversa:

$$\Phi_{12} = M i_2$$

$$\Phi_{21} = M i_1$$

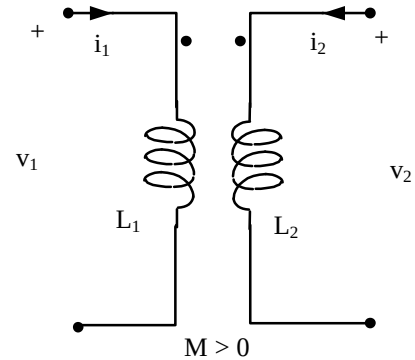
Se viene fatta variare la corrente che circola in uno dei due circuiti, la conseguente variazione del flusso di induzione mutuamente concatenato produrrà nell'altro circuito una f.e.m. indotta:

$$e_1(t) = -M \frac{di_2}{dt}$$

$$e_2(t) = -M \frac{di_1}{dt}$$

Contrariamente al coefficiente di autoinduzione L , l'induttanza mutua ha un segno che dipende dalla reciproca orientazione dei due circuiti accoppiati: *il segno di M è positivo se, per ognuno dei due circuiti, il flusso autoindotto ha lo stesso segno di quello mutuamente indotto.*

La rappresentazione del mutuo accoppiamento attraverso i normali simboli grafici (due induttanze affiancate) costringe ad adottare riferimenti supplementari che diano un senso preciso ad un assegnato segno del coefficiente di mutua induttanza M . come esemplificato in figura, i circoletti neri esprimono una orientazione supplementare delle due coppie di morsetti che tiene conto del senso di avvolgimento dei due circuiti, in guisa che *il segno della mutua induttanza M è quello indicato quando le due correnti sono positive rispetto alle orientazioni assunte.* Pertanto, il segno di M va invertito quando si inverte uno dei circoletti o l'orientazione di una delle correnti.



Supponendo $M > 0$ e i due circuiti entrambi alimentati, ciascuno dalla propria corrente, i_1 e i_2 , il flusso totale concatenato con ognuno di essi vale:

$$\Phi_{c,1} = L_1 i_1 + M i_2 \qquad \Phi_{c,2} = M i_1 + L_2 i_2 \qquad [4.6]$$

e le tensioni ai morsetti sono date da:

$$v_1 = \frac{d\Phi_{c,1}}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \qquad v_2 = \frac{d\Phi_{c,2}}{dt} = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \qquad [4.7]$$

Ad una variazione di_1 e di_2 delle due correnti corrisponde pertanto una variazione dell'energia magnetica associata ai due circuiti:

$$dW_m = i_1 d\Phi_{c,1} + i_2 d\Phi_{c,2} = L_1 i_1 di_1 + M i_1 di_2 + M i_2 di_1 + L_2 i_2 di_2$$

L'energia magnetica totale associata ai due circuiti sarà, pertanto:

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \qquad [4.8]$$

Si ottiene, infine, la condizione fra condizione fra i coefficienti di auto e mutua induzione:

$$W_m \geq 0 \quad \Rightarrow \quad M^2 \leq L_1 L_2$$

Il rapporto $K = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$, detto **fattore (o coefficiente) di accoppiamento** dei due circuiti, defini-

sce quindi il grado di accoppiamento di due induttori. In ogni caso è $0 \leq K \leq 1$. Il coefficiente di accoppiamento è nullo se $M = 0$. Ciò accade se e solo se la permeanza (l'inverso della riluttanza) del circuito del flusso principale è nulla, ossia se i due induttori sono posti a grande distanza l'uno dall'altro, ovvero se i loro assi sono disposti lungo direzioni perpendicolari: in entrambi i casi, infatti, è nullo il flusso che concatena entrambi gli induttori.

Il coefficiente di accoppiamento è uguale a uno se e solo se le induttanze di dispersione di entrambi gli avvolgimenti sono nulle, ossia se tutto il flusso che concatena uno dei due circuiti filiformi concatena anche l'altro; in tal caso si dice che l'accoppiamento tra i due circuiti è perfetto. In tal caso il calcolo dei coefficienti di auto e mutua induzione si può effettuare con riferimento al cir-

cuito magnetico individuato dal flusso ϕ che concatena entrambi gli avvolgimenti. Infatti, dati due circuiti orientati, di N_1 e N_2 spire, rispettivamente, perfettamente accoppiati, supponendo $M > 0$ e i due circuiti entrambi alimentati, ciascuno dalla propria corrente, i_1 e i_2 , il flusso totale concatenato con ognuno di essi vale:

$$\Phi_{c,1} = L_1 i_1 + M i_2 \quad \Phi_{c,2} = M i_1 + L_2 i_2$$

e pertanto:

$$L_1 = \left. \frac{\Phi_{c,1}}{i_1} \right|_{i_2=0} = \left. \frac{N_1 \phi}{i_1} \right|_{i_2=0} \quad M = \left. \frac{\Phi_{c,1}}{i_2} \right|_{i_1=0} = \left. \frac{N_1 \phi}{i_2} \right|_{i_1=0} \quad L_2 = \left. \frac{\Phi_{c,2}}{i_2} \right|_{i_1=0} = \left. \frac{N_2 \phi}{i_2} \right|_{i_1=0}$$

Dalla legge di Hopkinson applicata al circuito magnetico si ottiene peraltro:

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = \mathcal{R} \phi \quad [4.9]$$

e dunque risulta:

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} \quad M = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} \quad L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}}$$

Si noti che in tal caso le tensioni ai morsetti sono date da:

$$v_1 = \frac{N_1}{\mathcal{R}} \left(N_1 \frac{di_1}{dt} + N_2 \frac{di_2}{dt} \right) \quad v_2 = \frac{N_2}{\mathcal{R}} \left(N_1 \frac{di_1}{dt} + N_2 \frac{di_2}{dt} \right)$$

e dunque il loro rapporto dipende esclusivamente dal rapporto tra i numeri di spire: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2}$

Inoltre, se il circuito magnetico individuato dal flusso ϕ che concatena entrambi gli avvolgimenti si sviluppa attraverso un materiale ferromagnetico dolce (a causa della permeabilità molto elevata è possibile supporre che la riluttanza sia nulla) la [4.9] si semplifica:

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0$$

e dunque anche il rapporto fra le correnti dipende esclusivamente dal rapporto tra i numeri di spire:

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1}$$

CONSIDERAZIONI GENERALI SULL'ENERGIA MAGNETICA

L'**energia magnetica** o **energia magnetostatica** (indicata con simbolo W_m) esprime l'attitudine di un sistema di correnti elettriche stazionarie mutuamente interagenti a produrre, in opportune condizioni, lavoro elettrico e/o meccanico. La trasformazione dell'energia magnetica in lavoro elettrico avviene con processi che vedono associate alle correnti anche differenze di potenziale elettrico. La trasformazione in lavoro meccanico richiede invece che elementi sede di corrente si spostino relativamente ad altri. La produzione di lavoro comporta una diminuzione dell'energia del sistema che quindi passa da uno stato energetico più alto ad uno più basso, ciascuno dei quali è caratterizzato dai campi vettoriali della densità di corrente $\mathbf{J}$, del potenziale vettore magnetico $\mathbf{A}$ e dei campi $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$ ed anche delle permeabilità magnetiche dei mezzi in cui i campi si sviluppano.

Si attribuisce energia magnetica nulla allo stato di *neutralità magnetica completa*, nei quali i campi sopra menzionati sono nulli in ogni punto. Pertanto si può definire l'energia magnetica di un sistema di correnti come la sua attitudine a produrre lavoro, degradando contemporaneamente verso uno stato di neutralità completa. Viceversa, ogni sistema magnetostatico, costituito da una distribuzione di correnti mutuamente interagenti, può essere considerato come il risultato ("stato finale") di un processo di costruzione iniziato partendo da uno "stato iniziale" di neutralità magnetica completa. La costruzione del sistema richiede che venga fornito lavoro da forze di qualche natura, le quali agiscono contro altre forze contrastanti; tra queste ultime sono certamente presenti forze elettriche indotte (associate alle f.e.m. indotte), che insorgono fintanto che le correnti variano nel tempo.

Per mezzi non lineari, disomogenei, anisotropi, in assenza di magneti permanenti o di altri materiali con isteresi magnetica

$$W_m = \int_{\tau} \int_0^A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} \, d\tau$$

Per mezzi lineari

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\tau} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \, d\tau$$

Per un sistema di circuiti filiformi in mezzi lineari

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N i_k \Phi_{c,k}$$

Essendo $\mathbf{J} \cdot \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{A} = \text{div}(\mathbf{H} \times \mathbf{A}) + \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \text{div}(\mathbf{H} \times \mathbf{A}) + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$ con alcuni passaggi si ottiene, per i mezzi lineari:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{V_{\infty}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \, dV = \frac{1}{2} \int_{V_{\infty}} \mu_0 H^2 \, dV = \frac{1}{2} \int_{V_{\infty}} \frac{B^2}{\mu_0} \, dV$$

Per mezzi non lineari

(essendo τ la regione in cui $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$ non sono nulli)

$$W_m = \int_{\tau} \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \, d\tau$$

Tale definizione (valida per ogni regime elettrodinamico) suggerisce che l'energia sia distribuita nell'intero spazio, ove sono presenti i campi $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$. Si noti tuttavia che il campo di induzione, rispetto alle sue sorgenti, ha un andamento al più proporzionale ad $1/R^2$. La densità di energia magnetica $B^2/2\mu_0$ decresce quindi al più proporzionalmente ad $1/R^4$. Pertanto, forniscono un contributo significativo all'integrazione da cui si ricava l'energia magnetica solo le zone di spazio in cui il campo è "elevato" (cioè solitamente quelle "vicine" alla sorgente).

Ad esempio, si voglia calcolare l'energia magnetica immagazzinata in un solenoide di lunghezza l e sezione S nelle ipotesi: 1) solenoide lungo ($l^2 \gg S$), 2) conduttore filiforme, 3) spire uniformemente e strettamente serrate. In queste ipotesi il campo magnetico nel solenoide è circa uniforme e vale

$$H \cong NI/L$$

dove N è il numero di spire ed I la corrente che le percorre. Il campo magnetico all'esterno del solenoide è circa nullo (o meglio, è molto minore del valore che assume all'interno). È possibile quindi calcolare l'energia magnetica immagazzinata nel solenoide come

$$W_m \cong (H^2/2\mu_0)V = SN^2 I^2/2l\mu_0$$

Dove si è indicato con $V = Sl$ il volume del solenoide. Ricordando che è possibile scrivere l'autoinduttanza del solenoide come

$$L \cong \mu_0 SN^2 I/l = N^2/\mathcal{R}_0$$

dove $\mathcal{R}_0$ è la riluttanza in aria ($\mathcal{R}_0 = l/\mu_0 S$), l'energia magnetica immagazzinata assume dunque la forma

$$W_m = LI^2/2$$