Identità Vettoriali e Proprietà dell'Operatore Nabla

RELAZIONI DI MOLTIPLICAZIONE

(**a**, **b**, **c** e **d** sono vettori in $\mathbb{R}^3$, "·" indica il prodotto scalare, "×" indica il prodotto vettoriale)

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c})-\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$

RELAZIONI DIFFERENZIALI

(**A** e **B** sono funzioni vettoriali, φ e ψ sono funzioni scalari)
(L'operatore nabla (∇) opera sulle variabili spaziali)

$$\nabla(\varphi+\psi)=\nabla\varphi+\nabla\psi$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\nabla\cdot\mathbf{A}+\nabla\cdot\mathbf{B}$$

$$\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\nabla\times\mathbf{A}+\nabla\times\mathbf{B}$$

$$\nabla(\varphi\psi)=\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi$$

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\mathbf{B}\times\nabla\times\mathbf{A}+\mathbf{A}\times\nabla\times\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$$

$$\nabla\cdot(\varphi\mathbf{A})=\varphi\nabla\cdot\mathbf{A}+\nabla\varphi\cdot\mathbf{A}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B}$$

$$\nabla\times(\varphi\mathbf{A})=\varphi\nabla\times\mathbf{A}+\nabla\varphi\times\mathbf{A}$$

$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})-\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$$

$$\nabla\cdot\nabla\varphi=\nabla^2\varphi$$

$$\nabla\times\nabla\varphi=0$$

$$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0$$

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}-\nabla^2\mathbf{A}$$

$$\nabla^2(\varphi\psi)=\varphi\nabla^2\psi+2\nabla\varphi\cdot\nabla\psi+\psi\nabla^2\varphi$$

$$\nabla^2(\varphi\mathbf{A})=\varphi\nabla^2\mathbf{A}+2(\nabla\varphi\cdot\nabla)\mathbf{A}+\mathbf{A}\nabla^2\varphi$$

$$\nabla\nabla\cdot(\varphi\mathbf{A})=(\nabla\varphi)\nabla\cdot\mathbf{A}+\varphi\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}+\nabla\varphi\times\nabla\times\mathbf{A}+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\nabla\varphi+(\nabla\varphi\cdot\nabla)\mathbf{A}$$

$$\nabla\times\nabla\times(\varphi\mathbf{A})=\nabla\varphi\times\nabla\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\nabla^2\varphi+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\nabla\varphi+\varphi\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}+(\nabla\varphi)\nabla\cdot\mathbf{A}-(\nabla\varphi\cdot\nabla)\mathbf{A}$$

TEOREMI DI CALCOLO VETTORIALE

In quel che segue **A** è una funzione vettoriale, φ e ψ sono funzioni scalari, V è un volume tridimensionale il cui elemento infinitesimo è dV, ∂V è la superficie bidimensionale chiusa che racchiude V, avente elemento di area infinitesimo dS con versore normale esterno **n** in dS.

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = \int_{\partial V} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$\int_V \nabla\varphi\, dV = \int_{\partial V} \varphi\, \mathbf{n}\, dS$$

$$\int_V \nabla \times \mathbf{A}\, dV = \int_{\partial V} \mathbf{n} \times \mathbf{A}\, dS$$

$$\int_V \left(\varphi\nabla^2\psi + \nabla\varphi \cdot \nabla\psi\right) dV = \int_{\partial V} \varphi\, \mathbf{n} \cdot \nabla\psi\, dS$$

$$\int_V \left(\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi\right) dV = \int_{\partial V} \left(\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi\right) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

In quel che segue S è una superficie aperta avente come contorno la linea chiusa C il cui elemento di linea infinitesimo è d**l**. La normale **n** a S è definita mediante la regola della vite destrogira in relazione al verso di percorrenza di C.

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\int_S \mathbf{n} \times \nabla\varphi\, dS = \oint_C \varphi\, d\mathbf{l}$$

$$\int_S \left(\mathbf{n}\, dS \times \nabla\right) \times \mathbf{A} = \oint_C d\mathbf{l} \times \mathbf{A}$$

Forma Esplicita degli Operatori Vettoriali

<u>Coordinate Cartesiane</u> (x, y, z)

$$dV = dx\,dy\,dz$$

(**A** è una funzione vettoriale, ψ è una funzione scalare)

(I versori degli assi sono indicati da **e**)

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z$$

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = \mathbf{e}_x\nabla^2 A_x + \mathbf{e}_y\nabla^2 A_y + \mathbf{e}_z\nabla^2 A_z$$

<u>Coordinate Cilindriche</u> (R, ϕ, z)

$$\begin{cases} x = R\cos\phi \\ y = R\,\mathrm{sen}\,\phi \\ z = z \end{cases} \qquad dV = R\,dR\,d\phi\,dz$$

(**A** è una funzione vettoriale, ψ è una funzione scalare)

(I versori degli assi sono indicati da **e**)

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial R}\mathbf{e}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(RA_R\right) + \frac{1}{R}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left(\frac{1}{R}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_R + \left(\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}\right)\mathbf{e}_\phi + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial}{\partial R}\left(RA_\phi\right) - \frac{\partial A_R}{\partial\phi}\right)\mathbf{e}_z$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\psi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = \mathbf{e}_R\left[\nabla^2 A_R - \frac{A_R}{R^2} - \frac{2}{R^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right] + \mathbf{e}_\phi\left[\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{R^2} + \frac{2}{R^2}\frac{\partial A_R}{\partial\phi}\right] + \mathbf{e}_z\nabla^2 A_z$$

<u>COORDINATE SFERICHE</u> (R, θ, ϕ)

$$\begin{cases} x = R\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi \\ y = R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \\ z = R\cos\theta \end{cases} \qquad dV = R^2\,\mathrm{sen}\,\theta\, dR\, d\phi\, d\theta$$

(**A** è una funzione vettoriale, ψ è una funzione scalare)

(I versori degli assi sono indicati da **e**)

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial R}\mathbf{e}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{R\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 A_R\right) + \frac{1}{R\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta A_\theta\right) + \frac{1}{R\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{R\,\mathrm{sen}\,\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\, A_\phi\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\mathbf{e}_R + \frac{1}{R}\left(\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_R}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial R}\left(RA_\phi\right)\right)\mathbf{e}_\theta$$
$$+ \frac{1}{R}\left(\frac{\partial}{\partial R}(RA_\theta) - \frac{\partial A_R}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\phi$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\psi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{R^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = \mathbf{e}_R\left[\nabla^2 A_R - \frac{2}{R^2}A_R - \frac{2}{R^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\, A_\theta\right) - \frac{2}{R^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right]$$
$$+\mathbf{e}_\theta\left[\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{R^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} + \frac{2}{R^2}\frac{\partial A_R}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{R^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right]$$
$$+\mathbf{e}_\phi\left[\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{R^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} + \frac{2}{R^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_R}{\partial\phi} + \frac{2\cos\theta}{R^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]$$