

DEFINIZIONE DELLE GRANDEZZE FONDAMENTALI DELL'ELETTROMAGNETISMO

- Alla base della teoria dell'elettromagnetismo sta la definizione di alcune grandezze fisiche fondamentali:

$$q \equiv \text{carica elettrica} \longrightarrow F = K_C \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$\mathbf{E} \equiv$ campo elettrico (Legge di Coulomb)

$\mathbf{J} \equiv$ densità di corrente

$i \equiv$ corrente elettrica

$\mathbf{B} \equiv$ vettore induzione magnetica

- Quando la carica è distribuita in regioni di spazio finite, si considera la grandezza scalare ρ :

$$\rho = \frac{dq}{d\tau} \quad \text{densità spaziale di carica elettrica}$$

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad \text{densità di carica superficiale}$$

$$\lambda = \frac{dq}{d\ell} \quad \text{densità di carica lineare}$$

- La Legge di coulomb suggerisce anche la definizione della grandezza vettoriale campo elettrico:

$$\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q}$$

$\mathbf{E} \equiv$ vettore che ha direzione e verso uguali a quelli della forza che agisce su una carica elettrica puntiforme di valore q positivo e intensità uguale al rapporto tra l'intensità F della forza ed il valore q della carica, ovvero al limite di tale rapporto per q che tende a zero.

- Dalla Legge di Lorentz si ricava la definizione della grandezza vettoriale induzione magnetica:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

la quale descrive le forze che agiscono su una carica elettrica q puntiforme, in movimento con velocità \mathbf{v} e le interpreta come effetto di un campo vettoriale \mathbf{B} , di intensità $F/(q v \sin\theta)$.

- La grandezza scalare corrente elettrica i si può definire senza fare riferimento ad alcuna legge fisica

$$di = \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{ndS} \Rightarrow \begin{cases} i = \frac{dq}{dt} \\ i = \int_S \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{ndS} \end{cases}$$

- La grandezza vettoriale $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$ è la densità di corrente e quindi

$$i = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{ndS}$$

- Alla base della definizione fisica della corrente elettrica è conveniente assumere la forza per unità di lunghezza $f = F/\ell$ che due fili conduttori lunghi, sottili e paralleli, posti nel vuoto a distanza d nota, si scambiano quando percorsi da correnti uguali $i_1 = i_2 = i$:

$$f = \frac{F}{\ell} = K_L \frac{i_1 i_2}{d} = K_L \frac{i^2}{d}$$

relazione che si ricava dalla legge di Laplace: $d\mathbf{F} = i d\ell \times \mathbf{B}$

e dalla legge di Biot e Savart: $\mathbf{B} = K_L \frac{i}{d}$

- Risulta opportuno dare alle costanti K_C e K_L (nel vuoto) rispettivamente le espressioni:

$$K_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \qquad K_L = \frac{\mu_0}{2\pi}$$

dove ϵ_0 è la permittività (dielettrica) del vuoto
e μ_0 è la permeabilità (magnetica) del vuoto.

e quindi le leggi diventano

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$f = \frac{F}{\ell} = \mu_0 \frac{i_1 i_2}{2\pi d}$$

dove $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m

$\mu_0 = 1.256 \cdot 10^{-6}$ H/m

- A questo punto si può postulare la validità di tre leggi fisiche (nel vuoto):

LA CONSERVAZIONE DELLA CARICA ELETTRICA

$$\text{div } \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

LA LEGGE DELL'INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

LA LEGGE DELLA CIRCUITAZIONE MAGNETICA

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

CENNI SULLA POLARIZZAZIONE DELLA MATERIA

Dipolo Elettrico

Si consideri (Figura. 1) il sistema costituito da due cariche puntiformi di valore opposto, $+q$ e $-q$, situate nel vuoto ad una distanza d , e si supponga di avvicinarle progressivamente fra loro, aumentandone contemporaneamente il valore assoluto, in modo che il prodotto qd non cambi. Più precisamente, si consideri il limite al quale tende tale sistema quando d e q tendono rispettivamente a 0 e a $+\infty$, in modo tale che il prodotto qd tenda ad una quantità m_e finita e non nulla. Il sistema che si ottiene facendo questo limite si chiama **dipolo elettrico**.

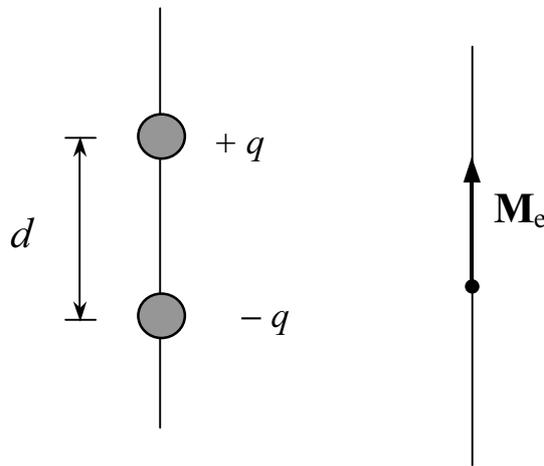


Figura. 1. Dipolo elettrico

Per caratterizzare un dipolo elettrico occorre individuare:

1. la *direzione* della retta sulla quale sono poste le due cariche puntiformi opposte;
2. il *verso* (da quella negativa a quella positiva) secondo il quale le cariche sono disposte;
3. il *valore* m_e al quale tende il prodotto qd .

Occorre perciò una grandezza vettoriale \mathbf{M}_e che si chiamerà **momento del dipolo elettrico**.

Polarizzazione Elettrica (*)

Da un punto di vista macroscopico e strettamente fenomenologico – che tiene conto solo degli effetti prodotti e non delle cause che li hanno prodotti – l'azione di un campo elettrico \mathbf{E} su un materiale non conduttore può essere descritta dicendo che ogni pezzetto di materia, quando è sottoposto al campo \mathbf{E} , diviene sede di un dipolo elettrico con momento infinitesimo $d\mathbf{M}_e$, proporzionale al volume $d\tau$ occupato dal pezzetto di materia. Così lo stato della materia polarizzata (***) può essere caratterizzato punto per punto per mezzo della grandezza vettoriale **intensità di polarizzazione elettrica**:

$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{M}_e}{d\tau}$$

All'interno della materia, la presenza di dipoli elettrici diversi in elementi di volume adiacenti implica la presenza di una distribuzione nel volume di una quantità di carica legata alla polarizzazione, la densità della quale è data (di ciò si omette la dimostrazione) dalla

$$\rho_p = - \operatorname{div} \mathbf{P}$$

In condizioni non-stazionarie, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t)$, il momento di ciascuno dei dipoli di polarizzazione risulta funzione anche del tempo, cosicché oltre alla carica di polarizzazione si deve riconoscere anche la presenza, nella direzione e nel verso del vettore intensità di polarizzazione \mathbf{P} , di una corrente elettrica di polarizzazione con densità \mathbf{J}_p espressa da:

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

(*) Tutti i materiali dielettrici sono caratterizzati dalla loro capacità di immagazzinare energia elettrica. Ciò avviene tramite uno spostamento delle posizioni relative delle cariche positive e negative interne agendo contro le forze atomiche e molecolari.

(**) Si parla di molecole polari, che hanno uno spostamento permanente tra i baricentri delle cariche positive e negative cosicché ogni coppia agisce come un dipolo, e di molecole non-polari che non hanno questa caratteristica.

Dipolo Magnetico (*)

Si consideri (Figura. 2) il sistema costituito da una corrente i che percorre una spira circolare: sia S l'area della superficie circondata dalla spira. Si supponga di diminuire progressivamente S aumentando contemporaneamente i , in modo che il prodotto iS non cambi. Più precisamente si consideri il limite al quale tende tale sistema quando S e i tendono rispettivamente a 0 e a $+\infty$, in modo tale che il prodotto iS tenda ad una quantità m_m finita e non nulla. Il sistema che si ottiene facendo questo limite si chiama **dipolo magnetico**.

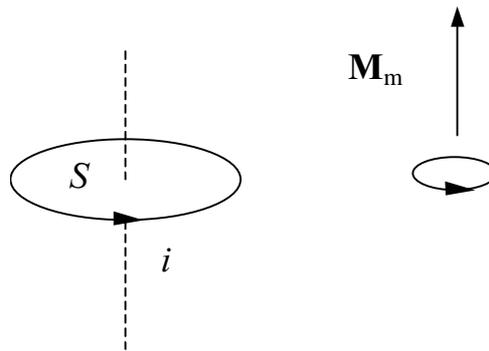


Figura. 2. Dipolo magnetico

Per caratterizzare un dipolo magnetico occorre individuare:

1. la giacitura del piano della spira, e ciò può farsi assegnando la *direzione* della normale al piano;
2. il *verso* della corrente i nella spira, e ciò può farsi assegnando un verso sulla direzione precedente: quello destrogiro rispetto al verso della corrente i ;
3. il *valore* m_e al quale tende il prodotto iS .

Occorre perciò una grandezza vettoriale \mathbf{M}_m che si chiamerà **momento del dipolo magnetico**.

(*) La teoria quantistica attribuisce il comportamento dei materiali magnetici al manifestarsi di tre distinti momenti di dipolo magnetico: orbitale, di spin elettronico, di spin nucleare.

Polarizzazione Magnetica (Magnetizzazione)

Da un punto di vista macroscopico e strettamente fenomenologico l'azione sulla materia di un campo di induzione magnetica \mathbf{B} può essere descritta dicendo che ogni pezzetto di materia, quando è sottoposto all'azione del campo \mathbf{B} , diviene sede di un dipolo magnetico con momento infinitesimo $d\mathbf{M}_m$, proporzionale al volume $d\tau$ occupato dal pezzetto di materia. Così lo stato della materia magnetizzata può essere caratterizzato punto per punto per mezzo della grandezza vettoriale intensità di polarizzazione magnetica (**magnetizzazione**):

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{M}_m}{d\tau}$$

All'interno della materia, la presenza di dipoli magnetici diversi in elementi di volume adiacenti implica la presenza di una distribuzione di corrente legata alla polarizzazione magnetica, la densità della quale è data (di ciò si omette la dimostrazione) da

$$\mathbf{J}_m = \text{rot } \mathbf{M}$$

In definitiva: il campo elettromagnetico prodotto, in presenza di materia polarizzata, da determinate distribuzioni libere di carica $\rho(x, y, z, t)$ e di corrente $\mathbf{J}(x, y, z, t)$ può essere determinato risolvendo le stesse equazioni che valgono per il campo elettromagnetico nel vuoto, purché alle cariche ed alle correnti libere si aggiungano quelle di polarizzazione messe in evidenza dalla materia stessa.