

BILANCI ENERGETICI DEI SISTEMI ELETTROMAGNETICI

In figura 1 è rappresentato un generico sistema elettromagnetico racchiuso entro la superficie S . Esso può comprendere circuiti e/o componenti, corpi materiali, ecc. Durante una trasformazione infinitesima (molto lenta per potere trascurare le forze di inerzia e l'energia cinetica) si ipotizzano le seguenti forme di scambio di energia con l'esterno:

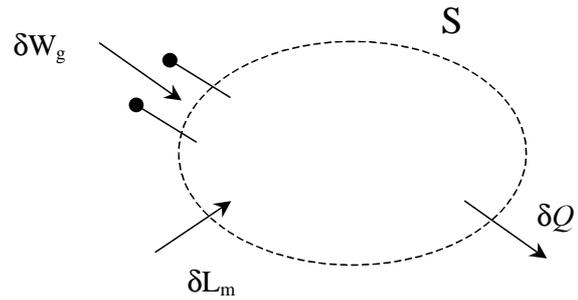


Figura 1.

- δL_g = lavoro fornito dai generatori elettrici al sistema attraverso coppie di morsetti che entrano in S . δL_g è espresso da

$$\delta L_g = \sum_{(m)} v_i dt$$

dove la sommatoria si intende estesa a tutte le coppie di morsetti.

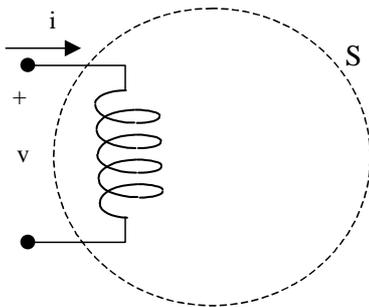


Figura 2.a.

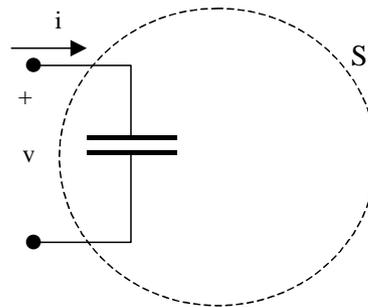


Figura 2.b.

Nel caso di "ingressi induttivi" (vedi figura 2.a) si ha:

$$v = \frac{d\Phi_c}{dt}$$

dove Φ_c è il flusso concatenato all'avvolgimento. Il lavoro fornito dai generatori elettrici al sistema diventa dunque:

$$\delta L_g = \sum_{(m)} i d\Phi_c$$

Nel caso di "ingressi capacitivi" (vedi figura 2.b) si ha:

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

dove Q è la carica sull'armatura positiva del condensatore. Il lavoro fornito dai generatori elettrici al sistema diventa dunque:

$$\delta L_g = \sum_{(m)} v dQ$$

Si noti che l'eventuale resistenza presente nel circuito non figura nella caratteristica del bipolo, in quanto si può considerare esterna al sistema. Tale esclusione non limita la validità del bilancio energetico sul sistema, in quanto ad esso è sempre possibile sommare, per il Principio di conservazione dell'energia, i bilanci sui sottosistemi esclusi, ottenendo così un bilancio più generale sul sistema completo.

- δL_m = energia fornita al sistema sotto forma di lavoro delle forze meccaniche esterne. Supponendo che le forze esterne siano concentrate, δL_m è espressa da

$$\delta L_m = \sum_{(a)} \bar{F} \cdot d\bar{s}$$

dove \bar{F} è la generica forza trasmessa dall'esterno al sistema attraverso il confine e $d\bar{s}$ lo spostamento del suo punto di applicazione.

3. δQ = calore ceduto dal sistema all'esterno. Esso deve intendersi coincidente con l'energia δE_d dissipata in qualunque forma durante la trasformazione all'interno di S, supponendo di mantenere invariato lo stato termodinamico del sistema stesso (in tal modo possiamo evitare di considerare le energie conservative di tipo termodinamico):

$$\delta Q = \delta E_d$$

In base alle ipotesi fatte, il **bilancio energetico** esteso al sistema interno ad S è dunque:

$$\delta L_g + \delta L_m = \delta E_d + dE_c \quad (1)$$

dove dE_c è l'incremento di energia conservativa immagazzinata nel sistema. A parole, il bilancio energetico si interpreta affermando che *"in una trasformazione infinitesima l'energia comunicata al sistema dall'esterno tramite il lavoro meccanico e quello elettrico, in parte si accumula in energia conservativa e in parte si dissipa"*.

Come prima applicazione del bilancio energetico (1), si può dimostrare l'esistenza di un'energia conservativa immagazzinata nei condensatori e negli induttori.

A tal fine si consideri il generico induttore lineare di induttanza L (costante), indicato in figura 2.a. Il sistema è costituito dal solo induttore e l'unico scambio di energia con l'esterno può avvenire sotto forma di lavoro elettrico attraverso i morsetti. Si consideri una trasformazione infinitesima durante la quale si suppone di vincolare l'induttore a rimanere fermo. Con tali ipotesi, anche ammesso che esistano forze esterne applicate al sistema, il lavoro meccanico risulta certamente nullo e, pertanto, il bilancio energetico (1) si scrive:

$$i d\Phi_c = \delta E_d + dE_c$$

Ricordando la proprietà fondamentale degli induttori ($\Phi_c = L i$), il primo membro si può scrivere:

$$i d\Phi_c = L i di = d(Li^2/2)$$

Si riconosce quindi che esso è un differenziale esatto e che pertanto, dovendo risultare tale anche il secondo membro, deve necessariamente annullarsi il termine dissipativo. Risulta quindi:

$$\delta E_d = 0$$

Si riconosce dunque l'esistenza di una energia conservativa (energia magnetostatica dell'indut-

A tal fine si consideri il generico condensatore lineare di capacità C (costante), indicato in figura 2.b. Il sistema è costituito dal solo condensatore e l'unico scambio di energia con l'esterno può avvenire sotto forma di lavoro elettrico attraverso i morsetti. Si consideri una trasformazione infinitesima durante la quale si suppone di vincolare il condensatore a rimanere fermo. Con tali ipotesi, anche ammesso che esistano forze esterne applicate al sistema, il lavoro meccanico risulta certamente nullo e, pertanto, il bilancio energetico (1) si scrive:

$$v dQ = \delta E_d + dE_c$$

Ricordando la proprietà fondamentale dei condensatori ($Q = C v$), il primo membro si può scrivere:

$$v dQ = C v dv = d(Cv^2/2)$$

Si riconosce quindi che esso è un differenziale esatto e che pertanto, dovendo risultare tale anche il secondo membro, deve necessariamente annullarsi il termine dissipativo. Risulta quindi:

$$\delta E_d = 0$$

Si riconosce dunque l'esistenza di una energia conservativa (energia elettrostatica del conden-

tore) in cui si converte tutto il lavoro elettrico fornito dall'esterno. L'espressione di tale energia si ottiene integrando il bilancio energetico da uno stato iniziale caratterizzato da $i = 0$ (cui si attribuisce valore nullo dell'energia magnetostatica) ad uno caratterizzato da un valore generico della corrente $i = I$. Si ha quindi:

$$E_m = LI^2/2$$

Tale energia può essere espressa anche nelle forme equivalenti:

$$E_m = \Phi_c I/2 = \Phi_c^2/2L$$

Riprendendo l'esame delle applicazioni del bilancio energetico generale (1), si intende ora determinare l'energia dissipata nei materiali non lineari isteretici.

Si consideri il circuito magnetico anulare costituito di materiale ferromagnetico, rappresentato nella figura 3.a. La sezione A del materiale sia uniforme. L'eccitazione sia fornita da un avvolgimento formato da N spire percorse dalla corrente i .

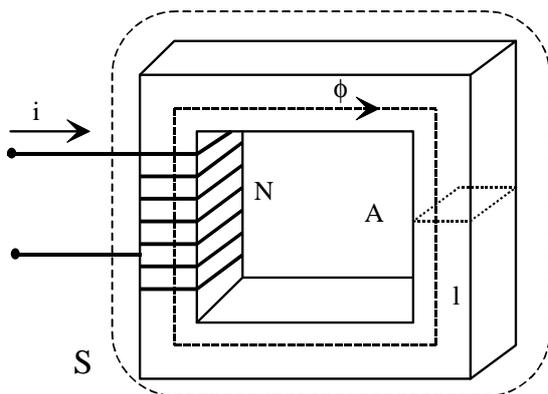


Figura 3.a.

Si applichi il bilancio energetico (1) al sistema contenuto all'interno della superficie chiusa S , nell'ipotesi di mantenere fermo il sistema e dopo avere riconosciuto che l'unico ingresso elettrico è di tipo induttivo. Per una trasformazione infinitesima si ha:

$$i d\Phi_c = \delta E_d + dE_c$$

Si supponga ora di agire opportunamente sull'alimentazione in modo da vincolare il sistema a compiere una trasformazione finita e ciclica, nella quale il materiale ferromagnetico descriva un ciclo di isteresi (vedi figura 4.a). Per ottenere il bilancio relativo alla trasformazione è sufficiente integrare sul ciclo il bilancio energetico

satore) in cui si converte tutto il lavoro elettrico fornito dall'esterno. L'espressione di tale energia si ottiene integrando il bilancio energetico da uno stato iniziale caratterizzato da $v = 0$ (cui si attribuisce valore nullo dell'energia elettrostatica) ad uno caratterizzato da un valore generico della tensione $v = V$. Si ha quindi:

$$E_e = CV^2/2$$

Tale energia può essere espressa anche nelle forme equivalenti:

$$E_e = Q V/2 = Q^2/2C$$

Si consideri il condensatore a facce piane parallele poste ad una distanza d , rappresentato nella figura 3.b. Il dielettrico tra le armature sia costituito da materiale ferroelettrico. La sezione A del materiale sia uniforme. L'eccitazione sia fornita da una coppia di morsetti alimentati alla tensione v .

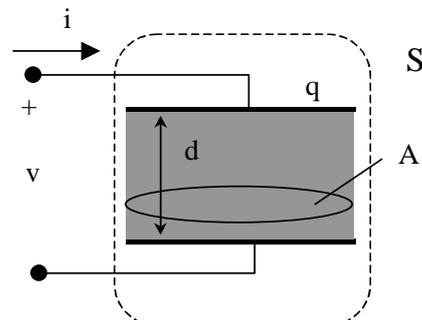


Figura 3.b.

Si applichi il bilancio energetico (1) al sistema contenuto all'interno della superficie chiusa S , nell'ipotesi di mantenere fermo il sistema e dopo avere riconosciuto che l'unico ingresso elettrico è di tipo capacitivo. Per una trasformazione infinitesima si ha:

$$v dQ = \delta E_d + dE_c$$

Si supponga ora di agire opportunamente sull'alimentazione in modo da vincolare il sistema a compiere una trasformazione finita e ciclica, nella quale il materiale ferroelettrico descriva un ciclo di isteresi (vedi figura 4.b). Per ottenere il bilancio relativo alla trasformazione è sufficiente integrare sul ciclo il bilancio energetico ele-

elementare:

$$\oint i \, d\Phi_c = \oint \delta E_d + \oint dE_c$$

Il secondo integrale a secondo membro è nullo, trattandosi dell'integrale su un ciclo di un differenziale esatto (l'energia conservativa E_c è una funzione di stato e quindi le sue variazioni non dipendono dal tipo di trasformazione, ma solo dagli stati iniziale e finale del sistema, che nel caso in esame coincidono), mentre il primo integrale rappresenta la somma di tutte le energie dissipate nelle trasformazioni elementari e quindi l'energia complessivamente dissipata. Si ha quindi:

$$E_d = \oint i \, d\Phi_c$$

Ricordando che (circuitazione magnetica)

$$H l = N i$$

e che il flusso dell'induzione magnetica concatenato è definito come

$$\Phi_c = N B A$$

si ottiene

$$\frac{E_d}{\tau} = \oint H \, dB$$

dove $\tau = l A$ è il volume del circuito magnetico. Pertanto, a parole, quest'ultima si interpreta affermando che "sul piano (H, B) l'area del ciclo di isteresi rappresenta l'energia dissipata per unità di volume nel materiale considerato".

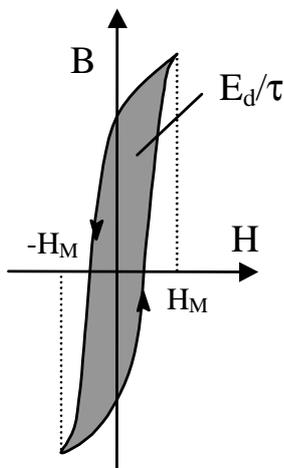


Figura 4.a - Ciclo di isteresi per materiali ferromagnetici.

mentare:

$$\oint v \, dQ = \oint \delta E_d + \oint dE_c$$

Il secondo integrale a secondo membro è nullo, trattandosi dell'integrale su un ciclo di un differenziale esatto (l'energia conservativa E_c è una funzione di stato e quindi le sue variazioni non dipendono dal tipo di trasformazione, ma solo dagli stati iniziale e finale del sistema, che nel caso in esame coincidono), mentre il primo integrale rappresenta la somma di tutte le energie dissipate nelle trasformazioni elementari e quindi l'energia complessivamente dissipata. Si ha quindi:

$$E_d = \oint v \, dQ$$

Ricordando che (legge di Gauss)

$$D A = Q$$

e che la tensione ai morsetti è legata al campo elettrico dalla relazione

$$v = E d$$

si ottiene

$$\frac{E_d}{\tau} = \oint E \, dD$$

dove $\tau = d A$ è il volume del dielettrico. Pertanto, a parole, quest'ultima si interpreta affermando che "sul piano (E, D) l'area del ciclo di isteresi rappresenta l'energia dissipata per unità di volume nel materiale considerato".

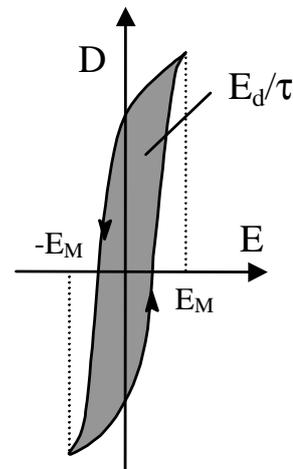


Figura 4.b - Ciclo di isteresi per materiali ferroelectrici.

Si intende ora calcolare energia fornita dai generatori elettrici al sistema per magnetizzare (polarizzare) un materiale magnetico (dielettrico).

Si consideri il circuito magnetico anulare, rappresentato nella figura 3.a. Essendo l'unico ingresso elettrico di tipo induttivo, per una trasformazione infinitesima si ha:

$$\delta L_g = i d\Phi_c$$

Ricordando che (circuitazione magnetica)

$$H l = N i$$

e che il flusso dell'induzione magnetica concatenato è definito come

$$\Phi_c = N B A$$

si ottiene

$$\delta L_g = \tau H dB$$

dove $\tau = l A$ è il volume del circuito magnetico. Nel caso più generale in cui il campo magnetico e quello di induzione non fossero paralleli in ogni punto ed avessero una dipendenza spaziale, il lavoro elementare si scriverebbe come:

$$\delta L_g = \int_{\tau} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} d\tau$$

Introducendo ora la magnetizzazione:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

e sostituendo, si ha:

$$\delta L_g = \tau \mu_0 \mathbf{H} d\mathbf{H} + \tau \mu_0 \mathbf{H} d\mathbf{M}$$

Il primo termine a secondo membro è esprimibile come un differenziale esatto (che rappresenta l'energia magnetica E_m), mentre il secondo termine rappresenta il lavoro necessario per aumentare di $d\mathbf{M}$ la magnetizzazione uniforme del materiale. Si introduce ora il momento di dipolo magnetico (amperiano) totale del sistema

$$\mathcal{M} = \tau \mathbf{M}$$

si ha quindi^(o):

$$\delta L_g = d(\tau \mu_0 H^2/2) + \mu_0 \mathbf{H} d\mathcal{M}$$

^(o) Nel caso più generale in cui la magnetizzazione avesse una dipendenza spaziale, il momento di dipolo del sistema sarebbe definito da:

$$\mathbf{M} = \int_{\tau} \mathbf{M} d\tau$$

Si consideri il condensatore piano, rappresentato nella figura 3.b. Essendo l'unico ingresso elettrico di tipo capacitivo, per una trasformazione infinitesima si ha:

$$\delta L_g = v dQ$$

Ricordando che (legge di Gauss)

$$D A = Q$$

e che la tensione ai morsetti è legata al campo elettrico dalla relazione

$$v = E d$$

si ottiene

$$\delta L_g = \tau E dD$$

dove $\tau = d A$ è il volume del dielettrico. Nel caso più generale in cui il campo elettrico e quello di spostamento non fossero paralleli in ogni punto ed avessero una dipendenza spaziale, il lavoro elementare si scriverebbe come:

$$\delta L_g = \int_{\tau} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} d\tau$$

Introducendo ora la polarizzazione:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

e sostituendo, si ha:

$$\delta L_g = \tau \epsilon_0 \mathbf{E} d\mathbf{E} + \tau \mathbf{E} d\mathbf{P}$$

Il primo termine a secondo membro è esprimibile come un differenziale esatto (che rappresenta l'energia elettrica E_e), mentre il secondo termine rappresenta il lavoro necessario per aumentare di $d\mathbf{P}$ la polarizzazione uniforme del materiale. Introducendo il momento di dipolo elettrico totale del sistema

$$\mathcal{P} = \tau \mathbf{P}$$

si ha quindi^(o):

$$\delta L_g = d(\tau \epsilon_0 E^2/2) + \mathbf{E} d\mathcal{P}$$

^(o) Nel caso più generale in cui la polarizzazione avesse una dipendenza spaziale, il momento di dipolo del sistema sarebbe definito da:

$$\mathbf{P} = \int_{\tau} \mathbf{P} d\tau$$

Fin qui l'equazione generale di bilancio energetico (1) è stata costantemente usata con l'ipotesi di mantenere fermo il sistema, che ha consentito di ritenere nullo il lavoro meccanico in ciascuno dei casi trattati. Volendo ora utilizzare il bilancio energetico al fine di determinare forze e coppie che si esercitano fra i componenti di un sistema elettromagnetico, e osservando che tali forze compaiono solo nel termine di lavoro meccanico, è evidente che il sistema (o parte di esso) deve essere considerato sede di opportuni spostamenti. Poiché, tuttavia, le forze che si desidera calcolare, esistono anche in assenza di spostamenti, è chiaro che gli spostamenti che è possibile attribuire al sistema (o a parte di esso) sono da considerarsi quasi totalmente arbitrari. Pertanto, tali spostamenti sono solitamente indicati col termine "*spostamenti virtuali*", intendendo dire con questo che l'unico requisito ad essi richiesto è quello di essere concettualmente realizzabili (ovvero fisicamente possibili). L'arbitrarietà dello spostamento virtuale è da intendersi non solo in senso geometrico, ma anche come possibilità di vincolare liberamente la trasformazione stessa. Si noti che, durante la trasformazione, il valore della forza passa da \bar{F} a $\bar{F} + d\bar{F}$, ove l'incremento $d\bar{F}$ dipende dal tipo di trasformazione. Tuttavia, quando si considera il lavoro, l'incremento $d\bar{F}$ fornisce un contributo infinitesimo di ordine superiore e quindi scompare l'influenza della trasformazione nel calcolo della forza. Si osservi inoltre che le forze che compaiono nel bilancio energetico (1) devono essere forze di "confine", ossia devono tradurre un'azione che, attraverso la superficie di confine S, viene esercitata dall'esterno verso l'interno del sistema. In generale quindi dovendosi calcolare una forza interna al sistema, si determinerà la sua equilibrante trasmessa dall'esterno.

Esempio 1: Forza elettrostatica tra le armature di un condensatore

Si intende calcolare la forza esercitata tra le armature di un condensatore piano (vedi figura 5) in direzione ortogonale alle armature stesse. Detta F_i tale forza interna al sistema, e fissato il suo verso positivo, si consideri la sua equilibrante F , esterna al sistema. Si supponga ora di mantenere ferma l'armatura connessa al morsetto positivo e di assegnare all'altra armatura uno spostamento virtuale dx , ove x indica la distanza fra le armature, valutata a partire dall'armatura fissa. L'equazione di bilancio energetico associata a tale spostamento è:

$$V dQ + F dx = dE_e$$

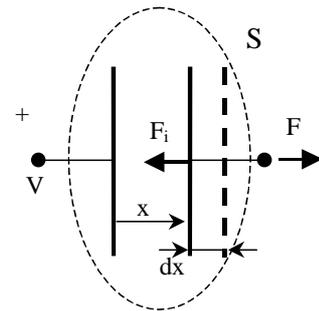


Figura 5.

dove, in base a quanto precedentemente osservato sull'energia elettrostatica, si è annullato il termine dissipativo e si è supposto inoltre infinitesimo di ordine superiore l'eventuale incremento di energia cinetica del sistema. Ricordando la proprietà fondamentale dei condensatori ($Q = C V$) e l'espressione dell'energia elettrostatica ($E_e = CV^2/2$), si ottiene:

$$V (C dV + V dC) + F dx = C V dV + (V^2/2) dC$$

e, semplificando, si trae infine:

$$F = -\frac{V^2}{2} \frac{dC}{dx}$$

Ricordando che la capacità di un condensatore piano di sezione A è data da:

$$C = \epsilon A/x \quad \Rightarrow \quad dC/dx = -\epsilon A/x^2 = -C/x$$

Sostituendo e ricordando che il campo elettrico è dato da $E = V/x$, si ha infine:

$$F = \frac{v^2}{2} \frac{\epsilon A}{x^2} = \epsilon \frac{E^2}{2} A$$

Questa equazione mostra che F è sempre positiva e quindi, tenuto conto dei versi positivi assunti nella figura 5, la forza elettrostatica F_i che si esercita fra le armature del condensatore è sempre una forza di attrazione (come del resto è intuitivo, tenuto conto che le cariche sulle armature sono sempre di segno opposto). Per quanto concerne il suo modulo, si osserva che esso risulta espresso dal prodotto della superficie A delle armature per la grandezza $(\epsilon E^2/2)$ che ha le dimensioni di una pressione e viene solitamente indicata come "*pressione elettrostatica*" del condensatore.

Si intende ora verificare che, come si è detto, il calcolo della forza sia indipendente dal tipo di trasformazione considerata (si noti tuttavia che una oculata scelta delle condizioni imposte alla trasformazione può semplificare notevolmente il procedimento di calcolo).

Si consideri una trasformazione virtuale caratterizzata dalla condizione

$$Q = \text{cost.}$$

Il bilancio energetico si scrive dunque come:

$$F dx = (dE_e)_{Q = \text{cost.}}$$

Da cui si ottiene:

$$F = \frac{Q^2}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{C} \right) = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{dC}{dx} = -\frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dx}$$

che coincide con l'espressione della forza precedentemente calcolata.

Si consideri una trasformazione virtuale caratterizzata dalla condizione

$$V = \text{cost.}$$

Il bilancio energetico si scrive dunque come:

$$V dQ + F dx = (dE_e)_{V = \text{cost.}}$$

Da cui si ottiene:

$$V dQ + F dx = \frac{V}{2} dQ \Rightarrow F dx = -\frac{1}{2} V dQ$$

e dunque

$$F = \frac{v}{2} \frac{d}{dx} (Cv) = -\frac{1}{2} v^2 \frac{dC}{dx}$$

Esempio 2: Forza sull'ancora di una elettrocalamita

Si intende determinare la forza esercitata da una elettrocalamita sulla propria ancora (vedi figura 6) in direzione ortogonale ai poli piani dell'elettrocalamita. Detta F_i tale forza interna al sistema, e fissato il suo verso positivo, si consideri la sua equilibrante F , esterna al sistema. Si supponga ora di mantenere ferma l'elettrocalamita e di assegnare all'ancora uno spostamento virtuale dx , ove x indica la distanza fra i poli piani dell'elettrocalamita e l'ancora, valutata a partire dalla superficie dei poli. L'equazione di bilancio energetico associata a tale spostamento è:

$$I d\Phi_c + F dx = dE_m$$

dove, in base a quanto precedentemente osservato sull'energia magnetostatica, si è annullato il termine dissipativo e si è supposto inoltre infinitesimo di ordine superiore l'eventuale incremento di energia cinetica del sistema. Ricordando la proprietà fondamentale degli induttori ($\Phi_c = L I$) e l'espressione dell'energia magnetostatica ($E_m = LI^2/2$), si ottiene:

$$I (L dI + I dL) + F dx = L I dI + (I^2/2) dL$$

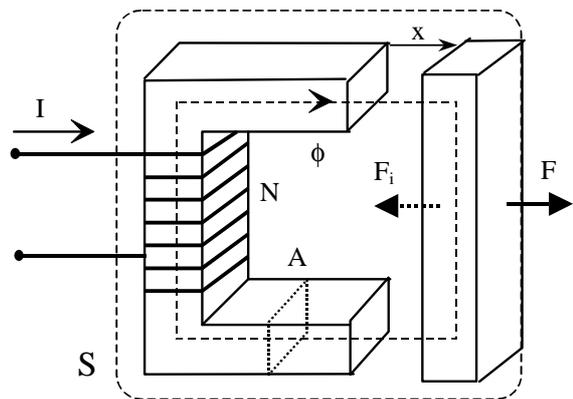


Figura 6.

e, semplificando, si trae infine:

$$F = -\frac{I^2}{2} \frac{dL}{dx}$$

Ricordando la legge di Hopkinson ($NI = \mathcal{R} \phi$) l'induttanza risulta:

$$L = \frac{\Phi_c}{I} = \frac{N\phi}{I} = \frac{N^2}{\mathcal{R}}$$

La riluttanza \mathcal{R} del circuito magnetico è data da:

$$\mathcal{R} = 2x/\mu_0 A \quad \Rightarrow \quad d\mathcal{R}/dx = 2/\mu_0 A$$

Sostituendo e ricordando che il campo di induzione è dato da $B = \phi/A$, si ha infine:

$$F = -\frac{I^2}{2} \frac{dL}{dx} = -\frac{(NI)^2}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) = \frac{1}{2} \frac{(NI)^2}{\mathcal{R}^2} \frac{d\mathcal{R}}{dx} = \frac{\phi^2}{2} \frac{2}{\mu_0 A} = \frac{B^2}{2\mu_0} (2A)$$

Questa equazione mostra che F è sempre positiva e quindi, tenuto conto dei versi positivi assunti nella figura 6, la forza F_i esercitata da una elettrocalamita sulla propria ancora è sempre una forza di attrazione. Per quanto concerne il suo modulo, si osserva che esso risulta espresso dal prodotto della superficie $2A$ dei poli dell'elettrocalamita per la grandezza $(B^2/2\mu_0)$ che ha le dimensioni di una pressione e viene solitamente indicata come "*pressione magnetica*".

Si intende ora verificare come, anche in questo caso, il calcolo della forza sia indipendente dal tipo di trasformazione considerata.

Si consideri una trasformazione virtuale caratterizzata dalla condizione

$$\Phi_c = \text{cost.}$$

Il bilancio energetico si scrive dunque come:

$$F dx = (dE_m)_{\Phi_c = \text{cost.}}$$

Da cui si ottiene:

$$F = \frac{\Phi_c^2}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{L} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\Phi_c^2}{L^2} \frac{dL}{dx} = -\frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{dx}$$

che coincide con l'espressione della forza precedentemente calcolata.

Si consideri una trasformazione virtuale caratterizzata dalla condizione

$$I = \text{cost.}$$

Il bilancio energetico si scrive dunque come:

$$I d\Phi_c + F dx = (dE_m)_{I = \text{cost.}}$$

Da cui si ottiene:

$$I d\Phi_c + F dx = \frac{I}{2} d\Phi_c \quad \Rightarrow \quad F dx = -\frac{I}{2} d\Phi_c$$

e dunque

$$F = \frac{I}{2} \frac{d}{dx} (LI) = -\frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{dx}$$