TEOREMA DI UNICITÀ PER IL PROBLEMA ELETTROMAGNETICO (TEOREMA DI SOMMERFELD)

Utilizzando il Teorema di Poynting è possibile ricavare un Teorema di unicità del campo elettromagnetico in presenza di mezzi lineari, omogenei ed isotropi (Teorema di Sommerfeld):

In un dominio τ, delimitato dalla superficie chiusa S, ove sussistano leggi di legame materiale lineari e note, il campo elettromagnetico, descritto dai vettori **E**, **D**, **H**, **B** *è univocamente determinato in ogni istante t > 0 quando siano assegnate:*

a) *la distribuzione dei vettori* **E**, **D**, **H** *e* **B** *su tutto il dominio τ all'istante t=0 (condizioni iniziali);*

b) *la distribuzione dei campi impressi* $\mathbf{E}_i$ *su tutto τ ad ogni istante t>0;*

c) *la distribuzione sulla superficie di contorno* S*, ad ogni istante t>0, della componente tangenziale del campo elettrico* **E***, o della componente tangenziale del campo magnetico* **H** *o della componente tangenziale di* **E** *su parte di* S *e della componente tangenziale di* **H** *sulla rimanente parte del contorno (condizioni al contorno).*

Dimostrazione:

Sia dato il problema elettromagnetico definito sul dominio τ, delimitato dalla superficie chiusa S. Siano noti

a) i valori iniziali del campo elettromagnetico;

b) per ogni t > 0, i campi elettrici impressi;

c) la componente tangenziale di **E** su S', e la componente tangenziale di **H** su S", dove S' ed S" sono parti del contorno S, e S' + S" = S.

Si ipotizzi, per assurdo, l'esistenza di due soluzioni per lo stesso problema elettromagnetico, individuate dai campi $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{B}_1$ e $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{D}_2$, $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{B}_2$. Per la linearità del problema, il campo elettromagnetico ottenuto per differenza:

$$\mathbf{e} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 \qquad \mathbf{d} = \mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2 \qquad \mathbf{h} = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 \qquad \mathbf{b} = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2$$

è soluzione al problema elettromagnetico definito sullo stesso dominio τ, con:

a) valori iniziali di campo elettromagnetico nullo,

b) campi impressi sempre nulli;

c) componente tangenziale di **e** sempre nulla su S', e componente tangenziale di **h** sempre nulla su S".

Applicando il Teorema di Poynting al campo elettromagnetico **e**, **d**, **h**, **b** si ottiene:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_\tau \frac{b^2}{\mu} dV + \frac{1}{2}\int_\tau \varepsilon e^2 dV\right) + \int_\tau \frac{j^2}{\sigma} dV + \oint_S (\mathbf{e}\times\mathbf{h})\cdot \mathbf{n} dS = 0$$

Indicando con $\mathbf{e}_t$, $\mathbf{h}_t$, e_n, h_n, $\mathbf{n}$ rispettivamente i componenti tangenti ad S di **e** e di **h**, le componenti normali ad S di **e** e di **h** ed il versore a normale ad S, si può scrivere:

$$(\mathbf{e}\times\mathbf{h})\cdot \mathbf{n} = [(\mathbf{e}_t + e_n\mathbf{n})\times(\mathbf{h}_t + h_n\mathbf{n})]\cdot \mathbf{n} = (\mathbf{e}_t \times \mathbf{h}_t)\cdot \mathbf{n}\,,$$

Ma poiché, sulla superficie S, è nullo o $\mathbf{e}_t$ o $\mathbf{h}_t$, risulta senz'altro nullo il flusso attraverso tale superficie del vettore $\mathbf{e}\times\mathbf{h}$. Introducendo inoltre la relazione $\mathbf{j} = \sigma\, \mathbf{e}$ si ottiene:

$$\frac{d}{dt}\int_\tau \left(\frac{b^2}{2\mu}+\frac{1}{2}\varepsilon e^2\right)dV = -\int_\tau \sigma e^2 dV$$

La funzione integranda a secondo membro è positiva o, al più, nulla. Ne consegue che il secondo membro è negativo o nullo. Integrando tale relazione nel tempo (tra gli istanti 0 e t) si ha:

$$\underbrace{\int_\tau \left(\frac{b^2(t)}{2\mu}+\frac{1}{2}\varepsilon e^2(t)\right)dV}_{w(t)} - \underbrace{\int_\tau \left(\frac{b^2(0)}{2\mu}+\frac{1}{2}\varepsilon e^2(0)\right)dV}_{w(0)} = -\int_0^t \left(\int_\tau \sigma e^2 dV\right)dt \le 0$$

All'istante iniziale si ha $\mathbf{e}(0) = 0$ e $\mathbf{b}(0) = 0$, pertanto il secondo integrale al primo membro è nullo: $w(0) = 0$. Risulta quindi che per $t > 0$ il primo integrale al primo membro può assumere valori negativi o, al più, nulli: $w(t) \le 0$. Tuttavia, per $t > 0$ tale integrale può assumere per definizione (è la somma di due termini positivi o nulli) solo valori positivi o, al più, nulli: $w(t) \ge 0$. Ne segue che tale integrale non può che essere nullo: $w(t) = 0$.

Pertanto, visto che l'integrando è positivo o nullo, non possono che essere nulli, separatamente $\mathbf{e}(t)$ e $\mathbf{b}(t)$. Segue quindi che, per $t > 0$,

$$\mathbf{e} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$$

$$\mathbf{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$$

il che prova l'asserto.