INTRODUZIONE ALLO STUDIO DEI CIRCUITI IN FASE TRANSITORIA
(METODI PER L'ANALISI DEI CIRCUITI CON MEMORIA)

Si consideri un circuito a costanti concentrate lineare; risolvere un tale circuito significa potere determinare la corrente in un punto qualsiasi e la tensione fra due nodi qualsiansi del circuito, note le f.e.m. esplicitamente inserite e le caratteristiche R, L, C dei singoli rami, nonché i coefficienti di mutua induzione M fra i vari rami, se esistono accoppiamenti induttivi. L'ipotesi di circuito lineare impone che tali caratteristiche siano costanti (indipendenti dalle correnti).

Si è visto che le leggi da applicare per la soluzione dei circuiti in regime permanente sono le Leggi di Kirchhoff delle correnti (LKC) e delle tensioni (LKT), insieme alle equazioni caratteristiche dei componenti (si veda la Teoria dei Circuiti). Quando si vogliano studiare i circuiti, oltre che in regime permanente, anche in fase transitoria, occorre risolvere una equazione integro-differenziale, se si tratta di un circuito semplice, oppure un sistema di equazioni integro-differenziali, se si tratta di un circuito complesso o di un circuito semplice con accoppiamenti induttivi. In tal caso, per un circuito caratterizzato da R rami ed N nodi, le leggi da applicare per la soluzione sono le Leggi di Kirchhoff delle correnti (LKC) e delle tensioni generalizzata (LKT):

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{N}-1)\ \mathit{LKC} & \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{(nodi)} \mathrm{i} = 0 \\ \displaystyle\sum_{(maglie)} \left[\mathrm{e_g} - \mathrm{L}\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}} - \mathrm{M}\frac{\mathrm{di_1}}{\mathrm{dt}} - \frac{1}{\mathrm{C}}\int_{\mathrm{t_0}}^{\mathrm{t}} \mathrm{i\,dt} \right] = \sum_{(maglie)} \mathrm{Ri} \end{array} \right. \\ (\mathrm{R}-\mathrm{N}+1)\ \mathit{LKT} & \end{array}$$

Si ha così un sistema di equazioni in parte algebriche, ed in parte integro-differenziali. Mediante derivazione di queste ultime, e sostituendo, è possibile ricondursi sempre ad un sistema di equazioni differenziali.

Riassumendo, ci si riconduce sempre o ad una equazione differenziale (circuito semplice) o ad un sistema di equazioni differenziali (circuito complesso). È possibile dimostrare che, mediante derivazione e sostituzione è possibile ricondursi sempre ad un'unica equazione differenziale lineare a coefficienti costanti di ordine pari al numero di elementi con memoria (induttori e condensatori) e contenente una sola delle correnti incognite. Risolta tale equazione, si ottengono poi le altre correnti mediante successive sostituzioni.

Prima di passare ai vari possibili metodi di soluzione del sistema (o dell'equazione) differenziale risolvente, conviene studiare prima alcune proprietà della soluzione di un circuito lineare di ordine n(*), attraverso lo studio delle proprietà delle equazioni differenziali lineari a coefficienti reali e costanti di ordine n:

$$\frac{\mathrm{d^n i}}{\mathrm{dt^n}} + \mathrm{a_{n-1}}\frac{\mathrm{d^{n-1}i}}{\mathrm{dt^{n-1}}} + \cdots + \mathrm{a_1}\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}} + \mathrm{a_0 i} = \mathrm{f}(\mathrm{t})$$

nella quale i coefficienti a_0, a_1, … , a_{n-1} sono funzioni degli elementi R, L, C, M del circuito ed f(t) è funzione delle f.e.m. esplicitamente inserite nel circuito stesso, cioè della *eccitazione* del sistema.

L'integrale generale della soluzione di una equazione differenziale lineare non-omogenea di ordine n è, come è noto, scomponibile nella somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea as-

(*) Un circuito di ordine n è, per definizione, caratterizzato da un'equazione differenziale di ordine n. Come si è detto, l'ordine dell'equazione differenziale relativa ad un dato circuito non è mai superiore al numero degli elementi con memoria (induttori e condensatori) presenti nella rete; quindi i circuiti di ordine n hanno almeno n elementi con memoria.

sociata, e di un integrale particolare dell'equazione differenziale(**). Il primo contiene un numero di costanti indipendenti (da determinare con le condizioni ai limiti) pari all'ordine n dell'equazione. Infatti, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata si esprime, come è noto, nella forma

$$i_h(t) = C_n e^{\lambda_n x} + \cdots + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_1 e^{\lambda_1 x}$$

in cui λ_k sono le radici, supposte distinte(o), della *equazione caratteristica*:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

di grado pari all'ordine dell'equazione differenziale e le cui radici sono pertanto in numero pari all'ordine di quest'ultima. Le C_k sono le n costanti indipendenti da determinare mediante la conoscenza delle condizioni ai limiti, cioè dalla conoscenza dei valori della corrente incognita e delle sue prime n–1 derivate in un certo istante, che può essere quello iniziale (ed allora si parla di *condizioni inziali*). La conoscenza di tali valori è necessaria per definire il problema.

Essendo i coefficienti a_0, a_1, … , a_{n-1} reali ed essenzialmente positivi, le radici λ_k reali (anche multiple) sono negative, mentre le eventuali coppie di radici complesse coniugate hanno la parte reale negativa (Se si suppone invece, facendo una astrazione matematica, che la resistenza nel circuito sia nulla, le parti reali delle radici complesse sono nulle.). Infatti, quando esiste la resistenza del circuito (come in realtà sempre accade), essendo nulle le f.e.m. (quindi f(t) = 0) i fenomeni elettrici nel circuito si estinguono. Ciò porta alla riduzione a zero con legge periodica o aperiodica (a seconda che le radici λ_k siano reali o complesse) della $i_h(t)$. Quindi, *la soluzione generale della equazione omogenea associata rappresenta il termine transitorio della corrente.*

Come soluzione particolare dell'equazione non-omogenea $i_p(t)$, si assume quindi la corrente a regime permanente, cioè il comportamento della corrente che permane dopo l'esaurimento del transitorio (Si noti che $i_p(t)$ non dipende dalle condizioni iniziali). La soluzione per l'equazione differenziale in i, corredata delle condizioni ai limiti è quindi data da:

$$i = i_h(t) + i_p(t)$$

Pertanto, risolta l'equazione per i ed ottenute poi le altre correnti mediante successive sostituzioni nel sistema iniziale, è possibile affermare che *la risposta di un circuito lineare ad una eccitazione è scomponibile nella somma di una parte transitoria e di un regime permanente*.

(**) La soluzione generale di una equazione differenziale non- omogenea di ordine n

$$i^{(n)} + a_{n-1} i^{(n-1)} + \cdots + a_1 i^{(1)} + a_0 i = f(t)$$

è immediatamente ottenibile se si conoscono una sua *soluzione particolare* $i_p(t)$ e la soluzione generale $i_h(t)$ della omogenea associata

$$i^{(n)} + a_{n-1} i^{(n-1)} + \cdots + a_1 i^{(1)} + a_0 i = 0$$

Si ha infatti: $i = i_h(t) + i_p(t)$. La verifica, data la linearità delle equazioni, è immediata.

(o) Se l'equazione caratteristica ammette una radice λ_0 a molteplicità m allora la soluzione dell'equazione omogenea è data da:

$$i_h = C_n e^{\lambda_0 t} + C_{n-1} t e^{\lambda_0 t} + \cdots + C_{n-m-1} t^{m-1} e^{\lambda_0 t} + C_{n-m} e^{\lambda_{n-m} t} + \cdots + C_1 e^{\lambda_1 t}$$

Se l'equazione caratteristica ammette una radice complessa $\alpha = p + jq$ allora (dato che i coefficienti a_0, a_1, … , a_{n-1} sono reali) ammette come radice anche il complesso coniugato $\alpha^* = p - jq$. Pertanto, ricordando la formula di Eulero

$$e^{jx} = \sin(x) + j\cos(x)$$

la soluzione dell'equazione omogenea è data da:

$$\begin{aligned} i_h &= C_n e^{\alpha t} + C_{n-1} e^{\alpha^* t} + C_{n-2} e^{\lambda_{n-2} t} + \cdots + C_1 e^{\lambda_1 t} = e^{pt}\left(C_n e^{jqt} + C_{n-1} e^{-jqt}\right) + C_{n-2} e^{\lambda_{n-2} t} + \cdots + C_1 e^{\lambda_1 t} = \\ &= A\, e^{pt} \cos(qt - \theta) + C_{n-2} e^{\lambda_{n-2} t} + \cdots + C_1 e^{\lambda_1 t} \end{aligned}$$

dove A e θ sono costanti arbitrarie reali esprimibili in termini di C_n e C_{n-1}.

IL BILANCIO ENERGETICO DI UN RAMO CIRCUITALE

Si consideri un generico ramo di circuito (vedi figura 1), caratterizzato da un resistore di resistenza R, un induttore di induttanza L, un condensatore di capacità C ed un generatore di tensione $e_g(t)$. Il ramo è sottoposto ad una tensione ai morsetti v(t) nota. La legge di Ohm per il valore istantaneo della corrente i(t) nel ramo considerato ha la forma:

$$e_g(t) = v(t) + Ri(t) + L\frac{di}{dt}(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau \qquad (1)$$

Posto

$$\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = Q \quad \Rightarrow \quad i\,dt = dQ$$

dove Q è la carica presente all'istante t sull'armatura del condensatore in cui la corrente è entrante.

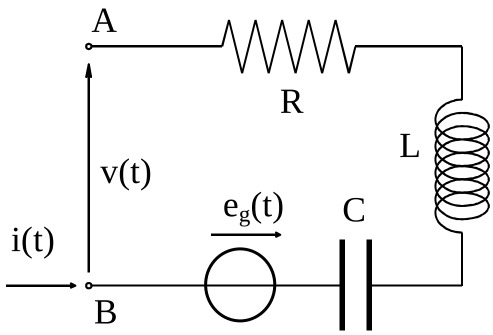

Figura 1.

È possibile ottenere dalla (1) il bilancio energetico relativo al ramo in oggetto. A tale scopo è sufficiente moltiplicare la (1) per i(t)dt per ottenere:

$$e_g i\,dt = vi\,dt + Ri^2\,dt + Li\,di + \frac{Q}{C}dQ$$

Gli ultimi due termini sono differenziali esatti che rappresentano un incremento di energia conservativa (si vedano i Bilanci Energetici). È pertanto conveniente scrivere:

$$e_g i\,dt = d\left[\frac{1}{2}Li^2 + \frac{Q^2}{2C}\right] + Ri^2\,dt + vi\,dt \qquad (2)$$

Integrando, infine, entrambi i membri della (2) dal tempo iniziale t_0 all'istante t, si ottiene:

$$\int_{t_0}^{t} e_g i\,dt = \left[\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2C}\left(\int_{-\infty}^{t} id\tau\right)^2\right]_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} Ri^2\,dt + \int_{t_0}^{t} vi\,dt \qquad (3)$$

Ponendo:

$$E_e = \left[\frac{1}{2C}\left(\int_{-\infty}^{t} i\,dt\right)^2\right]_{t_0}^{t} \qquad E_m = \left[\frac{1}{2}Li^2\right]_{t_0}^{t} \qquad E_{em} = E_e + E_m$$

$$L_g = \int_{t_0}^{t} e_g i\,dt \qquad E_d = \int_{t_0}^{t} Ri^2\,dt \qquad E_S = \int_{t_0}^{t} vi\,dt$$

La (3) si presta alla seguente interpretazione: il lavoro L_g fornito dal generatore è pari alla somma della variazione di energia elettromagnetica E_{em} contenuta negli elementi con memoria, dell'energia dissipata E_d (per effetto Joule nel resistore) e dell'energia E_S uscente (si noti che tensione e corrente di ramo non hanno versi di riferimento associati).

$$L_g = E_{em} + E_d + E_S \qquad (4)$$

L'energia elettromagnetica E_{em} è somma dell'energia elettrostatica E_e e dell'energia magnetica E_m. Si noti che la (4) non è altro che una applicazione particolare del Teorema di Poynting.

Esiste quindi un'energia di tipo conservativo associata alla corrente che attraversa un'induttanza e alla carica sulle armature di un condensatore (si ricordi che Q =di/dt).

$$E_m = \frac{1}{2} L i_L^2 \qquad\qquad E_e = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2} C v_C^2 \, \frac{1}{2} Q v_C \tag{5}$$

dove i_L = corrente che attraversa un'induttanza; v_C = tensione tra le armature di un condensatore.

Come si è visto, i circuiti con memoria (cioè quelli in cui è presente almeno un componente dotato di memoria) danno origine ad un sistema risolvente costituito da un sistema di equazioni integro - differenziali del tipo (1). La soluzione di tali sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine può essere ottenuta, eventualmente per via numerica, a partire dall'istante iniziale (t = 0) in cui sono noti i valori di tutte le variabili (condizioni iniziali). È possibile considerare circuiti in cui sono presenti interruttori ideali che si aprono e si chiudono istantaneamente. L'interruzione o l'instaurarsi di una corrente elettrica in un interruttore "reale" è un fenomeno molto complesso che se non è istantaneo, avviene comunque in un tempo molto piccolo (solitamente trascurabile ai fine del transitorio che si vuole studiare). In questo caso è possibile descrivere il processo mediante l'**interruttore ideale**. Si consideri ad esempio il circuito rappresentato nella figura 2 in cui è presente l'interruttore ideale T che si chiude istantaneamente all'istante t = 0. Quando l'interruttore ideale è aperto (figura 2.a) esso equivale ad un circuito aperto e quindi la corrente che lo attraversa è nulla. Viceversa quando l'interruttore è chiuso (figura 2.b) esso equivale ad un corto circuito e la tensione ai suoi capi è nulla.

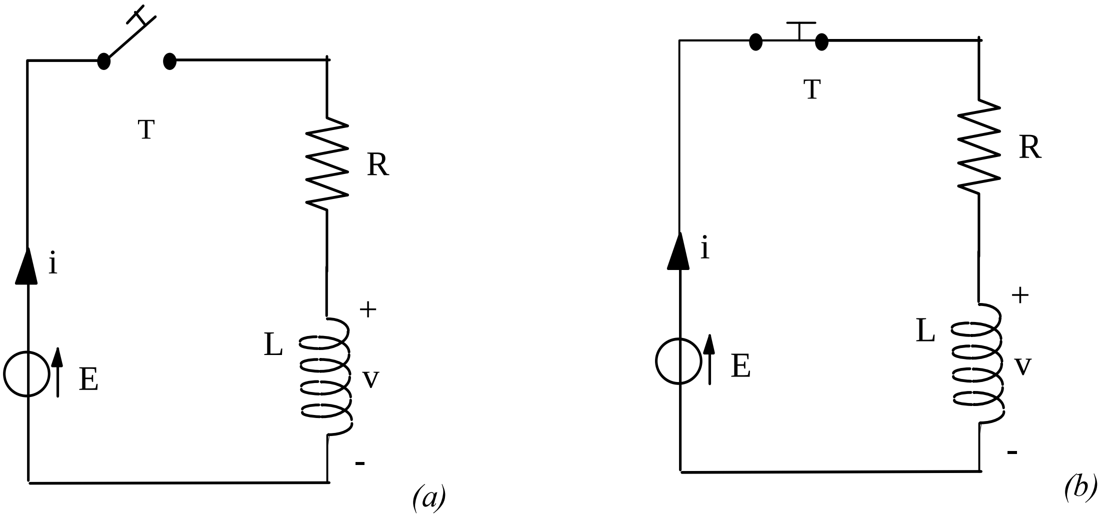

Figura 2. - Circuito con interruttore ideale aperto (a) e chiuso (b)

All'istante $t = 0^-$, cioè un istante prima che l'interruttore si chiuda, il circuito si trova in regime stazionario; la corrente è nulla (dato iniziale) e quindi è nulla anche la tensione ai capi dell'induttore e del resistore. Un istante dopo che l'interruttore si è chiuso ($t = 0^+$) le grandezze del circuito hanno in generale, essendo cambiata in maniera discontinua la topologia del circuito, valori diversi (valori iniziali) da quelli relativi all'istante $t = 0^-$. Ad esempio, la tensione ai capi della serie resistore induttore, nulla all'istante $t = 0^-$ risulta pari ad E all'istante $t = 0^+$. Non risultano però cambiati i valori di quelle grandezze a cui è associata una energia del circuito, cioè le correnti degli induttori e le tensioni dei condensatori. Nel caso specifico il valore della corrente i nullo all'istante $t = 0^-$ risulta quindi nullo anche all'istante $t = 0^+$.

Il **Postulato di continuità dell'energia**, afferma infatti che **<u>l'energia non può subire discontinuità nel tempo</u>**. Una discontinuità dell'energia in un intervallo di tempo infinitesimo equivarrebbe, infatti, all'intervento di una sorgente di potenza infinita nella (3), il che non è fisicamente accettabile. Come conseguenza di tale postulato si deduce che i valori delle grandezze cui è associata una energia nel circuito sono funzioni continue del tempo. Dalle (5) si deduce in particolare che:

- la *corrente* non può subire discontinuità in un ramo contenente un'*induttanza*;
- in un *condensatore* non può subire discontinuità né la *carica* né la *tensione* fra le armature.

Questo consente di risolvere il circuito all'istante $t = 0^+$ a partire dalla conoscenza dei valori delle variabili di stato (cioè tensione ai capi dei condensatori e corrente attraverso gli induttori) all'istante $t = 0^-$ e quindi permette di determinare le condizioni iniziali necessarie per risolvere il sistema di equazioni integro - differenziali che modella il circuito.

Nel seguito vengono illustrati, mediante esempi, alcuni tra i metodi più utilizzati per l'analisi dei circuiti elettrici con memoria. Il problema che si vuole risolvere è il seguente: assegnato il circuito elettrico e le grandezze impresse dei generatori indipendenti presenti, si vuole calcolare l'andamento temporale delle correnti di ramo e delle tensioni di ramo. Si suppone per semplicità che tutti i componenti siano dei bipoli, potendosi ricondurre all'ipotesi mediante l'introduzione di circuiti equivalenti dei componenti a più di due terminali.

I. METODO DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Come si è già detto, l'analisi dei circuiti dinamici, cioè contenenti elementi con memoria (induttori, condensatori e mutue induttanze), si effettua utilizzando i metodi già esposti per le reti resistive. La differenza sostanziale consiste nel fatto che, in questo caso, si ottengono equazioni non più di tipo algebrico ma di tipo integro-differenziale. Questi equazioni devono quindi essere risolte utilizzando i metodi classici dell'analisi differenziale.

In molti casi è possibile semplificare notevolmente i procedimenti di soluzione delle equazioni differenziali che descrivono il comportamento di un circuito, ricorrendo a delle considerazioni di carattere fisico. Questo è particolarmente vero per i circuiti del 1° ordine, cioè quei circuiti caratterizzati da un'equazione differenziale del primo ordine (solitamente contenenti un solo elemento con memoria). Si consideri, ad esempio, il circuito in figura 2. Applicando la Legge di Kirchhoff delle Tensioni (LKT) all'istante $t = 0^+$, si ottiene:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E \tag{6}$$

L'integrale generale di una equazione differenziale lineare del 1° ordine come questa è la somma di un integrale particolare (soluzione di regime) e dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata (soluzione transitoria): $i(t) = i_p(t) + i_0(t)$. Se si assume che E sia costante, per calcolare l'integrale particolare è sufficiente annullare la derivata: $i_p(t) = E/R$. Per quanto riguarda l'integrale generale dell'equazione omogenea associata, esso va sempre cercato nella forma di un esponenziale reale o immaginario. La sostituzione dell'esponenziale $e^{\lambda t}$ nella omogenea associata della (6) porta a scrivere l'equazione caratteristica:

$$L\lambda + R = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = -R/L \qquad \Rightarrow \qquad i(t) = E/R + I\, e^{-Rt/L}$$

La determinazione della costante I può essere effettuata se è noto il valore iniziale:

$$i(0^+) = i_0 \tag{7}$$

Per calcolare il valore iniziale è sufficiente considerare il circuito di figura 2.a, cioè prima della chiusura dell'interruttore T (t < 0). È evidente che $i(0^-) = 0$, visto che l'interruttore T è aperto. Utilizzando ora il postulato di continuità dell'energia è possibile affermare che $i(0^+) = 0$. Risulta quindi:

$$0 = E/R + I \qquad \Rightarrow \qquad I = -E/R$$

In conclusione, l'andamento temporale della corrente i è stato calcolato tramite la soluzione della seguente equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti con il valore iniziale di corrente nulla.

$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} + Ri = E \\ i(0) = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \tag{8}$$

Il parametro $\tau = L/R$ è detto <u>costante di tempo</u> del circuito. La costante di tempo rappresenta l'intervallo di tempo necessario perché la risposta transitoria si riduca ad $1/e \approx 0.37$ del suo valore iniziale. Dalla figura 3 emerge una interpretazione del parametro τ che può essere assunto ad indicare la maggiore o minore "rapidità" del fenomeno transitorio.

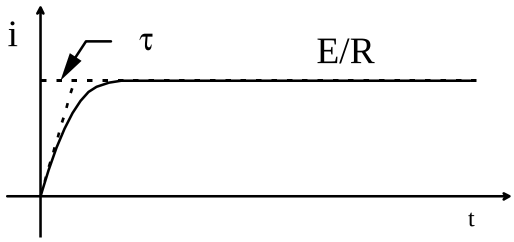

Figura 3.

Si consideri ora il circuito rappresentato nella figura 4.a in cui è presente l'interruttore ideale T che si chiude istantaneamente all'istante t = 0. La legge di Ohm per il valore istantaneo della corrente i(t) nel ramo considerato ha la forma:

$$E = Ri + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} idt \quad \Rightarrow \quad E = Ri + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} idt + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} idt$$

ossia:

$$E - \frac{Q_0}{C} = Ri + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} idt \tag{9}$$

ove Q_0 è il valore della carica iniziale (che si mantiene uguale a $t = 0^-$ e a $t = 0^+$ per la continuità dell'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore)

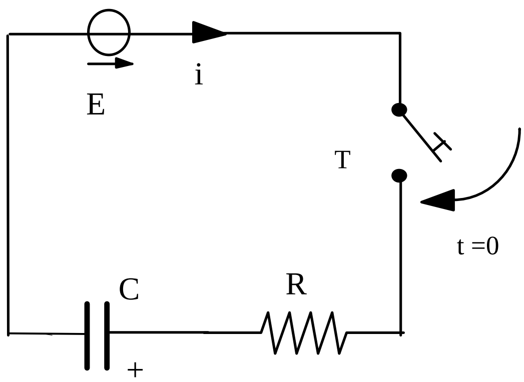

Figura 4.a

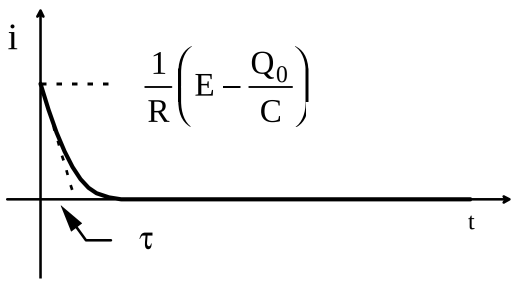

Figura 4.b

Derivando la (9) rispetto al tempo si ottiene la seguente equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti:

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad i(t) = Ae^{-t/\tau} \tag{10}$$

dove τ = RC è la <u>costante di tempo</u> del circuito. Per la determinazione della costante A si considera il valore iniziale e, tenendo presente la continuità di Q, si scrive la (9) per $t = 0^+$:

$$E - \frac{Q_0}{C} = R\, i\left(0^+\right) \quad \Rightarrow \quad i\left(0^+\right) = \frac{1}{R}\left(E - \frac{Q_0}{C}\right) \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{1}{R}\left(E - \frac{Q_0}{C}\right)e^{-t/\tau} \tag{11}$$

Il grafico della (11) è mostrato in figura 4.b. Si noti che anche in questo caso emerge una interpretazione del parametro τ che può essere assunto ad indicare la maggiore o minore "rapidità" del fenomeno transitorio. In particolare, per $t > 5\tau$ si può assumere che il transitorio sia esaurito e che si sia raggiunta la soluzione di regime (che in questo caso è $i(t) = 0$).

L'individuazione e la successiva risoluzione dell'equazione differenziale che descrive il comportamento di un circuito dinamico è un'operazione tanto più difficoltosa quanto più è elevato l'ordine del circuito (cioè quanti più elementi con memoria contiene). Ne segue che l'analisi di circuiti di ordine superiore al primo non si effettua generalmente nel dominio del tempo, ma utilizzando il metodo delle Trasformate di Laplace (vedi seguito).

Per circuiti del 2° ordine si può ancora procedere direttamente nel dominio del tempo, sebbene la difficoltà dell'analisi risulti spesso eccessiva e giustifichi anche in questo caso il ricorso alle Trasformate di Laplace. Si consideri ad esempio il circuito illustrato nella figura 5.a prima della chiusura dell'interruttore T ($t < 0$). Si intende ora scrivere il sistema risolvente per $t > 0$.

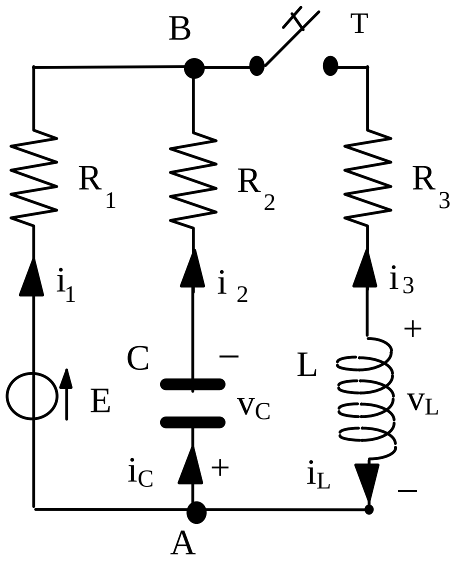

Figura 5.a - Schema circuitale per t <0

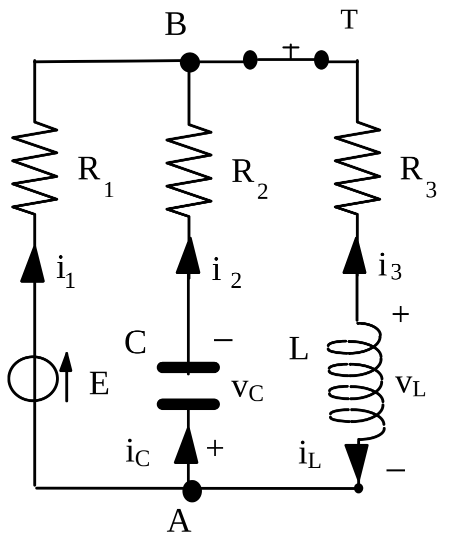

Figura 5.b - Schema circuitale per t >0

La soluzione del circuito di figura 5.b può essere ottenuta mediante il metodo dell'analisi dei nodi, calcolando prima la tensione del nodo B rispetto al nodo A:

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= \frac{E - v_{BA}}{R_1} \\ i_2 &= \frac{-v_C - v_{BA}}{R_2} \\ i_3 &= -i_L \\ i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad v_{BA} = \frac{\frac{E}{R_1} - \frac{v_C}{R_2} - i_L}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \tag{12}$$

È quindi possibile esprimere la corrente i_C e la tensione v_L in funzione della tensione v_{BA} e delle derivate di v_C ed i_L rispettivamente:

$$\begin{aligned} i_C &= C\frac{dv_C}{dt} = \frac{-v_C - v_{BA}}{R_2} \\ v_L &= L\frac{di_L}{dt} = v_{BA} - R_3 i_L \end{aligned} \tag{13}$$

Supponendo, ad esempio, che i dati del problema siano: E =110 V, R_1 =0.5 Ω, R_2=0.5 Ω, R_3 =5 Ω, C =$2{\cdot}10^{-4}$ F ,L =$3{\cdot}10^{-3}$ H, dalla (12) si ottiene:

$$v_{BA} = 55 - 0.5\,v_C - 0.25\,i_L \tag{14}$$

sostituendo la (14) nelle (13) si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{dv_C}{dt} &= -5 \cdot 10^3 v_C + 2.5 \cdot 10^3 i_L - 5.5 \cdot 10^5 \\ \frac{di_L}{dt} &= -1.66 \cdot 10^2 v_C - 1.75 \cdot 10^3 i_L + 1.83 \cdot 10^4 \end{aligned} \tag{15}$$

Naturalmente è possibile pervenire al sistema (15) utilizzando direttamente le Leggi di Kirchhoff:

Legge di Kirchhoff delle Correnti applicata al nodo A	$i_1 + C\frac{dv_C}{dt} - i_L = 0$
Legge di Kirchhoff delle Tensioni applicata alla maglia ACBEA	$E - R_1 i_1 + R_2 C\frac{dv_C}{dt} + v_C = 0$
Legge di Kirchhoff delle Tensioni applicata alla maglia ALBEA	$E - R_1 i_1 - R_3 i_L - L\frac{di_L}{dt} = 0$

Ricavando i_1 dalla prima equazione e sostituendo nelle altre due, si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{aligned} C(R_1 + R_2)\frac{dv_C}{dt} &= -v_C + R_1 i_L - E \\ L\frac{di_L}{dt} &= CR_1\frac{dv_C}{dt} - (R_1 + R_3)i_L + E \end{aligned}$$

Ricavando dv_C/dt dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ottiene seguente sistema:

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{C(R_1+R_2)}v_C + \frac{R_1}{C(R_1+R_2)}i_L - \frac{E}{C(R_1+R_2)}$$
$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R_1}{L(R_1+R_2)}v_C - \frac{(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1)}{L(R_1+R_2)}i_L + \frac{R_2}{L(R_1+R_2)}E$$

Sostituendo i dati numerici si riottiene il sistema (15):

$$\begin{aligned}\frac{dv_C}{dt} &= -5\cdot 10^3 v_C + 2.5\cdot 10^3 i_L - 5.5\cdot 10^5 \\ \frac{di_L}{dt} &= -1.66\cdot 10^2 v_C - 1.75\cdot 10^3 i_L + 1.83\cdot 10^4\end{aligned} \tag{15}$$

È possibile ora ricavare dalla seconda delle (15) l’espressione di v_C il funzione di i_L e di di_L/dt:

$$v_C = 110 - 10.5\, i_L - 6\cdot 10^{-3}\frac{di_L}{dt} \tag{16}$$

La (16) permette quindi di calcolare l’andamento temporale di v_C se è noto quello di i_L. La risoluzione del circuito di figura 5 è pertanto ricondotto alla determinazione dell’andamento temporale della i_L. È immediato verificare che sostituendo l’espressione di v_C data dalla (16), nella prima delle (15), dopo alcuni passaggi algebrici, si ottiene una equazione differenziale del secondo ordine nella unica incognita i_L.

$$1.2\cdot 10^{-6}\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 8.1\cdot 10^{-3}\frac{di_L}{dt} + 11\, i_L = 220 \tag{17}$$

L’integrazione della (17) richiede la conoscenza del valore della corrente i_L e della sua derivata all’istante $t = 0^+$. Per calcolare tali valori iniziali è sufficiente considerare il circuito di figura 5.a, cioè prima della chiusura dell’interruttore T ($t < 0$). Infatti, è evidente che $i_L(0^-) = 0$, visto che l’interruttore T è aperto, e che $v_C(0^-) = -E$, poiché il condensatore si comporta in continua come un circuito aperto. Utilizzando ora il postulato di continuità dell’energia è possibile affermare che $i_L(0^+) = 0$ e che $v_C(0^+) = -E$. Il valore di $(di_L/dt)(0^+)$ può essere calcolato dalla (16) in cui tutti i termini sono calcolati all’istante $t = 0^+$ e $v_C(0^+)$ è nota. Risulta quindi:

$$\underbrace{v_C(0^+)}_{110} = 110 - 10.5\,\underbrace{i_L(0^+)}_{0} - 6\cdot 10^{-3}\frac{di_L}{dt}(0^+) \;\Rightarrow\; \frac{di_L}{dt}(0^+) = 0$$

L’equazione differenziale da risolvere è dunque:

$$\begin{aligned}&1.2\cdot 10^{-6}\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 8.1\cdot 10^{-3}\frac{di_L}{dt} + 11\, i_L = 220 \\ &i_L(0) = 0, \quad \frac{di_L}{dt}(0^+) = 0\end{aligned} \tag{18}$$

L’integrale generale di una equazione differenziale lineare come questa è la somma di un integrale particolare (soluzione di regime) e dell’integrale generale dell’equazione omogenea associata (soluzione transitoria): $i_L(t) = i_{L,\,p}(t) + i_{L,\,0}(t)$. Poiché il termine noto è costante, per calcolare l’integrale particolare è sufficiente annullare le derivate. L’integrale particolare risulta quindi $i_{L,\,p}(t) = 20$. Per quanto riguarda l'integrale generale dell'equazione omogenea associata, esso va sempre cercato nella forma di un esponenziale reale o immaginario. La sostituzione dell'esponenziale $e^{\lambda t}$ nella omogenea associata della (18) porta a scrivere l'equazione caratteristica:

$$1.2 \cdot 10^{-6} \lambda^2 + 8.1 \cdot 10^{-3} \lambda + 11 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1883 \\ \lambda_2 = -4866 \end{cases}$$

L'integrale generale della (18) è dunque: $i_L(t) = 20 + Ae^{-1883\,t} + Be^{-4866\,t}$. Per determinare il valore delle costanti A e B si devono soddisfare le condizioni iniziali. Il sistema lineare risultante è:

$$\begin{cases} 20 + A + B = 0 \\ 1883A + 4866B = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 32.6 \\ B = 12.6 \end{cases}$$

La soluzione della (18) è quindi data da:

$$i_L(t) = 20 + 32.6\,e^{-1883\,t} + 12.6\,e^{-4866\,t} \qquad (19)$$

Analogamente a quanto visto per la (8), si possono individuare due costanti di tempo caratteristiche del circuito: $\tau_1 = 1/1883 = 5.31 \cdot 10^{-4}$ s e $\tau_2 = 1/4866 = 2.05 \cdot 10^{-4}$ s. La soluzione transitoria dunque è la sovrapposizione di due diversi transitori con diverse costanti di tempo.

Generalizzando quanto è emerso dagli esempi trattati, si può concludere che la soluzione di un regime transitorio si articola nelle seguenti fasi:

1) **scrittura delle equazioni**,
2) **ricerca degli integrali generali**,
3) **determinazione delle costanti di integrazione**.

Il primo punto consiste nell'applicazione delle Leggi di Kirchhoff, il secondo ha carattere essenzialmente matematico salvo, al più, la ricerca di integrali particolari che può essere condotta anche sul piano fisico individuando la soluzione di regime. Il terzo punto richiede un'analisi fisica riguardante gli istanti $\underline{t = 0^-}$ e $\underline{t = 0^+}$ per passare dai **dati iniziali** ai **valori iniziali** che condizionano le costanti di integrazione. Tale passaggio si fonda sul postulato di continuità dell'energia e si esegue o con un ragionamento fisico diretto o riscrivendo, per $t=0^+$ le equazioni differenziali e deducendo da esse le incognite cercate.

Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono particolarmente rilevanti nello studio della stabilità delle reti lineari (Un circuito si dice stabile se, sottoposto ad una eccitazione esterna di durata limitata, ha risposta che rimale limitata nel tempo dopo che la sollecitazione esterna ha finito di agire). Si può dimostrare infatti che un circuito è stabile se $\Re(\lambda) \leq 0$, per ogni λ soluzione dell'equazione caratteristica. In particolare, i circuiti lineari, tempo invarianti, contenenti solo elementi privi di memoria passivi ed elementi con memoria sono stabili.

I circuiti contenenti componenti attivi (cioè in grado di erogare potenza) non sono necessariamente stabili. A titolo di esempio si consideri il circuito di figura 6, in cui l'interruttore T si chiude all'istante t = 0 e si riapre all'istante $t = t_0$.

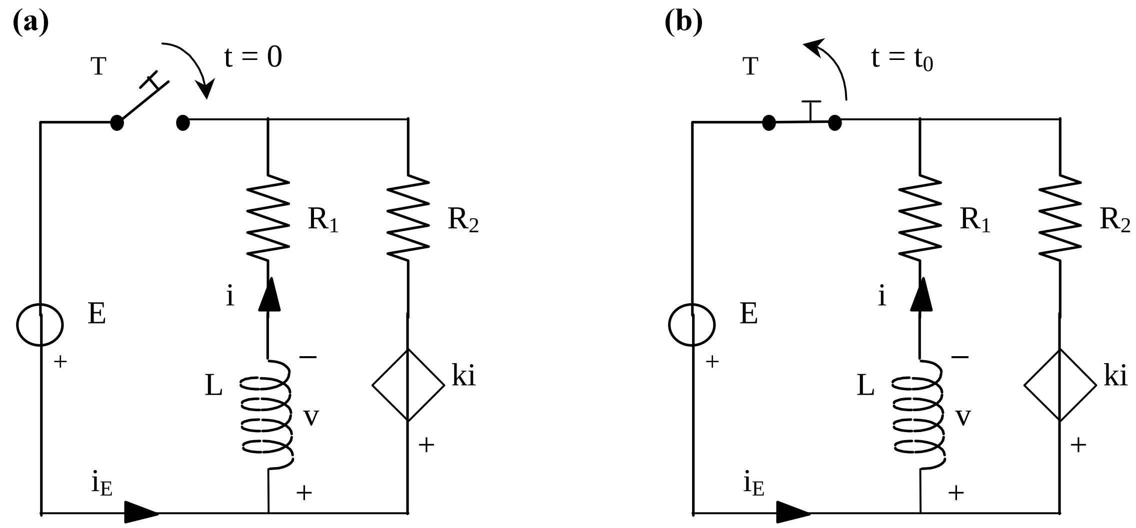

Figura 6

L'andamento temporale della corrente i, per $0 \le t \le t_0$, è calcolabile risolvendo il seguente sistema, con il valore iniziale di corrente nulla (supponendo che $k \neq R_1 + R_2$).

$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} + R_1 i = E \\ i(0) = 0 \\ E + R_2 (i - i_E) - ki = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{E}{R_1}\left(1 - e^{-\frac{R_1}{L}t}\right) \qquad (20)$$

L'andamento temporale della corrente i, per $t \ge t_0$, è calcolabile risolvendo il seguente sistema, con il valore iniziale di corrente $i_0 = i\ (t = t_0)$.

$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} + (R_1 + R_2 - k)i = 0 \\ i(0) = i_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad i(t) = i_0\, e^{\frac{k - R_1 - R_2}{L}t} \qquad (21)$$

La (21) mostra che il circuito è stabile solo se $k \le R_1 + R_2$. Nel caso contrario la corrente i cresce esponenzialmente. Pertanto, se il circuito di figura 27 rappresenta il modello un dispositivo fisico, al crescere della i si raggiungeranno i limiti tecnologici del dispositivo (che si guasterà); oppure, se il circuito di figura 6 rappresenta il modello un dispositivo fisico solo in un certo regime di funzionamento (si pensi ad esempio all'A.O. nella regione lineare), al crescere della i si raggiungeranno i limiti del modello e sarà necessario modificare la struttura del circuito.

Come caso limite di stabilità, si consideri il circuito illustrato in figura 7. Per $t < 0$, si ha: $i = i_L = E/R$, $i_C = 0$, $v_L = v_C = 0$. Dopo l'apertura dell'interruttore T, per $t > 0$, il circuito è costituito dal parallelo dell'induttore con il condensatore. Pertanto, il sistema risolvente è dato da:

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{i_L}{C} \qquad \frac{di_L}{dt} = -\frac{v_C}{L} \tag{22}$$

con le condizioni iniziali $v_C(0) = 0$, $i_L(0) = E/R$.
Sostituendo la prima delle (2) nella seconda si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 v_C}{dt^2} + \dfrac{v_C}{LC} = 0 \\ v_C(0) = 0 \\ \dfrac{dv_C}{dt}(0) = \dfrac{E}{RC} \end{cases} \tag{23}$$

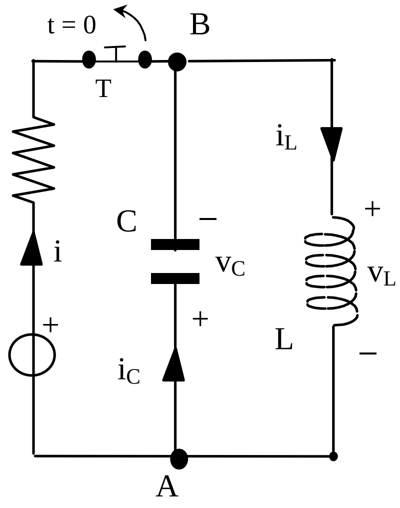

Figura 7

Cercando una soluzione nella forma di un esponenziale reale o immaginario ($e^{\lambda t}$) si ottiene la relazione $\lambda^2 + 1/LC = 0$. Posto $\omega_0^2 = 1/LC$, si ottengono le due radici, puramente immaginarie, $\lambda = \pm j\,\omega_0$.(o) Si noti quindi che $\Re(\lambda) = 0$ e le soluzioni del problema non tendono a zero, nè divergono, ma sono oscillanti:

$$i_L(t) = \frac{E}{R} cos(\omega_0 t) \quad , \qquad v_C(t) = -\frac{E}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\, sin(\omega_0 t)$$

Regime di corrente alternata

Si può dimostrare che sotto alcune deboli ipotesi di stabilità del circuito, se il circuito è lineare e le eccitazioni presenti sono funzioni sinusoidali isofrequenziali del tempo, dopo un transitorio di durata dipendente dai parametri del circuito stesso, si raggiunge una soluzione di regime in cui tutte le grandezze del circuito sono funzioni sinusoidali isofrequenziali, con frequenza pari a quella dei generatori. Per calcolare la soluzione di regime, si può applicare il metodo simbolico che considera le grandezze e le equazioni del circuito trasformate mediante la trasformata di Steinmetz e perviene ad un sistema risolutivo algebrico nello spazio dei numeri complessi. Il sistema risolvente si può ottenere sostituendo i condensatori e gli induttori con dei "resistori" con resistenza complessa (impedenza). Per la descrizione dettagliata del metodo si rimanda ai capitoli successivi. Per la soluzione del circuito simbolico sopramenzionato si applicano tutti i metodi precedentemente visti per i circuiti privi di memoria.

(o) Al fine di evitare possibili fraintendimenti, a differenza di quanto accade usualmente, è consuetudine in elettrotecnica indicare con la lettera "j" l'unità immaginaria ($j^2 = -1$), riservando il simbolo "i" per le correnti.