ELETTRODINAMICA QUASI - STAZIONARIA

La definizione dell'elettrodinamica quasi-stazionaria non può essere data in forma rigorosa, come è stato fatto per l'elettrostatica, la magnetostatica e l'elettrodinamica stazionaria, in quanto coinvolge un'approssimazione: essa consiste nel considerare la derivata temporale di una generica grandezza diversa da zero solo in quelle regioni di spazio in cui tale grandezza può assumere valori elevati e nel considerarla nulla nelle rimanenti. Pertanto, le leggi generali del regime quasi-stazionario si ricavano dal quadro generale dell'elettromagnetismo facendo le seguenti supposizioni (zona per zona):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \neq 0 \text{ , } \textit{quando si riferiscono a grandezze che possono assumere valori elevati} \\ \dfrac{\partial}{\partial t} = 0 \text{ , } \textit{nei rimanenti casi} \end{cases}$$

Tale discriminazione è possibile "a priori" in quanto è facile riconoscere, con buona approssimazione, per ciascuna grandezza le regioni ove si hanno valori elevati:

per **B** l'interno dei circuiti magnetici, ove si considererà $\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq 0$;

per **D** lo spazio fra le armature dei condensatori, ove si considererà $\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \neq 0$;

per ρ le armature dei condensatori, ove si considererà $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$.

Quanto detto porta a considerare un generico Circuito a Costanti Concentrate, come indicato in figura 1.1. L'equazione descrittiva di questo modello è l'equazione di Ohm generalizzata.

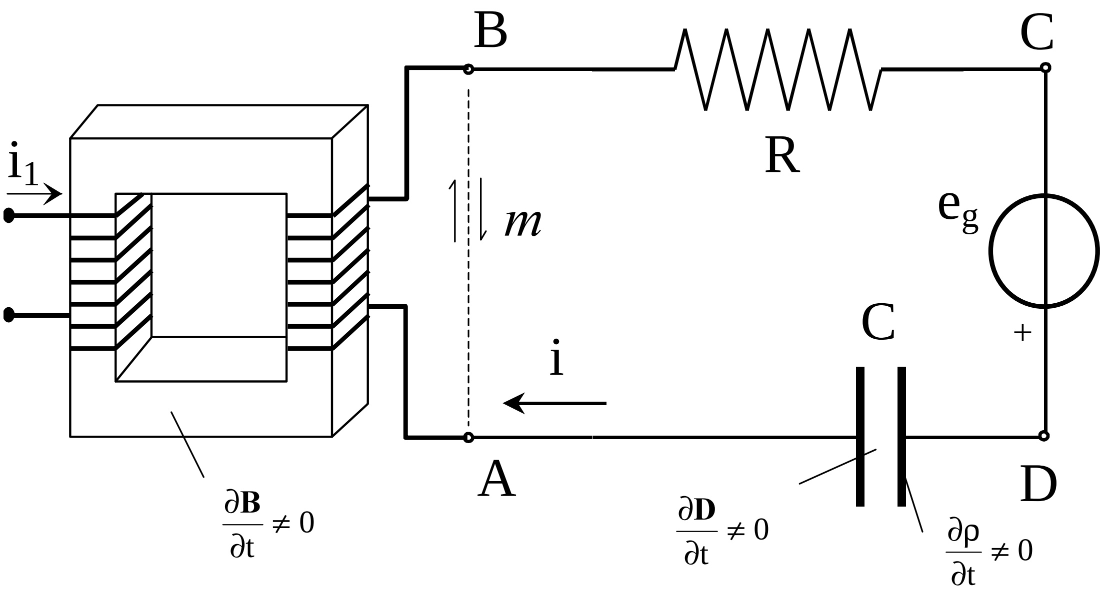


Figura 1.1 - Schema di Circuito a costanti concentrate.

Si consideri la Legge di Ohm in forma locale, scritta esplicitando il campo elettrico:

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\mathrm{i}} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \qquad (1.2)$$

Integrando la (1.2) lungo il circuito dal punto A al punto D (percorso ABCD), si ottiene:

$$\int_A^D \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} + \int_A^D \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \int_A^D \frac{\mathbf{J}}{\sigma}\cdot d\mathbf{l} = (\mathrm{JS})\int_A^D \frac{dl}{\sigma S} = \mathrm{Ri} \qquad (1.3)$$

<u>Si noti che nel circuito di figura ha senso introdurre una corrente i, anche senza specificare la sezione S del circuito</u> (in quanto $\nabla\cdot\mathbf{J} = 0$ eccetto che fra le armature del condensatore). Scomponendo l'integrale da A a D in due parti ed aggiungendo e sottraendo alla (1.3) l'integrale da A a B integrato lungo la linea *m*, si ha:

$$\underbrace{\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} + \int_{B(m)}^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}}_{\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_c}{dt}} + \underbrace{\int_{A(m)}^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} + \int_B^D \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}}_{\int_{A(m)}^D \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = V_A - V_D} + \underbrace{\int_A^D \mathbf{E}_i\cdot d\mathbf{l}}_{\int_C^D \mathbf{E}_i\cdot d\mathbf{l} = e_g} = \mathrm{Ri} \qquad (1.4)$$

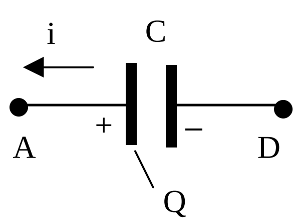
Poiché i primi due integrali possono essere uniti a formare un'integrale di circuitazione su una linea chiusa concatenata con il circuito magnetico, per la legge di Legge di Faraday - Neumann - Lenz, ad esso è possibile sostituire l'opposto della derivata del flusso di induzione concatenato alla linea. Per quanto riguarda la seconda coppia di integrali, essi possono essere uniti in un solo integrale di linea da A a D e poiché la linea di integrazione non è concatenata al circuito magnetico, l'integrale è pari alla differenza dei potenziali valutati in D ed in A (o meglio la <u>tensione</u> tra i punti A e D). Si ha quindi:

$$-\frac{d\Phi_c}{dt} + (V_A - V_D) + e_g = \mathrm{Ri} \qquad (1.5)$$

Il termine ($-d\Phi_c/dt$) è detto "f.e.m. (<u>f</u>orza <u>e</u>lettro<u>m</u>otrice) indotta per variazioni di flusso concatenato" con il circuito. Il termine ($V_A - V_D$) è la <u>tensione</u> fra i morsetti A e D; essa deve intendersi valutata (come integrale di campo) lungo percorsi che non interessano regioni in cui ($-\partial\mathbf{B}/\partial t$) è diverso da zero; cioè si evidenzia il fatto che si tratta di una grandezza derivata da una approssimazione: il campo elettrico, in quel dominio è "quasi conservativo". Le grandezze e_g ed R sono dette, rispettivamente, “tensione impressa del generatore” e “resistenza”. La "Legge di Ohm Generalizzata" (1.5) può essere scritta esplicitando i vari termini in funzione delle correnti:

<u>Innanzitutto per il Condensatore</u>: Poiché nella regione del condensatore il regime è definito dal seguente sistema di equazioni che lega il campo elettrico **E**, lo spostamento dielettrico **D** e la densità di carica ρ, valgono le regole dell'elettrostatica. Si ha quindi:

$$\begin{cases} \nabla\times\mathbf{E} = 0 \\ \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho \\ \mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E} \end{cases}$$



$$V_A - V_D = \frac{Q}{C} \qquad (1.6)$$

dove Q è la carica della armatura indicata con +. Poiché per la conservazione della carica elettrica, si ha i = – dQ/dt, è possibile scrivere

$$dQ = -\,i\,dt \quad \Rightarrow \quad Q = -\int_{-\infty}^{t} i\,dt \quad \Rightarrow \quad V_A - V_D = -\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,dt \qquad (1.7)$$

Il segno nella (1.7) si giustifica con le convenzioni di segno adottate ed indicate in figura.

Poi per le f.e.m. indotte: Nell'ipotesi che vi sia anche un circuito accoppiato (vedi figura 1.1), il flusso di induzione concatenato è esprimibile ricordando la definizione dei coefficienti di auto e mutua induzione:

$$\Phi_c = Li + Mi_1 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{d\Phi_c}{dt} = -L\frac{di}{dt} - M\frac{di_1}{dt} \tag{1.8}$$

Nella (1.8) il termine ($-L\, di/dt$) è detto "f.e.m. di autoinduzione" ed il termine ($-M\, di_1/dt$) è detto "f.e.m. di mutua induzione".

Sostituendo ora le equazioni (1.7) e (1.8) nella (1.5), si ottiene la forma definitiva della Legge di Ohm generalizzata:

$$e_g - L\frac{di}{dt} - M\frac{di_1}{dt} - \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\; dt = Ri \tag{1.9}$$

La (1.9) si generalizza ai circuiti complessi per ogni generica maglia (cioè por ogni percorso chiuso che colleghi almeno due terminali).

Riassumendo, le ipotesi necessarie per la validità dell'elettrodinamica quasi-stazionaria (spesso implicitamente assunte) sono:

1. Il percorso chiuso (o **circuito**) è definito da un conduttore filiforme (a resistività nulla);
2. Le dimensioni del circuito sono sufficientemente piccole (rispetto alla lunghezza d'onda) da potere essere trascurate;
3. La corrente di spostamento è confinata tra le armature dei condensatori;
4. Il flusso magnetico è confinato nei circuiti magnetici interni agli induttori;
5. La conducibilità elettrica finita è confinata nei resistori;
6. I campi impressi sono confinati nelle regioni dello spazio in cui agiscono i generatori elettrici.

La prima ipotesi definisce semplicemente cosa si intende per "circuito". La seconda implica che ogni circuito cessa di seguire le leggi della teoria dei circuiti, se la frequenza *f* dei fenomeni elettromagnetici studiati diventa sufficientemente elevata (infatti la lunghezza d'onda è tata da c/*f*, dove c è la velocità della luce (circa $3 \cdot 10^8$ m/s)). Le quattro ipotesi successive, invece, restringono la tipologia degli elementi circuitali ai soli componenti ideali (condensatori, induttori resistori, generatori). Quindi, se si deve considerare un condensatore che è anche resistivo (come può capitare nei condensatori "reali") o un induttore con capacità parassita, non è possibile applicare le equazioni dei circuiti, se prima non si sostituiscono tali elementi con caratteristiche miste con opportuni circuiti equivalenti (dal punto di vista delle tensioni e delle correnti ai morsetti) che contengono soltanto elementi ideali. La scelta del circuito equivalente viene effettuata sulla base della conoscenza del comportamento del campo elettromagnetico all'interno del dispositivo.

IL BILANCIO ENERGETICO DI UN RAMO CIRCUITALE

Si consideri un generico ramo di circuito (vedi figura 1.2), caratterizzato da un resistore di resistenza R, un induttore di induttanza L, un condensatore di capacità C ed un generatore di tensione $e_g(t)$. Il ramo è sottoposto ad una tensione ai morsetti v(t) nota. La legge di Ohm per il valore istantaneo della corrente i(t) nel ramo considerato ha la forma:

$$e_g(t) = v(t) + Ri(t) + L\frac{di}{dt}(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau \tag{1}$$

Posto

$$\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = Q \quad \Rightarrow \quad i\,dt = dQ$$

dove Q è la carica presente all'istante t sull'armatura del condensatore in cui la corrente è entrante.

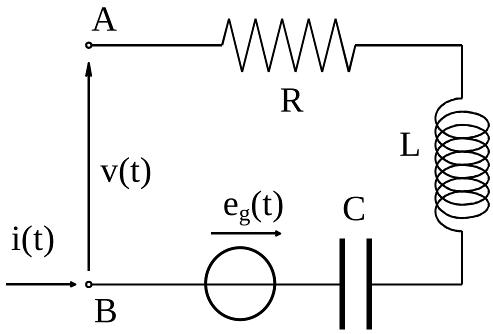


Figura 1.2

È possibile ottenere dalla (1) il bilancio energetico relativo al ramo in oggetto. A tale scopo è sufficiente moltiplicare la (1) per i(t)dt per ottenere:

$$e_g i\,dt = vi\,dt + Ri^2\,dt + Li\,di + \frac{Q}{C}dQ$$

Gli ultimi due termini sono differenziali esatti che rappresentano un incremento di energia conservativa. È pertanto conveniente scrivere:

$$e_g i\,dt = d\left[\frac{1}{2}Li^2 + \frac{Q^2}{2C}\right] + Ri^2\,dt + vi\,dt \qquad (2)$$

Integrando, infine, entrambi i membri della (2) dal tempo iniziale t_0 all'istante t, si ottiene:

$$\int_{t_0}^{t} e_g i\,dt = \left[\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2C}\left(\int_{-\infty}^{t} i d\tau\right)^2\right]_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} Ri^2\,dt + \int_{t_0}^{t} vi\,dt \qquad (3)$$

Ponendo:

$$E_e = \frac{1}{2C}\left(\int_{-\infty}^{t} i\,dt\right)^2 \qquad E_m = \frac{1}{2}Li^2 \qquad E_{em} = E_e + E_m$$

$$L_g = \int_{t_0}^{t} e_g i\,dt \qquad E_d = \int_{t_0}^{t} Ri^2\,dt \qquad E_S = \int_{t_0}^{t} vi\,dt$$

La (3) si presta alla seguente interpretazione: il lavoro L_g fornito dal generatore è pari alla somma della variazione di energia elettromagnetica E_{em} contenuta negli elementi con memoria, dell'energia dissipata E_d (per effetto Joule nel resistore) e dell'energia E_S uscente (si noti che tensione e corrente di ramo non hanno versi di riferimento associati).

$$L_g = \Delta E_{em} + E_d + E_S \qquad (4)$$

La variazione di energia elettromagnetica ΔE_{em} è somma della variazione di energia elettrostatica E_e e della variazione di energia magnetica E_m.Si noti che la (4) non è altro che una applicazione particolare del Teorema di Poynting.

Esiste quindi un'energia di tipo conservativo associata alla corrente che attraversa un'induttanza e alla carica sulle armature di un condensatore (si ricordi che Q =di/dt).

$$E_m = \frac{1}{2}Li_L^2 \qquad E_e = \frac{1}{2C}Q^2 = \frac{1}{2}Cv_C^2 = \frac{1}{2}Qv_C \qquad (5)$$

dove i_L = corrente che attraversa un'induttanza; v_C = tensione tra le armature di un condensatore.

PASSAGGIO DALLA TEORIA DEI CAMPI A QUELLA DEI CIRCUITI

Si intende in questo paragrafo giustificare il passaggio dalla teoria dei campi a quella dei circuiti a costanti concentrate. Benché la trattazione sia rigorosa, nel senso che specifica chiaramente i simboli ed il loro significato, si vuole sottolineare che le ipotesi di validità ottenibili sono soltanto necessarie. Questo significa che la teoria dei circuiti a costanti concentrate ha una sua autonomia teorica che le permette di venire utilizzata anche in ambiti che violano le condizioni poste. Questa constatazione permette di enunciare una *teoria assiomatica dei circuiti* in cui le leggi di Kirchhoff e le caratteristiche dei componenti sono postulati. In questo ambito è possibile definire anche componenti che non hanno alcun corrispettivo fisico (giratori, resistori attivi, …), ma che permettono di simulare fenomeni che altrimenti non potrebbero essere modellati con la teoria dei circuiti.
In pratica, il "circuito elettrico a costanti concentrate" è un modello per un sistema elettrico reale (ad esempio: un motore elettrico, un apparecchio per il trattamento di un segnale audio, una CPU di un computer); affinché un sistema elettrico reale sia modellabile come un circuito elettrico a costanti concentrate devono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

CONDIZIONI DI VALIDITÀ DEL MODELLO "CIRCUITO ELETTRICO A COSTANTI CONCENTRATE"

1. deve essere possibile individuare, nella regione di spazio occupata dal sistema fisico reale, delle zone di spazio, dette componenti, in cui alcune grandezze elettromagnetiche (e le loro derivate temporali) possono assumere valori elevati;

1.a per ciascun componente, deve essere possibile individuare dei terminali attraverso i quali avviene lo scambio di carica elettrica tra un componente e l'altro;

1.b all'esterno dei componenti, deve essere possibile individuare delle connessioni conduttrici tra i terminali dei componenti.

2. nella regione di spazio esterna ai componenti (in cui si trovano anche i terminali e le eventuali connessioni conduttrici tra di essi), si deve potere:

2a. trascurare la corrente di spostamento, rispetto a quella di conduzione ($\Rightarrow (\partial \mathbf{D}/\partial t) = 0$);

2b. trascurare la componente non conservativa del campo elettrico rispetto a quella conservativa ($|\partial \mathbf{A}/\partial t| \ll |-\nabla\varphi| \Rightarrow (\partial \mathbf{B}/\partial t) = 0$).

L'approssimazione alla base del modello di "circuito elettrico a costanti concentrate" consiste dunque fondamentalmente nel considerare le derivate temporali di alcune grandezze diverse da zero soltanto in alcune regioni e nel considerarle nulle nelle rimanenti. Questa scelta, per ciascuna grandezza e per ciascuna regione, definisce (come si è visto) il *regime elettrodinamico quasi-stazionario*. Ogni componente così individuato (induttore, condensatore, etc.) può ritenersi responsabile, quasi per intero, di una proprietà che, a rigore, appartiene al sistema nel suo complesso (induttanza, capacità, etc.).

La teoria dei circuiti a costanti concentrate viene utilizzata anche per dispositivi che violano le condizioni poste sopra, come ad esempio le linee di trasmissione. Guide d'onda, cavità risonanti, ed in generale problemi che coinvolgono la propagazione di onde elettromagnetiche ad alta frequenza, possono, in certi casi, essere trattati con le teoria dei circuiti.

Una prima immediata verifica per determinare se un sistema fisico reale possa essere modellato come un circuito elettrico a costanti concentrate, ricordando che c indica la velocità della luce (3×10^8 m/s nel vuoto), si può effettuare tramite la relazione:

$L_{MAX} << cT_{min}$	"Le dimensioni della regione di interesse sono sufficientemente piccole da potere essere trascurate"	
$c >> f_{MAX} L_{MAX}$	"La velocità di propagazione del fenomeno elettromagnetico è infinita"	(1.1)
$\frac{L_{MAX}}{c} << T_{min}$	"È nullo il tempo di propagazione del fenomeno elettromagnetico da un punto all'altro della regione di interesse"	

dove L_{MAX} è la dimensione massima del sistema conduttivo che si intende studiare e le grandezze f_{MAX} e T_{min} ($T_{min} = 1/f_{MAX}$) sono, rispettivamente, la frequenza massima ed il periodo temporale minimo che si intendono considerare. L'applicazione della (1.1), rappresenta solo una prima verifica immediata della applicabilità della teoria dei circuiti nella descrizione di un sistema reale; ogni singolo problema, necessita in realtà di uno studio specifico. Si considerino ora i seguenti tre esempi:

Esempio.1. Si consideri il circuito costituente un piccolo computer su un chip lungo 1 mm; la durata minima di un segnale di interesse sia 0.1 ns (1 ns = 10^{-9} s). La condizione (1.1) è verificata, infatti: $L_{MAX}/c = 3.3 \times 10^{-12}$ s $<< 10^{-10}$ s $= T_{min}$. Quindi il circuito può essere ritenuto a costanti concentrate.

Esempio.2. Si consideri un circuito audio: la più elevata frequenza di interesse sia, ad esempio, 25 kHz. La condizione (1.1) è verificata se $L_{MAX} << c/f_{MAX} = 12$ km. Così, persino se il circuito avesse un'estensione di qualche centinaio di metri, le sue dimensioni sarebbero comunque piccolissime rispetto alla minima lunghezza d'onda di interesse. Quindi il circuito può essere ritenuto a costanti concentrate.

Esempio.3. Si consideri un circuito per Telecomunicazioni: la più elevata frequenza di interesse sia, ad esempio, 1 GHz. La condizione (1.1) è verificata se $L_{MAX} << c/f_{MAX} = 0.3$ m. Assumendo che il simbolo di "molto minore" implichi, come è usuale, una riduzione di almeno due o tre ordini di grandezza, la dimensione massima del circuito che è possibile studiare con il modello a costanti concentrate è di circa $3 \div 0.3$ mm. Così, persino se il circuito avesse un'estensione di qualche millimetro, le sue dimensioni sarebbero ancora troppo grandi rispetto alla minima lunghezza d'onda di interesse. Quindi il sistema <u>non può</u> essere schematizzato come un circuito a costanti concentrate.