

METODI PER L'ANALISI DEI CIRCUITI

Nel seguito vengono illustrati, mediante esempi, alcuni tra i metodi più utilizzati per l'analisi dei circuiti elettrici. Il problema che si vuole risolvere è il seguente: assegnato il circuito elettrico e le grandezze impresse dai generatori indipendenti presenti, in generale funzioni qualunque del tempo, si vuole calcolare l'andamento temporale delle correnti e delle tensioni in tutti i rami del circuito. **Come già detto, si suppone per semplicità che tutti i componenti siano dei bipoli, potendosi ricondurre alla ipotesi mediante l'introduzione di circuiti equivalenti dei componenti a più di due terminali.** Gli esempi illustrativi si riferiscono, per semplicità, a circuiti in regime stazionario (o regime di corrente continua), definito dalla condizione $d/dt \equiv 0$. In tal caso, ogni grandezza nel circuito si suppone tempo-invariante.

DAI CIRCUITI AI GRAFI

È possibile associare ad ogni circuito un'entità matematica G chiamata *grafo*, formata da un insieme di nodi N (nodi del circuito) e da un insieme di rami R (rami del circuito) che collegano i nodi tra loro. Notiamo che si è così evidenziata la struttura topologica del circuito, cioè il modo in cui sono connessi i componenti tra loro, senza preoccuparsi delle caratteristiche dei componenti stessi. Ad ogni ramo sono associati una corrente di ramo ed una tensione di ramo. È possibile associare ad ogni nodo un potenziale (tensione di nodo) definita come tensione esistente tra il nodo in esame e il nodo di riferimento, il cui simbolo è ϕ , scelto arbitrariamente. Una proprietà del circuito che si trasferisce al corrispondente grafo è la *proprietà di connessione*, secondo la quale tutto il circuito è connesso elettricamente, e quindi per ogni nodo del circuito è possibile trovare un percorso che, seguendo i rami del grafo, connetta tale nodo al nodo di riferimento (nel caso in cui il circuito non sia connesso vedremo che è sempre possibile connetterlo interponendo un collegamento tra ogni coppia di circuiti non connessi). Ogni ramo del grafo deve essere orientato, ottenendo così un grafo orientato: questa orientazione corrisponde al verso positivo della corrente in quel ramo. L'orientazione della tensione del ramo può essere fatta indipendentemente da quella della corrente. Tuttavia, usualmente la tensione sarà orientata secondo la *convenzione degli utilizzatori* in modo che la corrente vada dal terminale positivo a quello negativo. Con questa convenzione, la potenza $p(t) = v(t) i(t)$ è assorbita se positiva, erogata se negativa. Se la tensione è orientata in senso opposto (convenzione dei generatori), allora la potenza è assorbita se negativa, erogata se positiva.

A titolo di esempio si consideri il circuito illustrato nella figura 1 ($N = 4$ nodi, $R = 6$ rami), dove non sono stati indicati i versi positivi delle tensioni di ramo, perché si suppone di considerare comunque versi di riferimento associati per tensioni e correnti di ramo mediante la scelta dell'utilizzatore. Il grafo orientato corrispondente è illustrato in figura 1.a.

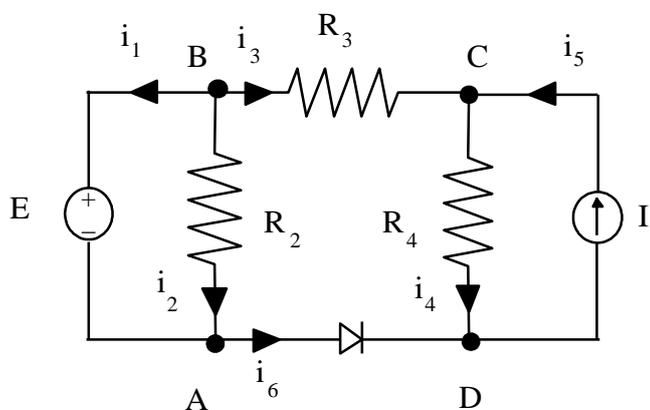


Figura 1

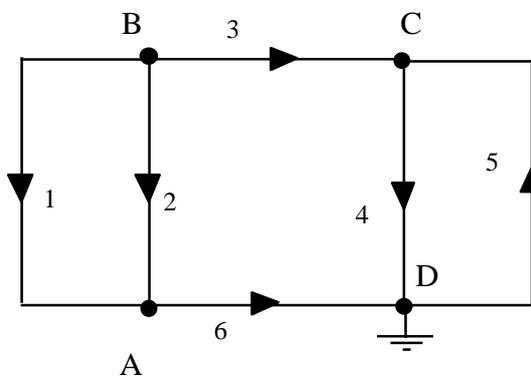


Figura 1.a

Le Leggi di Kirchhoff (delle Tensioni e delle Correnti) ci permettono di scrivere delle equazioni che descrivono la topologia del circuito, ovvero il modo in cui i componenti sono connessi tra loro:

- La Legge di Kirchhoff delle Correnti (*LKC*) afferma che la somma algebrica delle correnti in un nodo è nulla in qualsiasi istante di tempo.

- Equazione per un nodo (LKC_n):
$$\sum_{r=1}^n i_r = 0 \quad (1.a)$$

- La Legge di Kirchhoff delle Tensioni (*LKT*) può essere formulata in due modi equivalenti tra loro:

- La somma algebrica delle tensioni di ramo sui rami di una maglia è nulla per qualsiasi istante di tempo;

- Equazione per una maglia (LKT_m):
$$\sum_{r=1}^m v_r = 0 \quad (1.b)$$

- Ogni tensione di ramo è data dalla differenza dei potenziali di nodo dei suoi terminali.

- Equazione per un ramo (LKT_r):
$$v_{AB} = e_A - e_B \quad (1.c)$$

Scriviamo le equazioni *LKC* e *LKT* utilizzando il grafo associato al circuito. Supponiamo che il grafo associato abbia N nodi e R rami orientati. Con riferimento al grafo di figura 1.a, $N = 4$ (A, B, C, D) e $R = 6$. Si scelga ad esempio il nodo D come nodo di riferimento per le tensioni e si indichino con e_A , e_B ed e_C le tensioni dei nodi A, B e C rispetto al nodo di riferimento ($e_D = 0$). Le equazioni LKT_r e LKC_n assumono allora la forma rispettivamente delle (2.i) e (2.ii):

$$\begin{aligned}
 & v_1 = e_B - e_A \\
 & v_2 = e_B - e_A \\
 LKT_r: & v_3 = e_B - e_C \\
 & v_4 = e_C \\
 & v_5 = -e_C \\
 & v_6 = e_A
 \end{aligned} \quad (2.i)$$

(una equazione per ogni ramo, quindi in generale R equazioni in cui compaiono R tensioni di ramo ed $N - 1$ potenziali di nodo; nell'esempio in oggetto possiamo quindi scrivere 6 LKT_r in cui compaiono 6 tensioni di ramo ed 3 potenziali di nodo)

$$\begin{aligned}
 & i_1 + i_2 - i_6 = 0 \\
 LKC_n: & -i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\
 & i_3 - i_4 + i_5 = 0
 \end{aligned} \quad (2.ii)$$

(una equazione per ogni nodo, meno quello di riferimento, quindi in generale $N - 1$ equazioni in cui compaiono R correnti di ramo; nell'esempio in oggetto possiamo quindi scrivere 3 LKC_n in cui compaiono 6 correnti di ramo). È ovviamente possibile scrivere una ulteriore LKC_n applicata al nodo di riferimento ($-i_6 - i_4 + i_5 = 0$), ma è facile mostrare che è una combinazione lineare delle precedenti $N - 1$. Infatti, tale equazione si ottiene sommando le (2.ii).

Si noti che le (2.i) e le (2.ii) sono $R + N - 1$ equazioni in $2R + N - 1$ incognite (tensioni di ramo, potenziali di nodo e correnti di ramo): per risolvere il circuito dobbiamo aggiungere ancora R equazioni, e precisamente i modelli dei componenti.

La *LKT* può essere enunciata considerando le maglie del circuito (secondo la formulazione 1.b). Per questo, introduciamo il concetto di *albero* T associato ad un grafo G :

- T è un sottografo di G con tutti i nodi e una parte dei rami; ogni ramo conserva la sua orientazione;
- T è connesso;

3. T non ha maglie: c'è un solo percorso che collega ogni coppia di nodi.

Ovviamente, ad ogni grafo è associato più di un albero. Comunque, ogni albero T ha $N - 1$ rami. I rami di G appartenenti a T sono chiamati *rami dell'albero*, mentre i rimanenti sono chiamati *rami del coalbero* (e sono $R - N + 1$). Se aggiungiamo un ramo del coalbero a T , creiamo una maglia che è formata da rami dell'albero e da quell'unico ramo del coalbero (*maglia fondamentale*). Per ogni ramo del coalbero, possiamo ripetere l'operazione formando ogni volta una maglia diversa, indipendente da tutte le altre^(*). Si può allora dimostrare che il numero di maglie indipendenti di un circuito (cioè l'insieme delle maglie fondamentali) è pari ai rami del coalbero, e precisamente $R - (N - 1) = R - N + 1$.

A titolo di esempio si consideri il grafo illustrato nella figura 1.a; uno dei possibili alberi è illustrato in figura 1.b (rami 2, 3 e 4). I rami tratteggiati sono quelli di coalbero (rami 1, 5 e 6). Le maglie indipendenti sono quindi $R - N + 1 = 3$, (in particolare $a = A1B2A$, $b = A2B3C4D6A$, $c = D4C5D$).

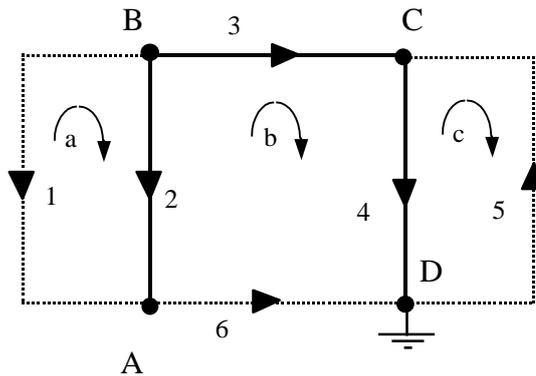


Figura 1.b

Applicando la LKT_m alle maglie così definite si ottiene il seguente sistema di equazioni lineari in cui compaiono solo le tensioni di ramo:

$$\begin{aligned}
 LKT_m: \quad & -v_1 + v_2 = 0 \\
 & -v_2 + v_3 + v_4 - v_6 = 0 \\
 & -v_4 - v_5 = 0
 \end{aligned} \tag{2.iii}$$

(una equazione per ogni maglia indipendente quindi in generale $R - N + 1$ equazioni in cui compaiono R tensioni di ramo; nell'esempio in oggetto possiamo quindi scrivere 3 LKT_m in cui compaiono 6 tensioni di ramo)

Si noti che le (2.iii) e le (2.ii) sono R equazioni in $2R$ incognite (tensioni di ramo e correnti di ramo): per risolvere il circuito dobbiamo aggiungere ancora R equazioni, e precisamente i modelli dei componenti.

Operativamente, per trovare le maglie indipendenti di un circuito, si deve associare un albero T al grafo G del circuito, quindi scrivere la LKT_m per ogni maglia associata ad un ramo del coalbero.

CIRCUITI PRIVI DI MEMORIA

I circuiti privi di memoria sono quelli in cui tutti i componenti del circuito sono privi di memoria ossia le loro caratteristiche tensione-corrente stabiliscono un legame istantaneo tra le due grandezze che non dipende dai valori da esse assunte in precedenza. In tal caso il sistema risolvibile del circuito stesso è costituito da un sistema di equazioni algebriche ed il valore di tutte le grandezze incognite in un generico

^(*) Un insieme di m maglie si dice indipendente se le m equazioni ottenute applicando la LKT ad ognuna di esse sono linearmente indipendenti. Pertanto, una maglia è indipendente da altre se la relativa equazione LKT è indipendente dalle equazioni LKT delle altre.

istante può essere calcolato dalla conoscenza del valore delle grandezze impresse del circuito in quello stesso istante.

Analisi di Tableau

Il metodo più generale, per l'analisi di un circuito qualunque (R = numero di rami del circuito, N = numero di nodi del circuito), consiste nel considerare come incognite del sistema le R correnti di ramo, le R tensioni di ramo e le $(N - 1)$ tensioni di nodo rispetto ad un nodo arbitrariamente scelto come nodo di riferimento. Il sistema risolvibile viene quindi ottenuto da R equazioni LKT_r (una per ogni ramo), da $N - 1$ equazioni LKC_n (una per ogni nodo, tranne quello di riferimento) e da R equazioni costitutive dei componenti.

A titolo di esempio si consideri il circuito illustrato nella figura 1, dove non sono stati indicati i versi positivi delle tensioni di ramo, perché si suppone di considerare comunque versi di riferimento associati con la regola dell'utilizzatore per tensioni e correnti di ramo.

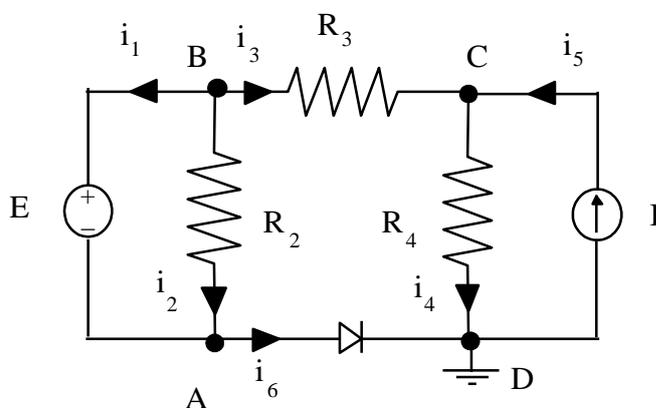


Figura 1

Si scelga arbitrariamente il nodo D come nodo di riferimento per le tensioni e si indichino con e_A , e_B ed e_C le tensioni dei nodi A, B e C rispetto al nodo di riferimento. Le equazioni LKT_r e LKC_n assumono allora la forma rispettivamente delle (2.i) e (2.ii):

$$\begin{aligned}
 v_1 &= e_B - e_A \\
 v_2 &= e_B - e_A \\
 v_3 &= e_B - e_C \\
 v_4 &= e_C \\
 v_5 &= -e_C
 \end{aligned}
 \tag{2.i}$$

($R = 6$ equazioni LKT_r in cui compaiono come incognite $R = 6$ tensioni di ramo ed $N - 1 = 3$ potenziali di nodo)

$$\begin{aligned}
 v_6 &= e_A \\
 i_1 + i_2 - i_6 &= 0 \\
 -i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\
 i_3 - i_4 + i_5 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.ii}$$

($N - 1 = 3$ equazioni LKC_n in cui compaiono come incognite $R = 6$ correnti di ramo)

Il sistema viene quindi chiuso dalle seguenti equazioni costitutive dei componenti:

(R = 6 equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono come incognite R = 6 tensioni di ramo ed R = 6 correnti di ramo)

$$\begin{aligned}
 v_1 &= E \\
 v_2 &= R_2 i_2 \\
 v_3 &= R_3 i_3 \\
 v_4 &= R_4 i_4 \\
 i_5 &= I \\
 v_6 i_6 &= 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

Il sistema costituito dalle equazioni (2.i), (2.ii) e (3), dove sono note le grandezze E, I, R₂, R₃, ed R₄, costituisce un sistema di 15 equazioni nelle 15 incognite del problema che sono rispettivamente e_A, e_B, e_C, v₁, v₂, v₃, v₄, v₅, v₆, i₁, i₂, i₃, i₄, i₅, i₆. Il sistema di equazioni risolvente è non lineare per la presenza del diodo che è un componente non lineare (ultima equazione delle (3)). Il procedimento illustrato è completamente trasferibile su un computer e la soluzione (o le soluzioni matematicamente possibili, poiché in generale, essendo il sistema non lineare, può esistere più di una soluzione) può essere ottenuta numericamente. In questo caso la soluzione può essere ottenuta eliminando la non linearità del sistema, considerando separatamente i due casi possibili: diodo in conduzione (i₆ ≥ 0, v₆ = 0) oppure diodo interdetto (i₆ = 0, v₆ ≤ 0).

Diodo in conduzione. Ponendo v₆ = 0 nelle (2.i) ed eliminando contemporaneamente l'ultima equazione delle (3) che è diventata una identità, si ottiene un sistema di 14 equazioni lineari nelle 14 incognite e_A, e_B, e_C, v₁, v₂, v₃, v₄, v₅, i₁, i₂, i₃, i₄, i₅, i₆, la cui soluzione è la seguente:

$$\begin{aligned}
 e_A &= 0 \quad ; \quad e_B = E \quad ; \quad e_C = R_4 \frac{E + R_3 I}{R_3 + R_4} \\
 v_1 &= E \quad ; \quad i_1 = -\frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4} - \frac{E}{R_2} \\
 v_2 &= E \quad ; \quad i_2 = \frac{E}{R_2} \\
 v_3 &= R_3 \frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4} \quad ; \quad i_3 = \frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4} \\
 v_4 &= R_4 \frac{E + R_3 I}{R_3 + R_4} \quad ; \quad i_4 = \frac{E + R_3 I}{R_3 + R_4} \\
 v_5 &= -R_4 \frac{E + R_3 I}{R_3 + R_4} \quad ; \quad i_5 = I \\
 i_6 &= -\frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Affinché la soluzione trovata non contraddica l'ipotesi di diodo in conduzione deve essere i₆ ≥ 0 e quindi, dalla ultima delle (4) deve essere:

$$E \leq R_4 I \tag{5}$$

Diodo interdetto. Ponendo i₆ = 0 nelle (2.ii) ed eliminando contemporaneamente l'ultima equazione delle (3) che è diventata una identità, si ottiene un sistema di 14 equazioni lineari nelle 14 incognite e_A, e_B, e_C, v₁, v₂, v₃, v₄, v₅, v₆, i₁, i₂, i₃, i₄, i₅, la cui soluzione è la seguente:

$$\begin{aligned}
e_A &= -E + R_4 I \quad ; \quad e_B = R_4 I \quad ; \quad e_C = R_4 I \\
v_1 &= E \quad ; \quad i_1 = -\frac{E}{R_2} \\
v_2 &= E \quad ; \quad i_2 = \frac{E}{R_2} \\
v_3 &= 0 \quad ; \quad i_3 = 0 \\
v_4 &= R_4 I \quad ; \quad i_4 = I \\
v_5 &= -R_4 I \quad ; \quad i_5 = I \\
v_6 &= -E + R_4 I
\end{aligned} \tag{6}$$

Affinché la soluzione trovata non contraddica l'ipotesi di diodo interdetto deve essere $v_6 \leq 0$ e quindi dalla ultima delle (6) deve essere:

$$E \geq R_4 I \tag{7}$$

Dal confronto della (5) con la (7) si vede che, una volta assegnati i valori di E , I ed R_4 , una sola delle due soluzioni è accettabile.

Riassumendo, per applicare il metodo di Tableau ad un circuito connesso qualunque (R = numero di rami del circuito, N = numero di nodi del circuito), si prende arbitrariamente un nodo come nodo di riferimento del circuito, si applica la LKT_r ad ogni ramo del circuito, si applica la LKC_n a tutti i nodi tranne quello di riferimento e si chiude il sistema con le equazioni costitutive (caratteristiche) dei componenti:

$$\begin{array}{ll}
R \text{ equazioni } LKT_r & \mathbf{v} = \mathbf{M} \mathbf{e} \\
N - 1 \text{ equazioni } LKC_n & \mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0} \\
R \text{ equazioni caratteristiche} & \mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}
\end{array}$$

dove \mathbf{v} è il vettore delle tensioni di ramo (dimensione R), \mathbf{i} è il vettore delle correnti di ramo (dimensione R), \mathbf{e} è il vettore delle tensioni di nodo (dimensione $N - 1$), \mathbf{M} è una matrice costante $R \times (N - 1)$ ed \mathbf{A} è una matrice costante $(N - 1) \times R$ [Come si è già visto, risulta che \mathbf{M} è la trasposta di \mathbf{A} , cioè: $\mathbf{M} = \mathbf{A}^T$]. In generale la funzione \mathbf{f} può dipendere anche dalla variabile temporale t , ma tale dipendenza, per semplicità di notazione, non è esplicitamente indicata. Il sistema risolvibile contiene dunque $2R + N - 1$ equazioni in $2R + N - 1$ incognite.

Nel caso particolare in cui tutti i componenti siano resistori lineari, generatori indipendenti di tensione e di corrente oppure generatori pilotati con caratteristica lineare, la rete si definisce lineare e le equazioni delle caratteristiche possono essere scritte nella forma

$$R \text{ equazioni caratteristiche} \quad \mathbf{H} \mathbf{i} + \mathbf{K} \mathbf{v} = \mathbf{S}$$

dove \mathbf{H} è una matrice costante $R \times R$, \mathbf{K} è una matrice costante $R \times R$ ed \mathbf{S} è il vettore di dimensione R che contiene le tensioni e le correnti impresse dai generatori indipendenti (sui rami in cui sono presenti e zero altrove). In tal caso il sistema risolvibile è lineare ed è possibile esprimere ogni variabile come combinazione lineare delle sole tensioni e correnti impresse dai generatori indipendenti. Con riferimento alla corrente sul k -esimo ramo potremo quindi scrivere:

$$i_k = \sum_n \underset{\text{gen.ind.tensione}}{g_{k,n}} E_{s,n} + \sum_m \underset{\text{gen.ind.corrente}}{\alpha_{k,m}} I_{s,m} \quad \text{per ogni } k$$

Tale relazione è l'enunciato del **Principio di Sovrapposizione degli Effetti**: *In una rete lineare la corrente in un generico ramo (effetto) è uguale alla somma algebrica delle correnti che vi sarebbero prodotte dai*

singoli generatori **indipendenti** presenti nella rete se agissero separatamente. Lo stesso vale per le tensioni di ramo e di nodo^(o).

Eliminazione delle tensioni di nodo

Le soluzioni (4) e (6) sono state ottenute risolvendo un sistema di 14 equazioni lineari in 14 incognite. Tale soluzione, anche se la matrice del sistema è sparsa, può risultare complessa. L'ordine del sistema risolvibile può essere ridotto osservando che è possibile ottenere un sistema di $2R$ equazioni indipendenti nelle sole tensioni e correnti di ramo incognite. Si consideri infatti la figura 2 in cui sono indicate 3 ($R - N + 1$ risulta in questo caso uguale a 3) maglie indipendenti del circuito individuate in figura 1.b.

Applicando la LKT_m alle maglie così definite si ottiene il seguente sistema di equazioni lineari in cui compaiono solo le tensioni di ramo:

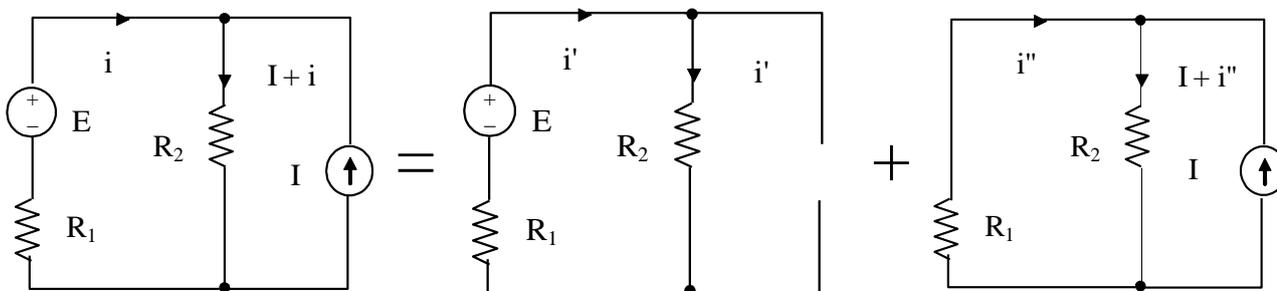
$$\begin{aligned} -v_1 + v_2 &= 0 \\ -v_2 + v_3 + v_4 - v_6 &= 0 \\ -v_4 - v_5 &= 0 \end{aligned} \quad (2.iii)$$

($R - N + 1 = 3$ equazioni LKT_m in cui come incognite compaiono $R = 6$ tensioni di ramo)

^(o) Risolvere una rete lineare con il principio di sovrapposizione degli effetti significa allora scomporre la rete originaria in tante rete parziali quanti sono i generatori indipendenti, calcolare la corrente nei rami per ognuna di queste reti, e sommare algebricamente le correnti parziali. Si calcoli ad esempio la corrente i nella resistenza R_1 della rete di figura. Si ha:

$$i = \frac{E}{R_1 + R_2} - \frac{R_2 I}{R_1 + R_2}$$

Ponendo $i' = \frac{E}{R_1 + R_2}$; $i'' = -\frac{R_2 I}{R_1 + R_2}$ si ha $i = i' + i''$, dove i' ed i'' sono le correnti nelle due sottoreti:



La prima è la rete che si ottiene da quella originaria, annullando l'azione del generatore indipendente di corrente, la seconda quella in cui è annullata l'azione del generatore indipendente di tensione. La figura illustra il concetto mostrando, nel contempo, in che modo si esclude l'azione dei generatori: i generatori indipendenti di tensione nulla sono equivalenti a cortocircuiti, i generatori indipendenti di corrente nulla sono equivalenti a circuiti aperti.

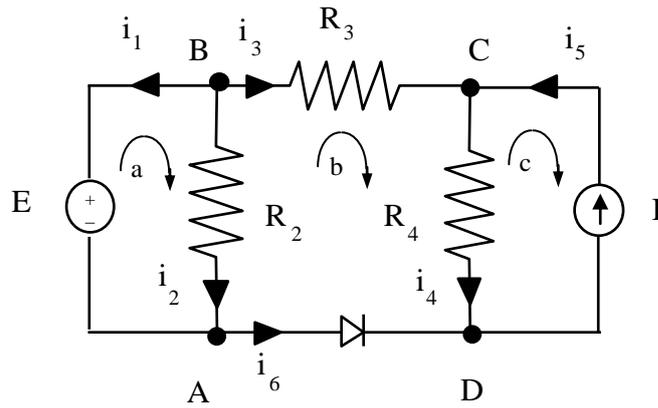


Figura 2

Le LKT_m (2.iii), le LKC_n (2.ii) e le relazioni costitutive (3) costituiscono un sistema di $2R$ equazioni, risolvendo il quale è possibile calcolare le $2R$ incognite tensioni e correnti di ramo.

($N - 1 = 3$ equazioni LKC_n in cui compaiono come incognite $R = 6$ correnti di ramo)

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 - i_6 &= 0 \\ -i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.ii)$$

$$\begin{aligned} i_3 - i_4 + i_5 &= 0 \\ v_1 &= E \end{aligned}$$

($R = 6$ equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono come incognite $R = 6$ tensioni di ramo ed $R = 6$ correnti di ramo)

$$\begin{aligned} v_2 &= R_2 i_2 \\ v_3 &= R_3 i_3 \\ v_4 &= R_4 i_4 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} i_5 &= I \\ v_6 i_6 &= 0 \end{aligned}$$

Infine, per tutti i componenti controllati in tensione (in questo esempio il ramo 5) o in corrente (in questo esempio i rami 1, 2, 3, e 4), è possibile sostituire le equazioni costitutive nelle LKT_m ed LKC_n . Tale sostituzione porta ad un sistema contenente un numero di equazioni pari a $R +$ (Numero di componenti non controllati né in tensione né in corrente), in altrettante variabili (tensioni o correnti di ramo). Nell'esempio in oggetto otterremo quindi (dato che il diodo è l'unico componente presente non controllato né in tensione né in corrente) il seguente sistema di 7 equazioni nelle incognite $v_5, v_6, i_1, i_2, i_3, i_4, i_6$:

$$\begin{aligned} -E + R_2 i_2 &= 0 \\ -R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4 - v_6 &= 0 \\ -R_4 i_4 - v_5 &= 0 \end{aligned} \quad (3.i)$$

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 - i_6 &= 0 \\ -i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\ i_3 - i_4 + I &= 0 \end{aligned} \quad (3.ii)$$

$$\begin{aligned} v_6 i_6 &= 0 \end{aligned} \quad (3.iii)$$

Riassumendo, per applicare il metodo dell'eliminazione delle tensioni di nodo ad un circuito connesso qualunque ($R =$ numero di rami del circuito, $N =$ numero di nodi del circuito), si applica la LKT_m ad ogni maglia indipendente del circuito, si applica la LKC_n a tutti i nodi tranne uno e si chiude il sistema con le equazioni costitutive (caratteristiche) dei componenti:

$$R - N + 1 \text{ equazioni } LKT_m$$

$$\mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$N - 1$ equazioni LKC_n

$$\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

R equazioni caratteristiche

$$f(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

dove \mathbf{v} è il vettore delle tensioni di ramo (dimensione R), \mathbf{i} è il vettore delle correnti di ramo (dimensione R), \mathbf{B} è una matrice costante $(R - N + 1) \times R$ ed \mathbf{A} è una matrice costante $(N - 1) \times R$. Il sistema risolvete contiene dunque $2R$ equazioni in $2R$ incognite. Tuttavia, se tutti i componenti sono controllati in tensione o in corrente è possibile sostituire le caratteristiche nelle LKT ed LKC, giungendo ad un sistema risolvete di R equazioni in R incognite.

Metodo dei Tagli Fondamentali

Una differente semplificazione del sistema risolvete (2.iii), (2.ii), (3) si può ottenere osservando che le LKC permettono di esprimere la corrente in ciascun ramo di albero come una combinazione lineare delle correnti sui rami di coalbero. Infatti, dato che l'albero associato al grafo è, per definizione, privo di maglie, è sempre possibile associare ad ogni ramo d'albero una superficie chiusa (superficie di taglio) che intersechi, oltre ad esso, solo rami di coalbero. L'insieme dei rami intersecati da tale superficie chiusa prende il nome di taglio (la rimozione del taglio separa il grafo in due sotto-grafi non connessi). Se il taglio contiene un solo ramo di albero, esso prende il nome di taglio fondamentale relativo a quel ramo e a quell'albero. In figura 2.b sono illustrati tre superfici che individuano i tagli fondamentali associati ai rami di albero (tagli fondamentali: [1, 2, 6], [3, 6], [4, 5, 6]) da cui è possibile ricavare le (8) applicando la Legge di Kirchhoff delle Correnti su tali superfici (LKC_t).

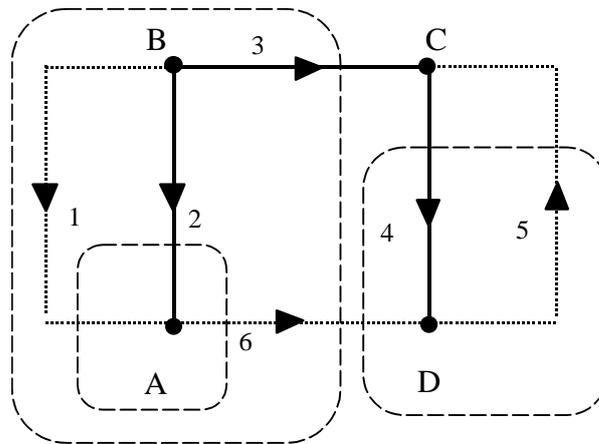


Figura 2.b

($N - 1 = 3$ equazioni LKC_t in cui compaiono come incognite $R = 6$ correnti di ramo)

$$\begin{aligned} i_2 &= -i_1 + i_6 \\ i_3 &= -i_6 \\ i_4 &= -i_6 + i_5 \end{aligned} \quad (8)$$

(una relazione per ogni ramo di albero quindi in generale $N - 1$ relazioni che esprimono le $N - 1$ correnti di albero in funzione delle $R - N + 1$ correnti sui rami di coalbero; nell'esempio in oggetto possiamo quindi scrivere 3 relazioni che esprimono le 3 correnti di albero i_2 , i_3 e i_4 in funzione delle 3 correnti sui rami di coalbero i_1 , i_5 e i_6)

Dato che le (8) sono state ottenute applicando la Legge di Kirchhoff delle Correnti, esse risultano equivalenti alle (2.ii) (infatti sostituendo le (8) nelle (2.ii) si ottengono tre identità $0 = 0$). Inoltre, per tutti i componenti sui rami di albero è possibile sostituire le relazioni (8) nelle relazioni costitutive dei

componenti. Tale sostituzione porta ad un sistema contenente un numero di equazioni pari a $2R - N + 1$, in altrettante variabili (tensioni di ramo e correnti di coalbero). Nell'esempio in oggetto otterremo quindi il seguente sistema di 9 equazioni nelle incognite $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, i_1, i_5, i_6$:

$$\begin{array}{l}
 (R - N + 1 = 3 \text{ equazioni LKT}_m \text{ in cui come incognite compaiono } R = 6 \text{ tensioni di ramo}) \\
 \\
 (R = 6 \text{ equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono come incognite } R = 6 \text{ tensioni di ramo ed } R - N + 1 = 3 \text{ correnti di coalbero})
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 -v_1 + v_2 = 0 \\
 -v_2 + v_3 + v_4 - v_6 = 0 \\
 -v_4 - v_5 = 0 \\
 v_1 = E \\
 v_2 = R_2(-i_1 + i_6) \\
 v_3 = -R_3 i_6 \\
 v_4 = R_4(-i_6 + i_5) \\
 i_5 = I \\
 v_6 i_6 = 0
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 (2.iii) \\
 \\
 \\
 \\
 (8.i) \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}$$

Infine, per tutti i componenti controllati in corrente (in questo esempio i rami 1, 2, 3, e 4), è possibile sostituire le equazioni costitutive nelle LKT_m. Tale sostituzione porta ad un sistema contenente un numero di equazioni pari a $R - N + 1 + (\text{Numero di componenti non controllati in corrente})$, in altrettante variabili (tensioni di ramo o correnti di coalbero). Nell'esempio in oggetto otterremo quindi (dato che il diodo ed il generatore di corrente non sono controllati in corrente) il seguente sistema di 5 equazioni nelle incognite v_5, v_6, i_1, i_5, i_6 :

$$\begin{array}{l}
 (R - N + 1 = 3 \text{ equazioni LKT}_m) \\
 \\
 (\text{equazione costitutive dei componenti non controllati in corrente})
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 -E + R_2(-i_1 + i_6) = 0 \\
 -R_2(-i_1 + i_6) - R_3 i_6 + R_4(-i_6 + i_5) - v_6 = 0 \\
 -R_4(-i_6 + i_5) - v_5 = 0 \\
 i_5 = I \\
 v_6 i_6 = 0
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 (8.ii) \\
 \\
 \\
 (8.iii)
 \end{array}$$

Si noti che risulta conveniente, se possibile, scegliere i rami dell'albero escludendo quelli contenenti generatori di corrente indipendenti. In tal caso infatti, si ottengono direttamente delle equazioni del tipo $i_5 = I$ (relazione costitutiva del generatore di corrente), che consentono di ridurre direttamente l'ordine del sistema.

Riassumendo, per applicare il metodo dei Tagli fondamentali ad un circuito connesso qualunque ($R =$ numero di rami del circuito, $N =$ numero di nodi del circuito), si definisce un albero (ed un coalbero), si applica la LKT_m ad ogni maglia fondamentale, si applica la LKC_t ad ogni taglio fondamentale e si chiude il sistema con le equazioni costitutive (caratteristiche) dei componenti:

$$\begin{array}{ll}
 R - N + 1 \text{ equazioni LKT}_m & \mathbf{B v} = \mathbf{0} \\
 N - 1 \text{ equazioni LKC}_t \text{ ed } R - N + 1 \text{ identità} & \mathbf{i} = \mathbf{Q i}_c \\
 R \text{ equazioni caratteristiche} & \mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}
 \end{array}$$

dove \mathbf{v} è il vettore delle tensioni di ramo (dimensione R), \mathbf{i} è il vettore delle correnti di ramo (dimensione R), \mathbf{i}_c è il vettore delle correnti dei rami di coalbero (dimensione $R - N + 1$), \mathbf{B} è una matrice costante $(R - N + 1) \times R$ detta matrice delle maglie fondamentali e \mathbf{Q} è una matrice costante $R \times (R - N + 1)$ [le prime $R - N + 1$ righe di \mathbf{Q} corrispondono ad identità] detta matrice dei tagli fondamentali. È dunque sempre possibile sostituire le LKC nelle equazioni caratteristiche ottenendo il sistema ridotto

R - N + 1 equazioni LKT_m

$$\mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

R equazioni caratteristiche

$$f(\mathbf{Q} \mathbf{i}_c, \mathbf{v}) = 0$$

Il sistema risolvibile contiene dunque $2R - N + 1$ equazioni in $2R - N + 1$ incognite. Tuttavia, se tutti i componenti sono controllati in corrente, cioè se $f(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{v} - \mathbf{h}(\mathbf{i})$, è possibile sostituire le caratteristiche nelle LKT, giungendo ad un sistema risolvibile di $R - N + 1$ equazioni nelle $R - N + 1$ incognite “correnti dei rami di coalbero”.

R - N + 1 equazioni LKT_m

$$\mathbf{B} \mathbf{h}(\mathbf{Q} \mathbf{i}_c) = \mathbf{0}$$

Metodo dei potenziali di nodo

Quando il numero dei nodi N del circuito è piccolo, è possibile e conveniente utilizzare il metodo dell'analisi dei nodi per scrivere un sistema risolvibile di (N - 1) equazioni nelle (N - 1) tensioni di nodo incognite del circuito. A tale scopo si considerino nuovamente le (2.i), (2.ii) e (3):

(R = 6 equazioni LKT_r in cui compaiono come incognite R = 6 tensioni di ramo ed N - 1 = 3 potenziali di nodo)

$$\begin{aligned} v_1 &= e_B - e_A \\ v_2 &= e_B - e_A \\ v_3 &= e_B - e_C \\ v_4 &= e_C \\ v_5 &= -e_C \\ v_6 &= e_A \end{aligned} \quad (2.i)$$

(N - 1 = 3 equazioni LKC_n in cui compaiono come incognite R = 6 correnti di ramo)

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 - i_6 &= 0 \\ -i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\ i_3 - i_4 + i_5 &= 0 \end{aligned} \quad (2.ii)$$

(R = 6 equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono come incognite R = 6 tensioni di ramo ed R = 6 correnti di ramo)

$$\begin{aligned} v_1 &= E \\ v_2 &= R_2 i_2 \\ v_3 &= R_3 i_3 \\ v_4 &= R_4 i_4 \\ i_5 &= I \\ v_6 i_6 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Per ogni ramo è possibile sostituire le relazioni (2.i) nelle relazioni costitutive dei componenti (3). Tale sostituzione porta ad un sistema contenente un numero di equazioni pari a $R + N - 1$, in altrettante variabili (potenziali di nodo e correnti di ramo). Nell'esempio in oggetto otterremo quindi il seguente sistema di 9 equazioni nelle incognite $e_A, e_B, e_C, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$:

(N - 1 = 3 equazioni LKC_n in cui compaiono come incognite R = 6 correnti di ramo)

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 - i_6 &= 0 \\ -i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\ i_3 - i_4 + i_5 &= 0 \end{aligned} \quad (2.ii)$$

(R = 6 equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono come incognite R = 6 correnti di ramo ed N - 1 = 3 potenziali di nodo)

$$\begin{aligned}
 e_B - e_A &= E \\
 e_B - e_A &= R_2 i_2 \\
 e_B - e_C &= R_3 i_3 \\
 e_C &= R_4 i_4 \\
 i_5 &= I \\
 e_A i_6 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{9.i}$$

Infine, per tutti i componenti controllati in tensione (in questo esempio i rami 2, 3, 4 e 5), è possibile esplicitare le correnti e sostituire le equazioni costitutive nelle LKC [$i_2 = (e_B - e_A)/R_2$, $i_3 = (e_B - e_C)/R_3$, $i_4 = e_C/R_4$, $i_5 = I$]. Tale sostituzione porta ad un sistema contenente un numero di equazioni pari a N - 1 + (Numero di componenti non controllati in tensione), in altrettante variabili (correnti di ramo o potenziali di nodo). Nell'esempio in oggetto otterremo quindi (dato che il diodo ed il generatore di tensione non sono controllati in tensione) il seguente sistema di 5 equazioni nelle incognite e_A, e_B, e_C, i_1, i_6 :

$$\begin{aligned}
 i_1 + \frac{e_B - e_A}{R_2} - i_6 &= 0 \\
 (N - 1 = 3 \text{ equazioni LKC}_n) \quad -i_1 - \frac{e_B - e_A}{R_2} - \frac{e_B - e_C}{R_3} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{9.ii}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{e_B - e_C}{R_3} - \frac{e_C}{R_4} + I &= 0 \\
 (\text{equazioni costitutive dei componenti non controllati in tensione}) \quad e_B - e_A &= E \\
 e_A i_6 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{9.iii}$$

Riassumendo, per applicare il metodo dei potenziali di nodo ad un circuito connesso qualunque (R = numero di rami del circuito, N = numero di nodi del circuito), si prende arbitrariamente un nodo come nodo di riferimento del circuito, si applica la LKT_r ad ogni ramo del circuito, si applica la LKC_n a tutti i nodi tranne quello di riferimento e si chiude il sistema con le equazioni costitutive (caratteristiche) dei componenti:

$$R \text{ equazioni LKT}_r \quad \mathbf{v} = \mathbf{M} \mathbf{e}$$

$$N - 1 \text{ equazioni LKC}_n \quad \mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

$$R \text{ equazioni caratteristiche} \quad \mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

dove \mathbf{v} è il vettore delle tensioni di ramo (dimensione R), \mathbf{i} è il vettore delle correnti di ramo (dimensione R), \mathbf{e} è il vettore delle tensioni di nodo (dimensione N - 1), \mathbf{M} è una matrice costante R × (N - 1) ed \mathbf{A} è una matrice costante (N - 1) × R. È dunque sempre possibile sostituire le LKT nelle equazioni caratteristiche ottenendo il sistema ridotto

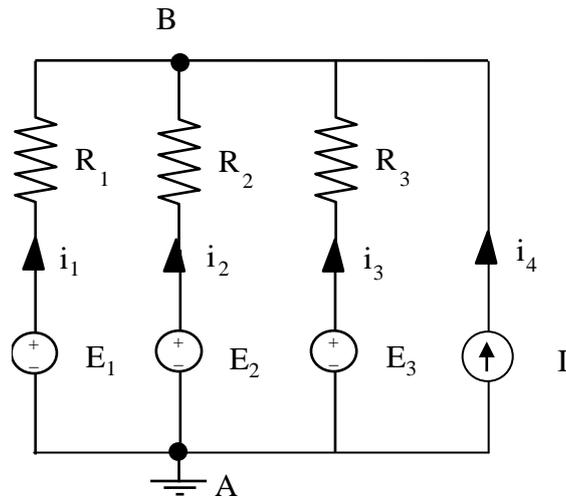
$$N - 1 \text{ equazioni LKC}_n \quad \mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

$$R \text{ equazioni caratteristiche} \quad \mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{M} \mathbf{e}) = \mathbf{0}$$

Il sistema risolvibile contiene dunque R + N - 1 equazioni in R + N - 1 incognite. Tuttavia, se tutti i componenti sono controllati in tensione, cioè se $\mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{i} - \mathbf{g}(\mathbf{v})$, è possibile sostituire le caratteristiche nelle LKC, giungendo ad un sistema risolvibile di N - 1 equazioni nelle N - 1 incognite "tensioni di nodo".

$$N - 1 \text{ equazioni LKC}_n \quad \mathbf{A} \mathbf{g}(\mathbf{M} \mathbf{e}) = \mathbf{0}$$

Il metodo dei potenziali di nodo è particolarmente utile quando il numero di nodi è piccolo e tutti i componenti sono controllati in tensione. Come esempio limite si consideri il circuito illustrato nella figura, che contiene un solo nodo indipendente ($N - 1 = 1$). Tre componenti, costituiti ciascuno da un generatore indipendente di tensione e da un resistore collegati in serie (generatore di tensione reale), sono collegati in parallelo a un generatore di corrente. Prendendo il nodo A come nodo di riferimento, è presente una sola tensione di nodo $e_B = v_{BA}$ incognita.



Ciascuno dei componenti è controllato in tensione. Infatti, dalla legge costitutiva dei componenti, si può esprimere la corrente in ogni ramo del circuito in funzione della tensione ai suoi capi:

$$v_{BA} = E_k - R_k i_k \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} i_k &= G_k (E_k - v_{BA}) & , k = 1, 2, 3 \\ i_4 &= I \end{aligned} \quad (12)$$

La tensione ai capi di ciascun ramo, dalle LKT_r può essere espressa come differenza delle tensioni di nodo dei nodi cui il ramo è collegato. Il sistema risolvibile si ottiene scrivendo la LKC_n per ogni nodo del circuito, escluso quello di riferimento, e risulta quindi costituito da $(N - 1) = 1$ equazioni nelle $(N - 1) = 1$ tensioni di nodo incognite. Con riferimento all'esempio di figura risulta:

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^3 G_k (E_k - v_{BA}) + I = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{BA} = \frac{\sum_{k=1}^3 G_k E_k + I}{\sum_{k=1}^3 G_k} = \frac{\sum_{k=1}^3 \frac{E_k}{R_k} + I}{\sum_{k=1}^3 \frac{1}{R_k}} \quad (13)$$

L'ultima relazione delle (13), che mostra la relazione tra la tensione di nodo v_{BA} , le tensioni e la corrente impressa dei generatori e le resistenze dei rami stessi; viene anche indicata col nome di **Teorema di Millman**, e può essere estesa ad un numero qualsiasi di generatori reali in parallelo.

Supponendo, ad esempio, che i dati del problema siano: $E_1 = 110 \text{ V}$, $E_2 = 105 \text{ V}$, $E_3 = 0 \text{ V}$, $R_1 = 0.5 \Omega$, $R_2 = 0.5 \Omega$, $R_3 = 5 \Omega$, $I = 3 \text{ A}$ dalla (13) si ottiene $v_{BA} = 103.1 \text{ V}$ e sostituendo nelle (12) $i_1 = 13.8 \text{ A}$, $i_2 = 3.8 \text{ A}$, $i_3 = -20.6 \text{ A}$.

Teorema di Thevenin

Ipotesi. Sono dati due bipoli, L ed N collegati come illustrato nella figura 3. Il bipolo L è una rete lineare e controllato in corrente, mentre il bipolo N può essere qualsiasi, anche non lineare.

Tesi. Limitatamente alla corrente i ed alla tensione v_{AB} alla porta, il circuito che si ottiene sostituendo il bipolo L (quello lineare) con un generatore di tensione ed un bipolo L' collegati in serie, è equivalente in ogni istante al circuito originale. Il bipolo L' si ottiene dal bipolo L annullando le grandezze impressa dei generatori indipendenti di tensione e di corrente eventualmente presenti (i generatori indipendenti di tensione vengono quindi sostituiti con dei corto-circuiti ed i generatori indipendenti di corrente vengono

sostituiti con dei circuiti aperti). La tensione impressa E_0 del generatore di tensione di Thevenin è pari al valore della tensione v_{AB} alla porta del bipolo L quando la corrente i è nulla (È da notare che il verso positivo di E_0 è arbitrario: una volta scelto il verso positivo, il valore di E_0 è pari alla tensione v_{AB} se il terminale positivo è A , è pari invece a $-v_{AB}$ se il terminale positivo è B)

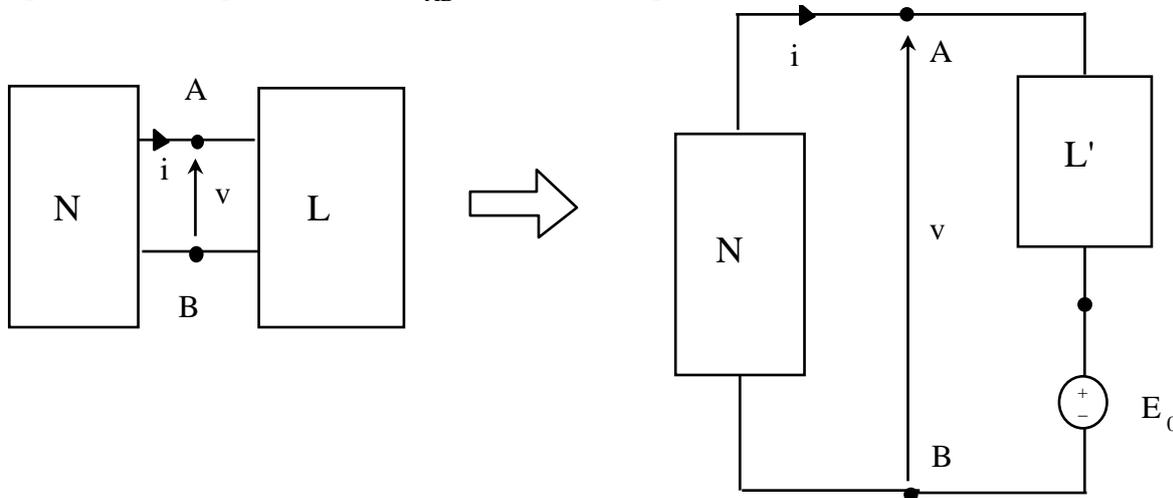
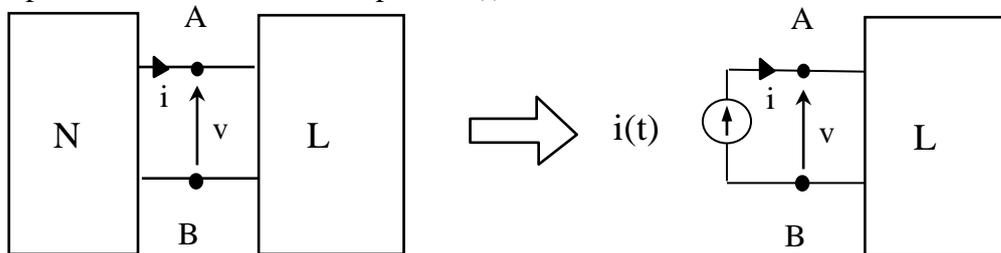
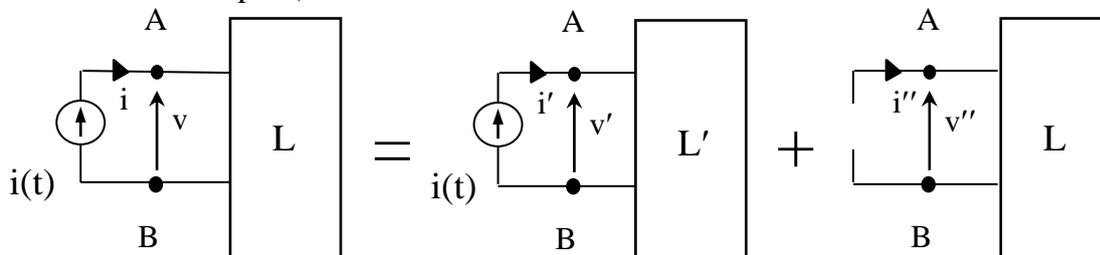


Figura 3 Teorema di Thevenin

Dimostrazione: poiché il bipolo L è controllato in corrente (data la corrente è possibile determinare la tensione ai terminali), è possibile, ai fini del calcolo della tensione v , sostituire al bipolo N un generatore di corrente indipendente la cui corrente impressa $i(t)$ coincide con la corrente assorbita dal bipolo L .



Dato che il bipolo L è lineare, è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. In particolare, consideriamo due circuiti: nel primo azzeriamo i generatori indipendenti in L (e indicheremo tale bipolo con L'), nel secondo azzeriamo il generatore indipendente di corrente (come già visto, i generatori indipendenti di tensione nulla sono equivalenti a cortocircuiti, i generatori indipendenti di corrente nulla sono equivalenti a circuiti aperti).



Si ha:

$$i = i' + i'', \text{ dove } i' \text{ ed } i'' \text{ sono le correnti nelle due sottoreti:}$$

e

$$v = v' + v'', \text{ dove } v' \text{ ed } v'' \text{ sono le tensioni nelle due sottoreti:}$$

È evidente tuttavia che $i' = i(t)$ e che $i'' = 0$. Inoltre, applicando la LKT alle due sottoreti otteniamo (si ricordi che per ipotesi L è controllato in corrente):

$$v' = V_{L'}(i') = V_{L'}(i)$$

$$v'' = V_L(i'') = V_L(0)$$

dove $V_{L'}(\cdot)$ ed $V_L(\cdot)$ rappresentano le caratteristiche dei bipoli L' ed L , rispettivamente. Infine, definendo $E_0 = V_L(0) = v_{AB}|_{L \text{ a vuoto}}$ si ottiene:

$$v = V_{L'}(i) + E_0$$

che è proprio la caratteristica del bipolo equivalente mostrato in figura 3. Il teorema di Thevenin, come enunciato, è valido in regime qualsiasi. In particolare, in regime stazionario (corrente continua) si ha che “Un circuito lineare L con due terminali controllato in corrente è equivalente a un generatore di tensione reale (bipolo di Thevenin) formato da un generatore indipendente di tensione E_0 in serie con un resistore R_e , in cui E_0 è la tensione a vuoto ai terminali e R_e è la resistenza vista ai terminali quando i generatori indipendenti sono spenti”. Infatti, poiché il bipolo L è lineare e controllato in corrente, la sua relazione costitutiva è esprimibile per ipotesi come $V_{L'}(i) = R_e i$. Questo è sufficiente a definire univocamente il valore di R_e . Risulta infatti:

$$R_e = V_{L'}(i) / i = (v_{AB} / i)_{\text{Generatori Indipendenti di } L \text{ Spenti}}$$

Si può applicare il teorema di Thevenin alla soluzione del circuito di figura 1 considerando come bipolo N il diodo ideale e quindi come bipolo L l'insieme di tutti gli altri componenti del circuito (vedi figura 4.a). Il bipolo L' è quello indicato nella figura 4.b, mentre il valore della tensione E_0 viene calcolato risolvendo il circuito riportato nella figura 4.c ed è dato dalla relazione (10).

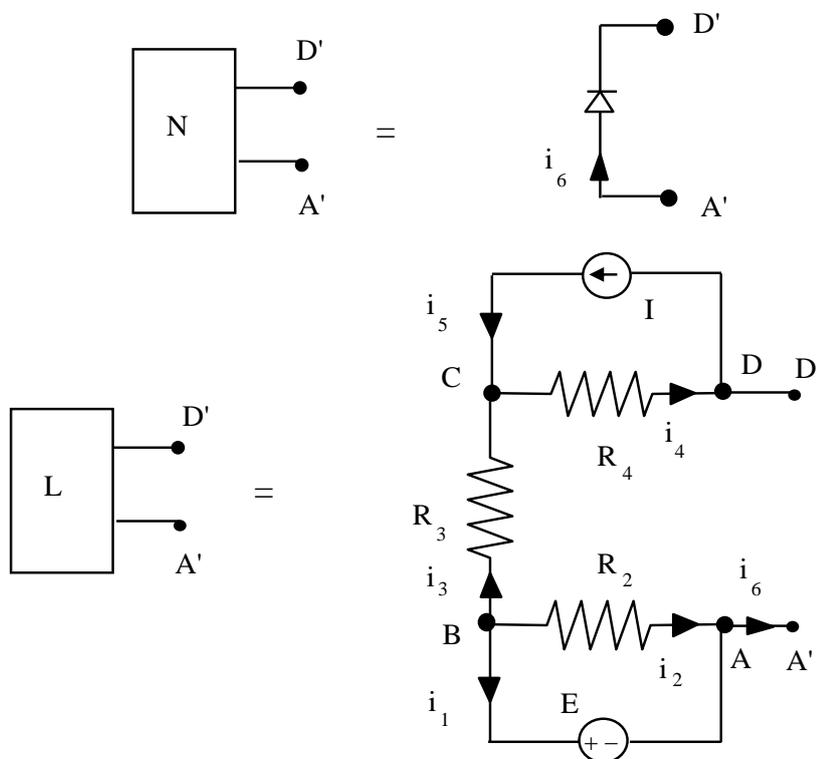


Figura 4.a

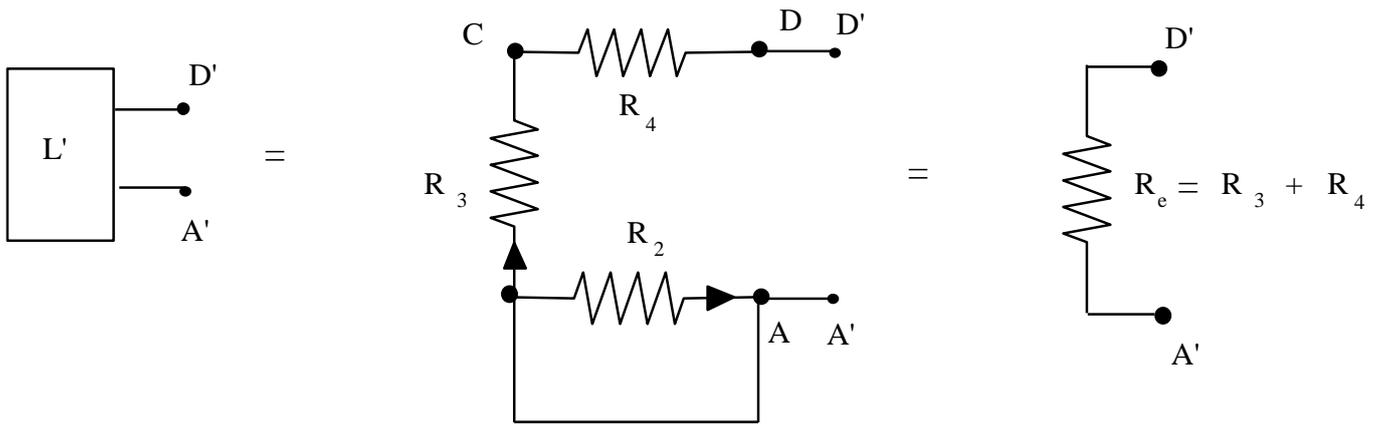
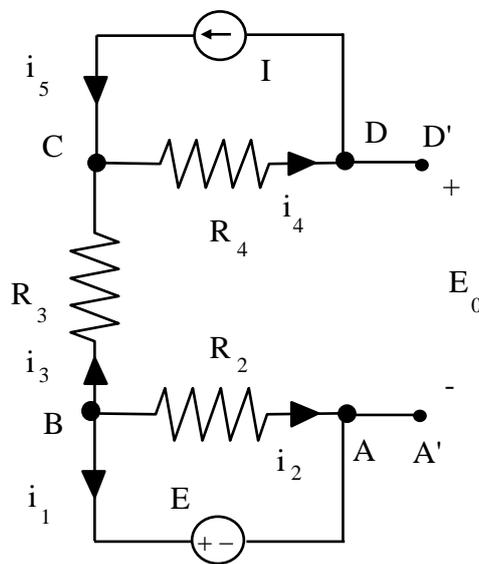


Figura 4.b



$$E_0 = E - R_4 I \quad (10)$$

Figura 4.c – La soluzione del circuito di figura è immediata notando che il ramo 3 costituisce un taglio fondamentale. Pertanto $i_3 = 0$, e dunque si ha che

$$i_4 = i_5 = I$$

ed

$$i_2 = -i_1 = E/R_2$$

Infine la valutazione di E_0 si ottiene applicando la LKT alla sequenza ABCDA:

$$0 = -R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4 + E_0$$

ovvero

$$E_0 = E - R_4 I$$

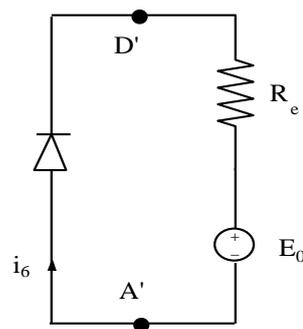


Figura 5

Infine il valore della corrente i_6 viene ottenuto risolvendo il circuito illustrato nella figura 5, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo circuito equivalente di Thevenin.

Si ritrova quindi che sono possibili due casi: diodo interdetto oppure diodo in conduzione. Se il diodo è interdetto allora la corrente i_6 è nulla e la tensione $v_{A'D'}$, che essendo nulla la caduta di tensione sulla resistenza R_e (corrente nulla) coincide con $-E_0$, deve essere minore od uguale a zero, da cui scende ancora la relazione (7). Se il diodo è in conduzione allora la corrente i_6 è pari a $-E_0/R_e$ e deve risultare maggiore od uguale a zero, da cui si ricava nuovamente la (5).

Supponendo ad esempio che i dati del problema siano i seguenti: $E = 24 \text{ V}$, $I = 4 \text{ A}$, $R_2 = 2 \text{ } \Omega$, $R_3 = 12 \text{ } \Omega$, $R_4 = 8 \text{ } \Omega$ risulta:

$$E = 24 \quad \rightarrow \quad E < R_4 \cdot I \quad \rightarrow \quad \text{diodo in conduzione}$$

$$R_4 \cdot I = 32$$

e quindi dalla soluzione del circuito di figura 5 e dalle leggi di Kirchhoff per il circuito di figura 1 si ottiene:

$$v_6 = 0$$

$$i_6 = -\frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4} = 0.4 \text{ A}$$

$$i_4 = I - i_6 = 3.6 \text{ A}$$

$$v_4 = R_4 i_4 = 28.8 \text{ V}$$

$$i_5 = I = 4 \text{ A}$$

$$v_5 = -v_4 = -28.8 \text{ V}$$

$$i_3 = -i_6 = -0.4 \text{ A}$$

$$v_3 = R_3 i_3 = -4.8 \text{ V}$$

$$v_2 = E = 24 \text{ V}$$

$$i_2 = \frac{v_2}{R_2} = 12 \text{ A}$$

$$v_1 = E = 24 \text{ V}$$

$$i_1 = i_6 - i_2 = -11.6 \text{ A}$$

È da notare che la soluzione del circuito di figura 1 in cui sono presenti solo generatori e resistori (lineari e non), cioè elementi privi di memoria, si ottiene mediante relazioni algebriche, in ogni istante, dal valore che in quell'istante hanno le eccitazioni del sistema, cioè le grandezze impresse dei generatori.

Analogo al teorema di Thevenin, con ipotesi simili e le stesse possibilità di applicazione è il teorema di Norton.

Teorema di Norton

Ipotesi. Sono dati due bipoli, L ed N collegati come illustrato nella figura 6. Il bipolo L è una rete lineare e controllato in tensione, mentre il bipolo N può essere qualsiasi, anche non lineare.

Tesi. Limitatamente alla corrente i ed alla tensione v_{AB} alla porta, il circuito che si ottiene sostituendo il bipolo L (quello lineare) con un generatore di corrente ed un bipolo L' collegati in parallelo, è equivalente in ogni istante al circuito originale. Il bipolo L' si ottiene dal bipolo L annullando le grandezze impresse dei generatori indipendenti di tensione e di corrente eventualmente presenti (il bipolo L' è lo stesso che interviene nel teorema di Thevenin). La corrente impressa I_c del generatore di corrente di Norton è pari al valore della corrente i alla porta del bipolo L quando la tensione v_{AB} è nulla (E' da notare che il verso positivo di I_c è arbitrario: una volta scelto il verso positivo il valore di I_c è pari alla corrente i se la freccia punta verso il terminale dove la corrente i esce da L, è pari invece a $-i$ se la freccia punta verso il terminale dove la corrente i entra in L)

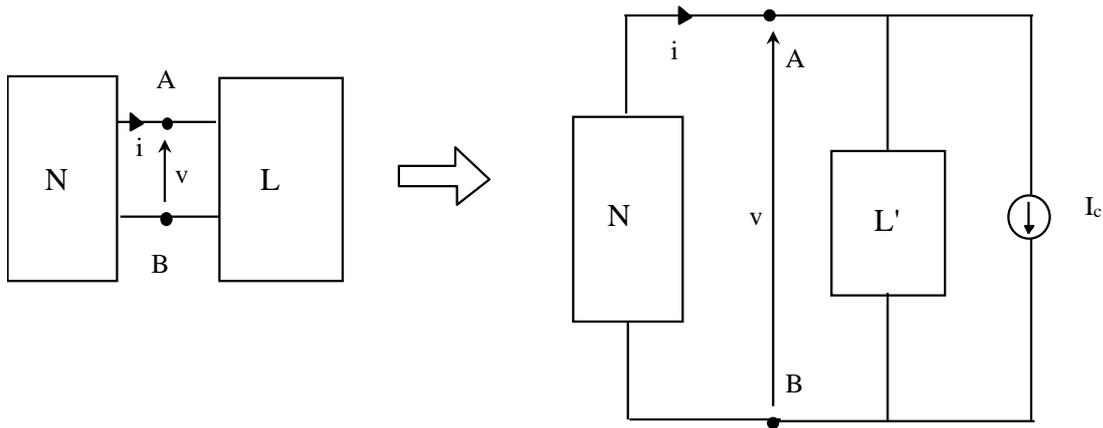
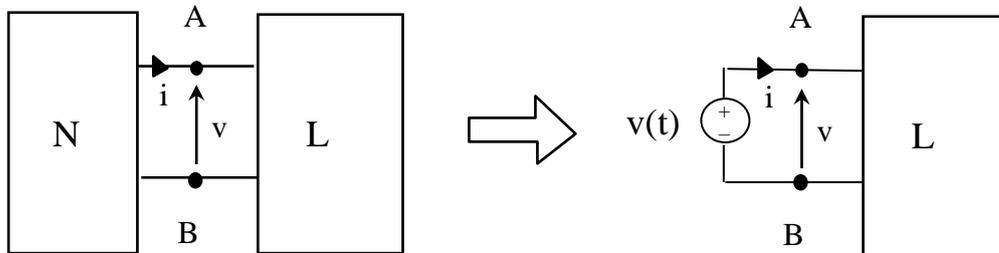
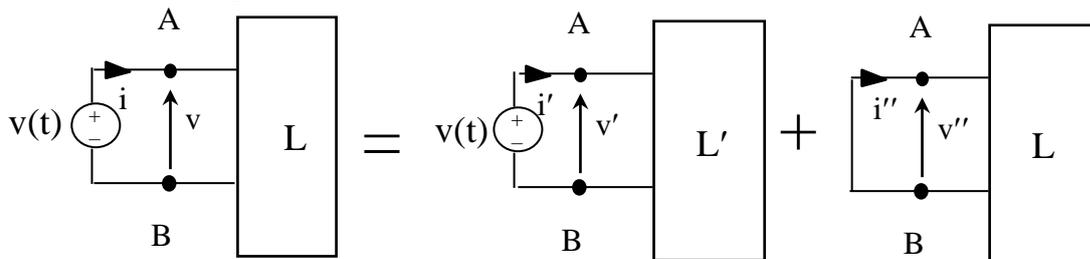


Figura 6 Teorema di Norton

Dimostrazione: poiché il bipolo L è controllato in tensione (data la tensione è possibile determinare la corrente assorbita), è possibile, ai fini del calcolo della corrente i , sostituire al bipolo N un generatore di tensione indipendente la cui tensione impressa $v(t)$ coincide con la tensione ai terminali del bipolo L.



Dato che il bipolo L è lineare, è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. In particolare, consideriamo due circuiti: nel primo azzeriamo i generatori indipendenti in L (e indicheremo tale bipolo con L', nel secondo azzeriamo il generatore indipendente di tensione (come già visto, i generatori indipendenti di tensione nulla sono equivalenti a cortocircuiti, i generatori indipendenti di corrente nulla sono equivalenti a circuiti aperti.).



Si ha:

$$i = i' + i'', \text{ dove } i' \text{ ed } i'' \text{ sono le correnti nelle due sottoreti:}$$

e

$$v = v' + v'', \text{ dove } v' \text{ ed } v'' \text{ sono le tensioni nelle due sottoreti:}$$

È evidente tuttavia che $v' = v(t)$ e che $v'' = 0$. Inoltre, applicando la LKC alle due sottoreti otteniamo (si ricordi che per ipotesi L è controllato in tensione):

$$i' = I_{L'}(v') = I_{L'}(v)$$

$$i'' = I_L(v'') = I_L(0)$$

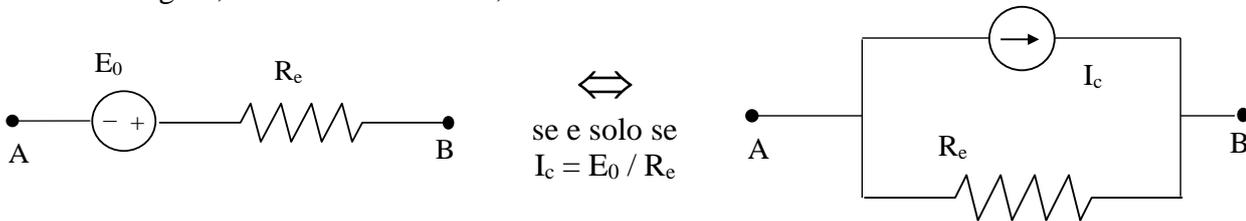
dove $I_{L'}(\cdot)$ ed $I_L(\cdot)$ rappresentano le caratteristiche dei bipoli L' ed L, rispettivamente. Infine, definendo $I_c = I_L(0) = i|_L$ in cortocircuito si ottiene:

$$i = I_{L'}(v) + I_c$$

che è proprio la caratteristica del bipolo equivalente mostrato in figura 6. Il teorema di Norton, come enunciato, è valido in regime qualsiasi. In particolare, in regime stazionario (corrente continua) si ha che “Un circuito lineare L con due terminali controllato in tensione è equivalente a un bipolo (bipolo di Norton) formato da un generatore indipendente di corrente I_c in parallelo con un resistore R_e , in cui I_c è la corrente di cortocircuito tra i terminali e R_e è la resistenza vista ai terminali quando i generatori indipendenti sono spenti”. Infatti, poiché il bipolo L è lineare e controllato in tensione, la sua relazione costitutiva è esprimibile per ipotesi come $I_{L'}(v) = v/R_e$. Questo è sufficiente a definire univocamente il valore di R_e . Risulta infatti:

$$R_e = v/I_{L'}(v) = (v_{AB}/i)_{\text{Generatori indipendenti di L Spenti}}$$

Si noti che tale espressione coincide con quella trovata nel teorema di Thevenin. Infatti, applicando il teorema di Norton al bipolo di Thevenin in regime stazionario (corrente continua) si ottiene l'equivalenza mostrata in figura, valida se $I_c = E_0 / R_e$, ovvero se $E_0 = R_e I_c$.



Infine, i teoremi di Thevenin e di Norton, possono essere enunciati anche se nel bipolo L sono presenti induttori lineari e condensatori lineari.

Si può applicare il teorema di Norton alla soluzione del circuito di figura 1 considerando come bipolo N il diodo ideale e quindi come bipolo L l'insieme di tutti gli altri componenti del circuito (vedi figura 7.a). Il bipolo L' è quello indicato nella figura 7.b, mentre il valore della corrente I_c viene calcolata risolvendo il circuito riportato nella figura 7.c ed è dato dalla relazione (11).

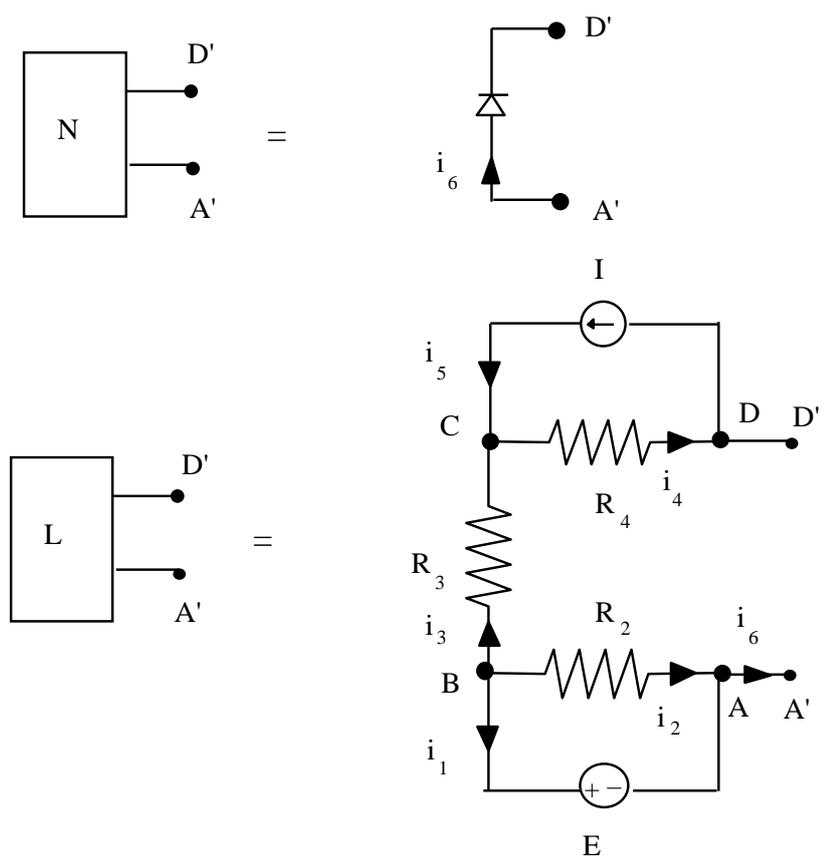


Figura 7.a

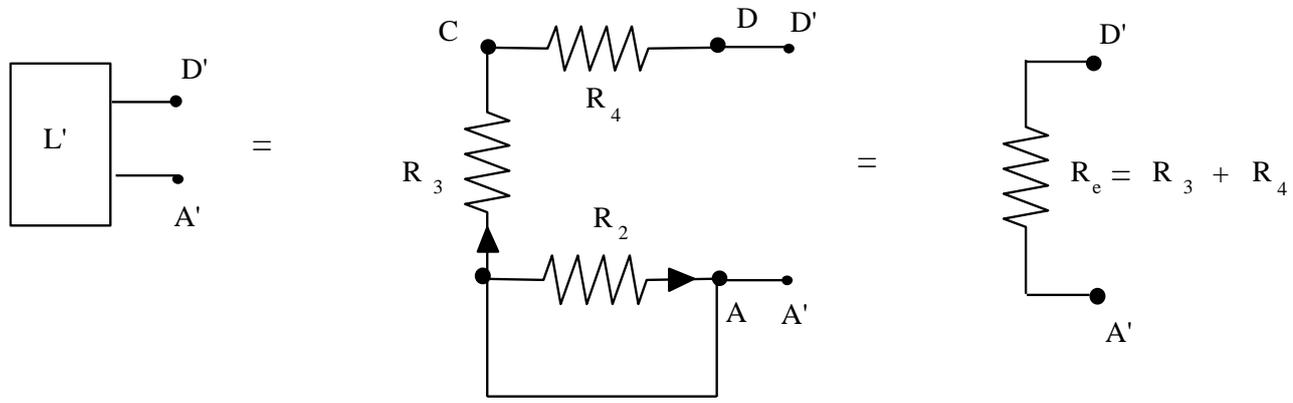


Figura 7.b

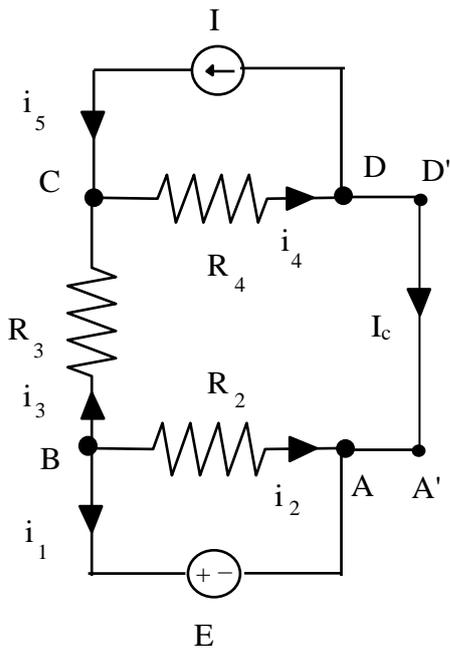


Figura 7.c – La soluzione del circuito di figura è immediata notando che:

$$\begin{aligned} i_5 &= I \\ i_4 &= I + I_c \\ i_3 &= I_c \\ i_2 &= E/R_2 \\ i_1 &= -I_c - E/R_2 \end{aligned}$$

Infine la valutazione di I_c si ottiene applicando la LKT alla sequenza ABCDA:

$$\begin{aligned} 0 &= -R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4 \\ 0 &= -E + R_3 I_c + R_4 (I + I_c) \end{aligned}$$

ovvero $(R_3 + R_4) I_c = E - R_4 I$

$$I_c = \frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4} \quad (11)$$

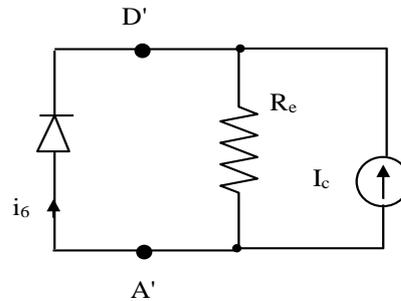


Figura 8

Infine il valore della corrente i_6 viene ottenuto risolvendo il circuito illustrato nella figura 8, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo circuito equivalente di Norton.

Si ritrova quindi che sono possibili due casi: diodo interdetto oppure diodo in conduzione. Se il diodo è interdetto allora la corrente i_6 è nulla e la tensione $v_{A'D'}$, che coincide con la caduta di tensione sulla resistenza R_e , cioè con $-R_e I_c$, deve essere minore od uguale a zero, da cui discende ancora la relazione (7). Se il diodo è in conduzione allora la corrente i_6 è pari a $-I_c$ e deve risultare maggiore od uguale a zero, da cui si ricava nuovamente la (5).

Trasformazioni stella-triangolo e triangolo-stella

Nella figura 9 sono mostrati tre resistori collegati a stella; nella figura 10 sono mostrati tre resistori collegati a triangolo. Entrambi i sistemi costituiscono un tripolo che viene collegato al circuito esterno attraverso i tre terminali A, B e C. Facendo uso delle Leggi di Kirchhoff e delle relazioni costitutive dei resistori è possibile dimostrare che, per quanto riguarda le tensioni e le correnti ai terminali (i_A , i_B e i_C), è possibile sostituire tre resistori collegati a stella con tre resistori, di resistenza opportuna, collegati a triangolo e viceversa. La sostituzione va intesa nel senso che qualunque sia il sistema di tensioni applicate ai terminali A, B e C il sistema di correnti assorbito dai due carichi è lo stesso.

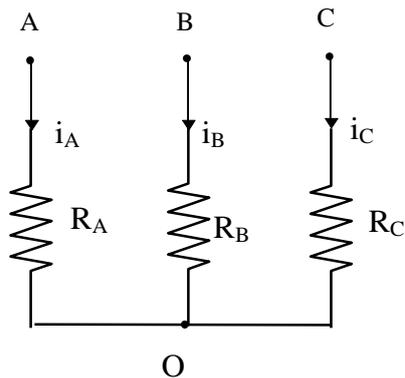


Figura 9

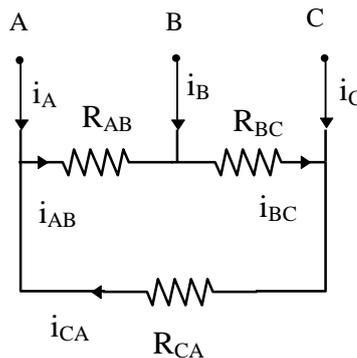


Figura 10

Con riferimento alle figure 9 e 10, le espressioni delle resistenze equivalenti per le trasformazioni stella-triangolo e triangolo-stella sono le seguenti dove è indicata con G la conduttanza, cioè l'inverso della resistenza R .

Trasformazione triangolo-stella

$$R_A = \frac{R_{AB} R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$$R_B = \frac{R_{BC} R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$$R_C = \frac{R_{CA} R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

Trasformazione stella-triangolo

$$G_{AB} = \frac{G_A G_B}{G_A + G_B + G_C}$$

$$G_{BC} = \frac{G_B G_C}{G_A + G_B + G_C}$$

$$G_{CA} = \frac{G_C G_A}{G_A + G_B + G_C}$$

CIRCUITI NON CONNESSI

Tutti i circuiti visti sinora godono della *proprietà di connessione*, secondo la quale tutto il circuito è connesso elettricamente, e quindi per ogni coppia di nodi del circuito è possibile trovare un percorso che li connetta seguendo i rami del grafo. Consideriamo ora il caso in cui il circuito da studiare sia costituito da due o più sottoreti non connesse. Si consideri ad esempio il circuito di figura 19.a. Sostituendo al trasformatore ideale il suo circuito equivalente si ottiene la rete elettrica non connessa di figura 19.b. Dato che la rete non è connessa, non è possibile per ogni nodo del circuito trovare un percorso che, seguendo i rami del grafo, connetta tale nodo al nodo di riferimento. Analogamente, non è possibile definire un albero per l'intero circuito. I metodi di Tableau, delle tensioni di nodo e delle correnti di coalbero non sono quindi direttamente applicabili. Possiamo però applicare il metodo dell'eliminazione delle tensioni di nodo (in cui le variabili sono le tensioni e le correnti di ramo) ad ogni sottorete. In particolare, per il circuito di figura 19.b, la sottorete di sinistra (1) ha $R_1 = 2$ rami e $N_1 = 2$ nodi, e la sottorete di destra (2) ha $R_2 = 2$ rami e $N_2 = 2$ nodi.

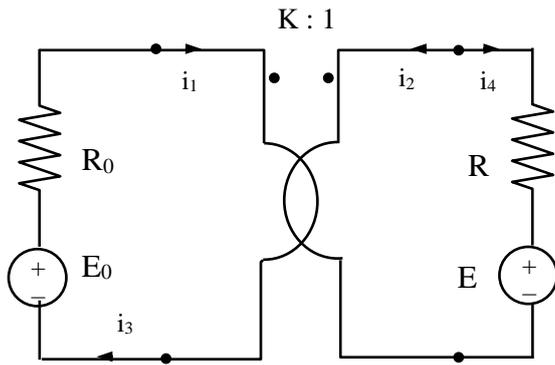


Figura 19.a

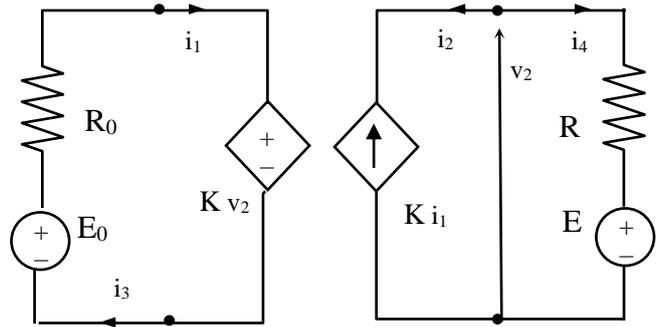


Figura 19.b

Le LKT_m, le LKC_n e le relazioni costitutive della sottorete di sinistra (1) costituiscono un sistema di $2 R_1$ equazioni in cui compaiono le $2 (R_1 + R_2)$ tensioni e le correnti di ramo di tutta la rete:

$$(R_1 - N_1 + 1 = 1 \text{ equazioni LKT}_m \text{ per la sottorete (1)}) \quad v_1 + v_3 = 0 \quad (22.i)$$

$$(N_1 - 1 = 1 \text{ equazioni LKC}_n \text{ per la sottorete (1)}) \quad i_1 - i_3 = 0 \quad (22.ii)$$

$$(R_1 = 2 \text{ caratteristiche dei componenti della sottorete (1)}) \quad \begin{aligned} v_1 &= K v_2 \\ v_3 &= -E_0 + R_0 i_3 \end{aligned} \quad (22.iii)$$

Le LKT_m, le LKC_n e le relazioni costitutive della sottorete di destra (2) costituiscono un sistema di $2 R_2$ equazioni in cui compaiono le $2 (R_1 + R_2)$ tensioni e le correnti di ramo di tutta la rete:

$$(R_2 - N_2 + 1 = 1 \text{ equazioni LKT}_m \text{ per la sottorete (2)}) \quad v_2 - v_4 = 0 \quad (23.i)$$

$$(N_2 - 1 = 1 \text{ equazioni LKC}_n \text{ per la sottorete (2)}) \quad i_2 + i_4 = 0 \quad (23.ii)$$

$$(R_2 = 2 \text{ caratteristiche dei componenti della sottorete (2)}) \quad \begin{aligned} i_2 &= -K i_1 \\ v_4 &= R i_4 + E \end{aligned} \quad (23.iii)$$

Pertanto, le (22), (23), costituiscono un sistema di $2 (R_1 + R_2)$ equazioni in cui compaiono le $2 (R_1 + R_2)$ tensioni e le correnti di ramo di tutta la rete. Analogamente quindi ai circuiti connessi, le LKT_m, le LKC_n (applicate ad ogni sottorete) e le relazioni costitutive costituiscono un sistema di $2R$ equazioni, risolvendo il quale è possibile calcolare le $2R$ incognite tensioni e correnti di ramo.^(o)

La soluzione del sistema (22-23) è la seguente:

$$\begin{aligned} i_1 = i_3 &= \frac{E_0 - KE}{R_0 + K^2 R} & i_2 = -i_4 &= -K \frac{E_0 - KE}{R_0 + K^2 R} \\ v_1 = -v_3 &= K \frac{KRE_0 + R_0 E}{R_0 + K^2 R} & v_2 = v_4 &= \frac{KRE_0 + R_0 E}{R_0 + K^2 R} \end{aligned}$$

Supponendo, ad esempio, che i dati del problema siano: $E_0 = 100 \text{ V}$, $E = 12 \text{ V}$, $K = 10 \text{ V}$, $R_0 = 0.5 \Omega$, $R = 0.1 \Omega$ si ottiene $i_1 = -1.905 \text{ A}$, $i_2 = 19.05 \text{ A}$, $i_3 = -1.905 \text{ A}$, $i_4 = -19.05 \text{ A}$, ottiene $v_1 = 100.9 \text{ A}$, $v_2 = 10.09 \text{ A}$, $v_3 = -100.9 \text{ A}$, $v_4 = 10.09 \text{ A}$.

^(o) Si noti che è fondamentale applicare le Leggi di Kirchhoff ad ogni sottorete separatamente. In caso contrario, con riferimento alla figura 19.b, detti $R = 4$ i rami del circuito e $N = 4$ i nodi, si sarebbe tentati di scrivere sbagliando $R - N + 1 = 1$ equazioni LKT_m ed $N - 1 = 3$ equazioni LKC_n. Come si vede dalle (22) e (23) si sono applicate invece 2 equazioni LKT_m ed 2 equazioni LKC_n.

Dato che, come si è visto il metodo dell'eliminazione delle tensioni di nodo porta a scrivere un sistema di $2R$ equazioni, è lecito chiedersi se non sia possibile, modificando la topologia del circuito, applicare i metodi delle tensioni di nodo e delle correnti di coalbero anche ai circuiti non connessi. A tale scopo, consideriamo il grafo di figura 20.a: in assenza di informazioni sui componenti presenti sui rami potremmo definire due riferimenti (più in generale, uno per ogni sottorete connessa). La difficoltà in tal caso è dovuta al fatto che, mentre per il primo riferimento (Ref 1) possiamo annullare la tensione del nodo corrispondente, per il secondo riferimento (Ref 2) la tensione del nodo corrispondente è incognita (rispetto al primo riferimento). Dal grafo di figura 20.a è inoltre chiaro che non c'è scambio di corrente tra le due sottoreti. Consideriamo ora il grafo di figura 20.b, in cui si è inserito il ramo 5 tra i nodi di riferimento delle due sottoreti (e dunque se ne è lasciato uno solo per tutta la rete). Il ramo 5 è un taglio fondamentale e dunque $i_5 = 0$ (e non c'è scambio di corrente tra le due sottoreti).

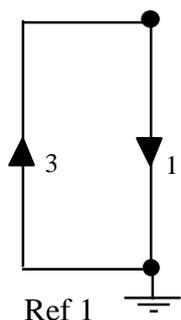


Figura 20.a

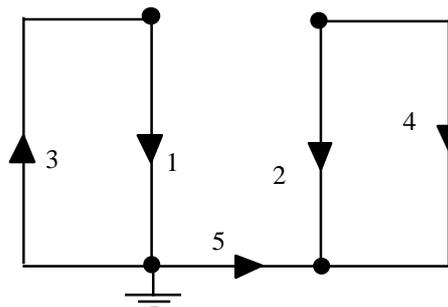


Figura 20.b

Il componente più opportuno da inserire sul ramo 5 dipende anche dalle informazioni disponibili: se si conosce (ed è un dato aggiuntivo) la tensione tra i due riferimenti (E_{Ref}), è possibile inserire un generatore di tensione indipendente (come in figura 21.a). In caso contrario la tensione tra i riferimenti è incognita e possiamo inserire un cortocircuito (equivalente a supporre $E_{Ref} = 0$) con l'avvertenza che la differenza tra potenziali di nodi appartenenti a due reti diverse non ha logicamente senso. In entrambi i casi il circuito è connesso e possiamo utilizzare ogni metodo già visto per la sua soluzione.

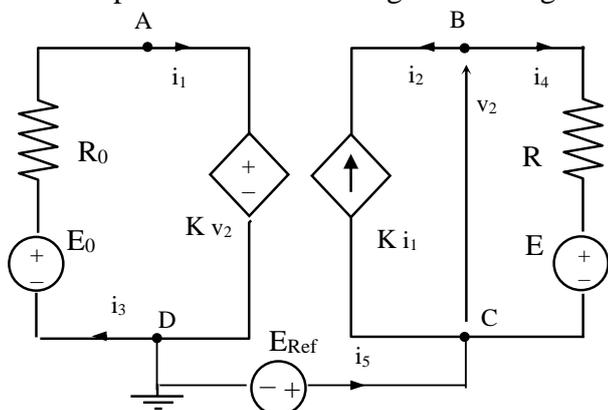


Figura 21.a

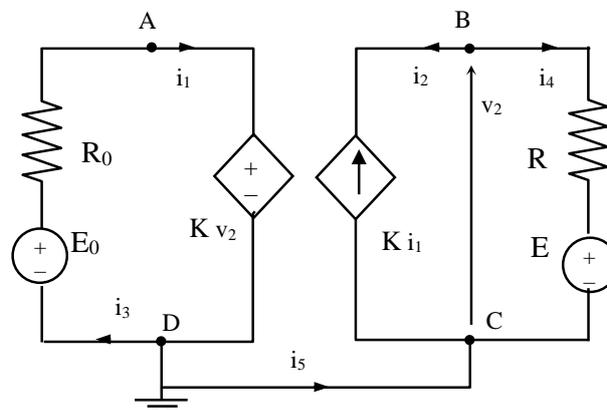


Figura 21.b

Con riferimento al circuito di figura 21.b, con $R = 5$ rami ed $N = 4$ nodi, si ha:

Metodo dei Tagli Fondamentali [albero = 1, 5, 2] (sistema di $R - N + 1 + (\text{Numero di componenti non controllati in corrente}) = 4$ equazioni)

($R - N + 1 = 2$ equazioni LKT_m)

$$\begin{aligned} -E_0 + R_0 i_1 + v_1 &= 0 \\ -E + R i_2 + v_2 &= 0 \end{aligned} \quad (24.i)$$

(equazione costitutive dei componenti non controllati in corrente)

$$\begin{aligned} v_1 &= Kv_2 \\ i_2 &= -Ki_1 \end{aligned} \quad (24.ii)$$

Metodo dei potenziali di nodo [$e_D = 0$] (sistema di $N - 1 +$ (Numero di componenti non controllati in tensione) = 6 equazioni)

($N - 1 = 3$ equazioni LKC_n)

$$\begin{aligned} \frac{E_0 - e_A}{R_0} - i_1 &= 0 \\ \frac{e_B - E}{R} + i_2 &= 0 \\ -\frac{e_B - E}{R} - i_2 - i_5 &= 0 \end{aligned} \quad (25.i)$$

(equazioni costitutive dei componenti non controllati in tensione)

$$\begin{aligned} e_A &= Ke_B \\ i_2 &= -Ki_1 \\ e_C &= 0 \end{aligned} \quad (25.ii)$$

La soluzione del sistema (25) è la seguente:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{E_0 - KE}{R_0 + K^2R} & i_2 &= -K \frac{E_0 - KE}{R_0 + K^2R} & i_5 &= 0 \\ e_A &= K \frac{KRE_0 + R_0E}{R_0 + K^2R} & e_B &= \frac{KRE_0 + R_0E}{R_0 + K^2R} & e_C &= 0 \end{aligned}$$

CIRCUITI CON MEMORIA

Vengono detti circuiti con memoria quelli in cui è presente almeno un componente dotato di memoria; in questo caso il sistema risolvibile del circuito stesso è costituito da un sistema di equazioni non più algebriche, come nel caso dei circuiti senza memoria, ma, in generale integro-differenziali ed il valore di tutte le grandezze incognite in un generico istante può essere calcolato dalla conoscenza del valore delle grandezze impresse del circuito in tutto l'intervallo temporale precedente all'istante considerato, a partire da un istante iniziale in cui sono note le variabili di stato del sistema (quelle grandezze cui è associata una energia elettromagnetica immagazzinata nel circuito: tensione ai capi dei condensatori e corrente attraverso gli induttori). Tutti i metodi precedentemente descritti per il caso dei circuiti senza memoria, sono applicabili in questo caso, con le stesse ipotesi, compresi i teoremi di Thevenin e di Norton, la cui formulazione, infatti, non fa alcun riferimento alle caratteristiche di memoria del circuito, ma portano a scrivere un sistema di equazioni integro-differenziali. In particolare, per quanto riguarda l'analisi di Tableau, le equazioni costituite dalle LKC e LKT rimangono un sistema di equazioni algebriche lineari che viene però chiuso dalle equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono i termini integro-differenziali.

Metodo delle equazioni di stato

Si consideri un circuito in cui gli unici componenti dotati di memoria siano induttori e condensatori, è possibile pervenire con un procedimento automatico ad un sistema risolvibile costituito da tante equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, quanti sono i condensatori e gli induttori presenti nel circuito, in cui le incognite sono le variabili di stato del circuito, e cioè le tensioni ai capi dei condensatori e le correnti attraverso gli induttori. Si consideri ad esempio il circuito illustrato nella figura 22.a. Le equazioni costitutive del condensatore e dell'induttore portano a scrivere le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{dv_C}{dt} &= \frac{i_C}{C} \\ \frac{di_L}{dt} &= \frac{v_L}{L} \end{aligned} \quad (26)$$

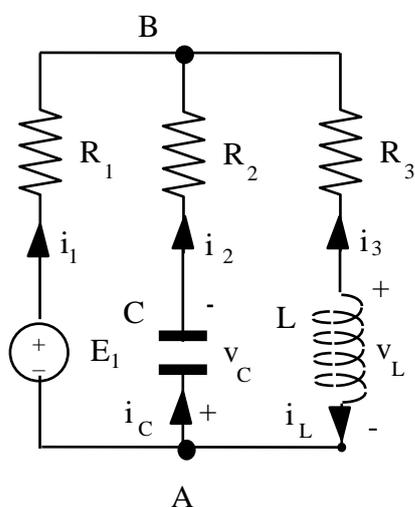


Figura 22.a

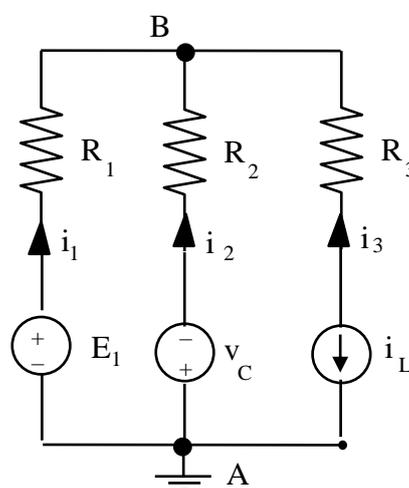


Figura 22.b

La corrente attraverso il condensatore i_C e la tensione ai capi dell'induttore v_L possono essere espresse in funzione delle variabili di stato v_C ed i_L risolvendo, con una qualsiasi delle metodologie già viste, il circuito privo di memoria illustrato nella figura 22.b, ottenuto dal circuito originale sostituendo l'induttore con un generatore di corrente con corrente impressa i_L ed il condensatore con un generatore di tensione con tensione impressa v_C .

La soluzione del circuito di figura 22.b può essere ottenuta mediante il metodo dell'analisi dei nodi, calcolando prima la tensione del nodo B rispetto al nodo A. In questo caso la formula di Millman è direttamente applicabile; il procedimento seguito per ottenere la formula di Millman porta a scrivere le seguenti relazioni:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \frac{E_1 - v_{BA}}{R_1} \\ i_2 &= \frac{-v_C - v_{BA}}{R_2} \\ i_3 &= -i_L \\ i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_{BA} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{v_C}{R_2} - i_L}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad (27)$$

È quindi possibile esprimere la corrente i_C e la tensione v_L in funzione delle variabili di stato del sistema (la (27) esprime infatti la tensione v_{BA} in funzione delle variabili di stato):

$$\begin{aligned} i_C &= \frac{-v_C - v_{BA}}{R_2} \\ v_L &= v_{BA} - R_3 i_L \end{aligned} \quad (28)$$

Supponendo, ad esempio, che i dati del problema siano: $E_1 = 110 \text{ V}$, $E_2 = 105 \text{ V}$, $R_1 = 0.5 \Omega$, $R_2 = 0.5 \Omega$, $R_3 = 5 \Omega$, $C = 2 \times 10^{-4} \text{ F}$, $L = 3 \times 10^{-3} \text{ H}$, dalla (27) si ottiene:

$$v_{BA} = 55 - 0.5v_C - 0.25i_L \quad (29)$$

sostituendo la (29) nelle (28):

$$\begin{aligned} i_C &= -v_C + 0.5i_L - 110 \\ v_L &= -0.5v_C - 5.25i_L + 55 \end{aligned} \quad (30)$$

Infine, sostituendo le (30) nelle (26) si ottiene:

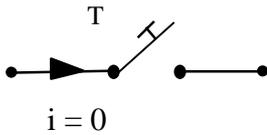
$$\begin{aligned} \frac{dv_C}{dt} &= \frac{-v_C + 0.5i_L - 110}{2 \cdot 10^{-4}} \\ \frac{di_L}{dt} &= \frac{-0.5v_C - 5.25i_L + 55}{3 \cdot 10^{-3}} \end{aligned} \quad (31)$$

La soluzione del sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine (31) può essere ottenuta, eventualmente per via numerica, a partire dall'istante iniziale in cui sono noti i valori v_{C0} ed i_{L0} delle variabili di stato (condizioni iniziali):

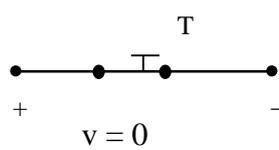
$$\begin{aligned} v_C(0) &= v_{C0} \\ i_L(0) &= i_{L0} \end{aligned} \quad (32)$$

In generale si ha interesse a studiare circuiti in cui interviene una istantanea variazione della topologia, ossia circuiti in cui sono presenti interruttori ideali che si aprono e si chiudono istantaneamente. Quando l'interruttore ideale è aperto esso equivale ad un circuito aperto e quindi la corrente che lo attraversa è nulla ($i = 0$). Viceversa quando l'interruttore è chiuso esso equivale ad un corto circuito e la tensione ai suoi capi è nulla ($v = 0$).

Interruttore aperto



Interruttore chiuso



Interruttore ideale aperto e chiuso

L'interruzione o l'instaurarsi di una corrente elettrica in un interruttore "reale" è un fenomeno molto complesso che non avviene istantaneamente; avviene comunque in un tempo molto piccolo che può risultare trascurabile ai fini del transitorio che si vuole studiare, in questo caso è possibile descrivere il processo mediante l'interruttore ideale.

Per determinare l'evoluzione delle grandezze elettriche in circuiti con interruttori ideali, è necessario conoscere i valori delle variabili di stato nell'istante iniziale ($t = 0$), ossia nell'istante in cui si modifica la topologia del circuito e inizia il transitorio. Si consideri ad esempio il circuito rappresentato nella figura 23 in cui è presente l'interruttore ideale T che si chiude istantaneamente all'istante $t = 0$.

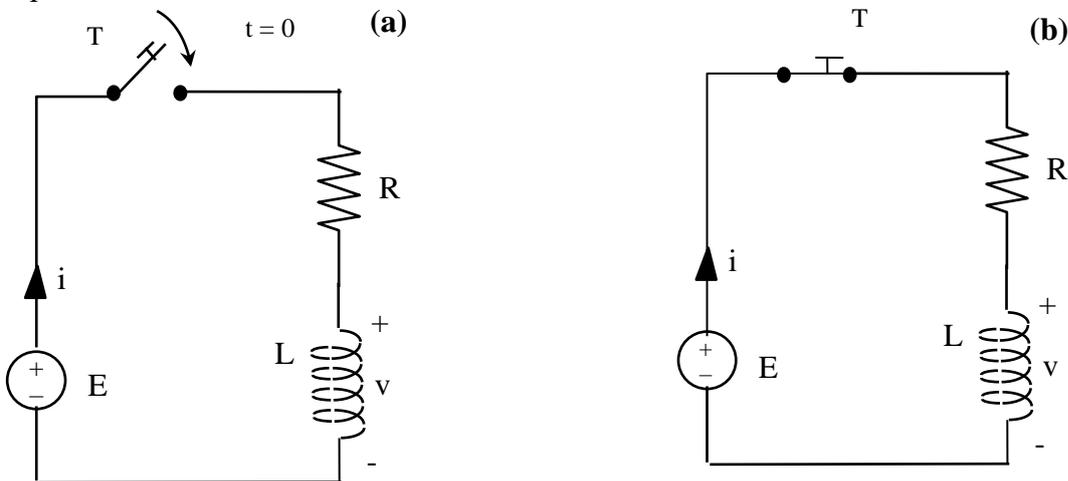


Figura 23 Circuito con interruttore ideale aperto (a) e chiuso (b)

All'istante $t = 0^-$, cioè un istante prima che l'interruttore si chiuda, il circuito si trova in regime stazionario; la corrente è nulla e quindi è nulla anche la tensione ai capi dell'induttore e del resistore. Un istante dopo che l'interruttore si è chiuso ($t = 0^+$) le grandezze del circuito hanno in generale, essendo cambiata in maniera discontinua la topologia del circuito, valori diversi da quelli relativi all'istante $t = 0^-$. Ad esempio, la tensione ai capi della serie resistore induttore, nulla all'istante $t = 0^-$ risulta pari ad E all'istante $t = 0^+$. Non risultano però cambiati i valori di quelle grandezze a cui è associata una energia del circuito, cioè le correnti degli induttori e le tensioni dei condensatori (le variabili di stato); nel caso specifico il valore della corrente i nullo all'istante $t = 0^-$ risulta quindi nullo anche all'istante $t = 0^+$. Il **Postulato di Continuità dell'Energia** afferma infatti che **l'energia non può subire discontinuità nel tempo**. Una discontinuità dell'energia in un intervallo di tempo infinitesimo equivarrebbe, infatti, all'intervento di una sorgente di potenza infinita, il che non è fisicamente accettabile. Come conseguenza di tale postulato si deduce che i valori delle grandezze cui è associata una energia nel circuito sono funzioni continue del tempo e, in particolare, che:

- la *corrente* non può subire discontinuità in un ramo contenente un'induttanza;
- la *tensione* non può subire discontinuità in un ramo contenente un condensatore.

Questo consente di risolvere il circuito all'istante $t = 0^+$ a partire dalla conoscenza dei valori delle variabili di stato (cioè tensione ai capi dei condensatori e corrente attraverso gli induttori) all'istante $t = 0^-$ e quindi

permette di determinare le condizioni iniziali necessarie per risolvere il sistema di equazioni integro - differenziali che modella il circuito.

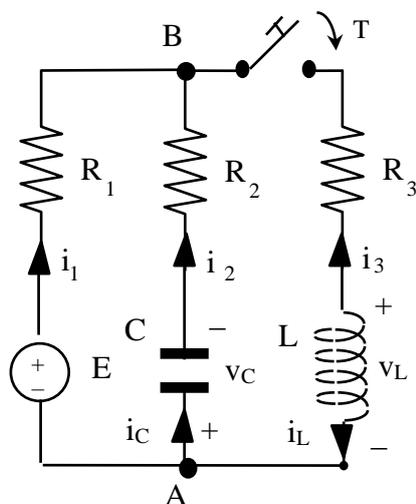


Figura 24.a

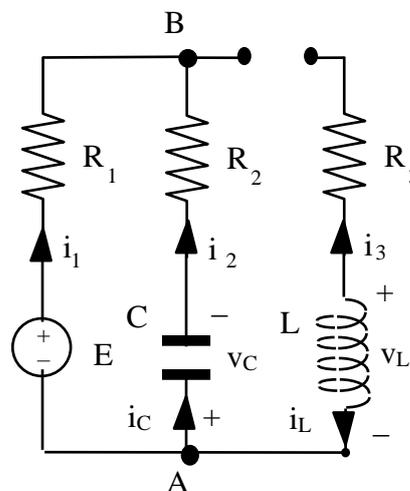


Figura 24.b - Schema circuitale per $t < 0$

Si vuole ora studiare l'evoluzione delle grandezze elettriche nel circuito rappresentato in figura 22.a, nelle condizioni definite dalla chiusura dell'interruttore T, posizionato come illustrato in figura 24.a. Per calcolare le condizioni iniziali (cioè all'istante immediatamente successivo alla chiusura di T) è sufficiente dunque considerare il circuito di figura 24.b, cioè prima della chiusura dell'interruttore T ($t < 0$). Infatti, è chiaro che $i_L(0^-) = 0$, visto che l'interruttore T è aperto, e che $v_C(0^-) = -E$, poiché il condensatore si comporta in continua come un circuito aperto. Utilizzando ora il postulato di continuità dell'energia è possibile affermare che $i_L(0^+) = 0$ e che $v_C(0^+) = -E$. Il sistema (31) viene quindi completato dalle condizioni iniziali e può essere risolto:

$$\begin{cases} \frac{dv_C}{dt} = -5 \cdot 10^3 v_C + 2.5 \cdot 10^3 i_L - 5.5 \cdot 10^5 \\ \frac{di_L}{dt} = -1.66 \cdot 10^2 v_C - 1.75 \cdot 10^3 i_L + 1.826 \cdot 10^4 \\ v_C(0) = -1.1 \cdot 10^2, \quad i_L(0) = 0 \end{cases} \quad (33)$$

In forma vettoriale il sistema (33) si scrive come:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} v_C \\ i_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \cdot 10^3 & 2.5 \cdot 10^3 \\ -1.66 \cdot 10^2 & -1.75 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_C \\ i_L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -5.5 \cdot 10^5 \\ 1.826 \cdot 10^4 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} v_C \\ i_L \end{Bmatrix} (t=0) = \begin{Bmatrix} -1.1 \cdot 10^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (34)$$

Il sistema differenziale da risolvere utilizzando il metodo delle equazioni di stato è sempre simile al (34) e cioè, indicando con \mathbf{x} il vettore delle variabili di stato, un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = [\mathbf{A}] \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (35)$$

L'integrale generale di un sistema di equazioni differenziali lineari come questo è la somma di un integrale particolare (soluzione di regime, se il regime esiste) e dell'integrale generale del sistema omogeneo associato (soluzione transitoria): $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{x}_0(t)$. Se il termine noto è costante, per calcolare l'integrale particolare è sufficiente annullare le derivate e quindi risolvere il sistema $[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{x}_p + \mathbf{b} = 0$. Per quanto riguarda l'integrale generale del sistema omogeneo associato (cioè con $\mathbf{b} = \mathbf{0}$), esso va sempre cercato nella forma di un esponenziale reale o immaginario. La sostituzione dell'esponenziale $e^{\lambda t}$ nel sistema omogeneo associato del (35) porta a scrivere l'equazione caratteristica $\det[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}] = 0$ che permette di determinare, calcolando gli autovalori di $[\mathbf{A}]$, le costanti di tempo del sistema. L'analisi matematica approfondita di sistemi differenziali in questa forma esula dagli scopi di questa trattazione. In ogni caso il sistema (35) è solubile tramite svariati metodi ampiamente trattati in letteratura.

Gli autovalori di $[\mathbf{A}]$ sono particolarmente rilevanti nello studio della stabilità delle reti (Un circuito si dice stabile se, sottoposto ad una eccitazione esterna di durata limitata, ha risposta che rimane limitata nel tempo dopo che la sollecitazione esterna ha finito di agire). Si può dimostrare infatti che un circuito è stabile se $\Re(\lambda) \leq 0$, per ogni λ autovalore di $[\mathbf{A}]$. In particolare, i circuiti lineari, tempo invarianti, contenenti solo elementi privi di memoria passivi ed elementi con memoria sono stabili.

Nel seguito vengono illustrati alcuni esempi di soluzione di circuiti con memoria. Il problema che si vuole risolvere è il seguente: assegnato il circuito elettrico e le grandezze impresse dei generatori indipendenti presenti, si vuole calcolare l'andamento temporale delle correnti di ramo e delle tensioni di ramo. Si suppone per semplicità che tutti i componenti siano dei bipoli, potendosi ricondurre all'ipotesi mediante l'introduzione di circuiti equivalenti dei componenti a più di due terminali.

Si consideri, ad esempio, il circuito in figura 23, che è un circuito del 1° ordine, cioè un circuito caratterizzato da un'equazione differenziale del primo ordine (cioè contenente un solo elemento con memoria). Applicando la Legge di Kirchhoff delle Tensioni (LKT) all'istante $t = 0^+$ (cioè un istante dopo la chiusura dell'interruttore T), si ottiene:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E \quad (36)$$

L'integrale generale di una equazione differenziale lineare è la somma di un integrale particolare (soluzione di regime, se esiste il regime) e dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata (soluzione transitoria): $i(t) = i_p(t) + i_0(t)$. Se si assume che E sia costante, per calcolare l'integrale particolare è sufficiente annullare la derivata: $i_p(t) = E/R$. Per quanto riguarda l'integrale generale dell'equazione omogenea associata, esso va sempre cercato nella forma di un esponenziale reale o immaginario. La sostituzione dell'esponenziale $e^{\lambda t}$ nella omogenea associata della (36) porta a scrivere l'equazione caratteristica:

$$L \lambda + R = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -R/L \quad \Rightarrow \quad i(t) = E/R + I e^{-Rt/L}$$

La determinazione della costante I può essere effettuata se è noto il valore iniziale:

$$i(0^+) = i_0 \quad (37)$$

Per calcolare il valore iniziale è sufficiente considerare il circuito di figura 23.a, cioè prima della chiusura dell'interruttore T ($t < 0$). È evidente che $i(0^-) = 0$, visto che l'interruttore T è aperto. Utilizzando ora il postulato di continuità dell'energia è possibile affermare che $i(0^+) = 0$. Risulta quindi:

$$0 = E/R + I \quad \Rightarrow \quad I = -E/R$$

In conclusione, l'andamento temporale della corrente i è stato calcolato tramite la soluzione della seguente equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti con il valore iniziale di corrente nulla.

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + Ri = E \\ i(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (38)$$

Il parametro $\tau = L/R$ è detto costante di tempo del circuito. La costante di tempo rappresenta l'intervallo di tempo necessario perché la risposta transitoria raggiunga il 63% del suo valore di regime. Dopo un tempo pari a 5τ la risposta transitoria supera il 99% del suo valore di regime. Dalla figura 25 emerge una interpretazione del parametro τ che può essere assunto ad indicare la maggiore o minore "rapidità" del fenomeno transitorio.

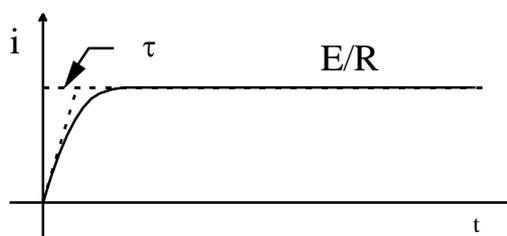


Figura 25

Si consideri ora il circuito rappresentato nella figura 26.a in cui è presente l'interruttore ideale T che si chiude istantaneamente all'istante $t = 0$. La LKT nel ramo considerato ha la forma:

$$E = Ri + v_C \Rightarrow i = \frac{E - v_C}{R}$$

ossia:

$$\begin{cases} C \frac{dv_C}{dt} = \frac{E - v_C}{R} \\ v_C(0) = v_{C,0} \end{cases} \quad (39)$$

ove $v_{C,0}$ è il valore della tensione iniziale ai capi del condensatore (che si mantiene uguale a $t = 0^-$ e a $t = 0^+$ per il postulato di continuità dell'energia). Dalla (39) si ottiene la seguente equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti:

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{\tau} = \frac{E}{\tau} \Rightarrow v_C(t) = E + Ae^{-t/\tau} \quad (40)$$

dove $\tau = RC$ è la costante di tempo del circuito. Per la determinazione della costante A si considera il valore iniziale e si scrive la (40) per $t = 0^+$:

$$v_C(0^+) = v_{C,0} = E + A \Rightarrow v_C(t) = E + (v_{C,0} - E)e^{-t/\tau} \Rightarrow i(t) = \frac{E - v_{C,0}}{R} e^{-t/\tau} \quad (41)$$

Il grafico della (41) è mostrato in figura 26.b. Si noti che anche in questo caso emerge una interpretazione del parametro τ che può essere assunto ad indicare la maggiore o minore "rapidità" del fenomeno transitorio. In particolare, per $t > 5\tau$ si può assumere che il transitorio sia esaurito e che si sia raggiunta la soluzione di regime (che in questo caso è $i(t) = 0$).

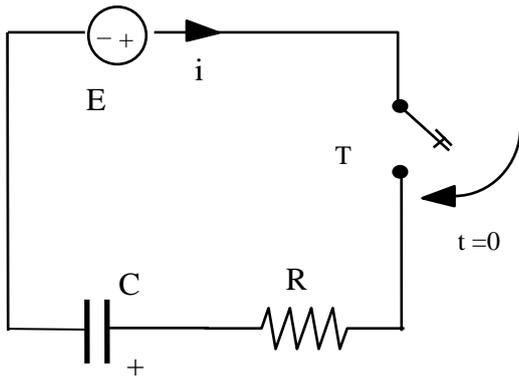


Figura 26.a

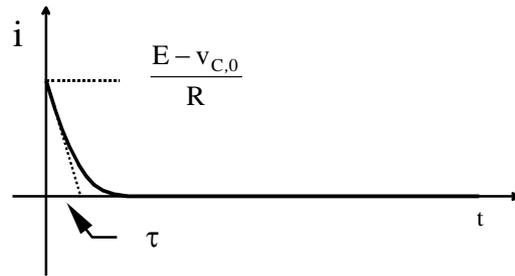


Figura 26.b

I circuiti contenenti componenti attivi (cioè in grado di erogare potenza) non sono necessariamente stabili. A titolo di esempio si consideri il circuito di figura 27, in cui l'interruttore T si chiude all'istante $t = 0$ e si riapre all'istante $t = t_0$.

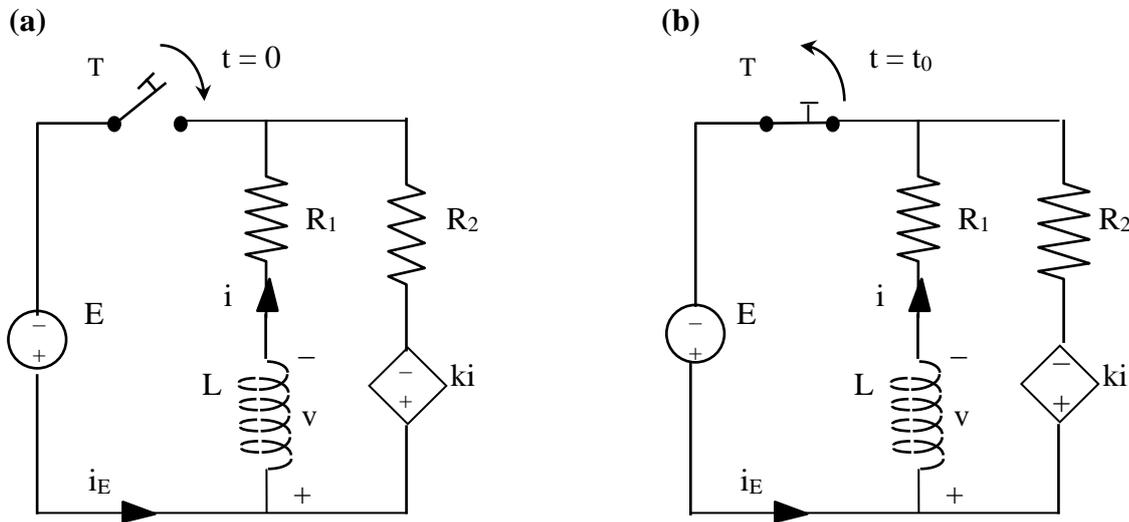


Figura 27

L'andamento temporale della corrente i , per $0 \leq t \leq t_0$, è calcolabile risolvendo il seguente sistema, con il valore iniziale di corrente nulla (supponendo che $k \neq R_1 + R_2$).

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + R_1 i = E \\ i(0) = 0 \\ E + R_2(i - i_E) - ki = 0 \end{cases} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{R_1}{L}t} \right) \quad (42)$$

L'andamento temporale della corrente i , per $t \geq t_0$, è calcolabile risolvendo il seguente sistema, con il valore iniziale di corrente $i_0 = i(t = t_0)$.

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + (R_1 + R_2 - k)i = 0 \\ i(t_0) = i_0 \end{cases} \Rightarrow i(t) = i_0 e^{\frac{k - R_1 - R_2}{L}(t - t_0)} \quad (43)$$

La (43) mostra che il circuito è stabile solo se $k \leq R_1 + R_2$. Nel caso contrario la corrente i cresce esponenzialmente. Pertanto, se il circuito di figura 27 rappresenta il modello un dispositivo fisico, al crescere della

i si raggiungeranno i limiti tecnologici del dispositivo (che si guasterà); oppure, se il circuito di figura 27 rappresenta il modello un dispositivo fisico solo in un certo regime di funzionamento, al crescere della i si raggiungeranno i limiti del modello e sarà necessario modificare la struttura del circuito.

Come caso limite di stabilità, si consideri il circuito illustrato in figura 28. Per $t < 0$, si ha: $i = i_L = E/R$, $i_C = 0$, $v_L = v_C = 0$. Dopo l'apertura dell'interruttore T, per $t > 0$, il circuito è costituito dal parallelo dell'induttore con il condensatore. Pertanto, il sistema risolvibile è dato da:

$$\begin{aligned} \frac{dv_C}{dt} &= \frac{i_C}{C} = \frac{i_L}{C} \\ \frac{di_L}{dt} &= \frac{v_L}{L} = -\frac{v_C}{L} \end{aligned} \quad (44)$$

con le condizioni iniziali $v_C(0) = 0$, $i_L(0) = E/R$.

Sostituendo la prima delle (44) nella seconda e cercando una soluzione nella forma di un esponenziale reale o immaginario ($e^{\lambda t}$) si ottiene la relazione $\lambda^2 + 1/LC = 0$. Posto $\omega_0^2 = 1/LC$, si ottengono le due radici, puramente immaginarie, $\lambda = \pm j \omega_0$.⁽⁶⁾ Si noti quindi che $\Re(\lambda) = 0$ e le soluzioni del problema non tendono a zero, nè divergono, ma sono oscillanti:

$$i_L(t) = \frac{E}{R} \cos(\omega_0 t) \quad , \quad v_C(t) = \frac{E}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \sin(\omega_0 t)$$

Nel circuito si instaurerà quindi un regime sinusoidale permanente.

Regime di corrente alternata

Si può dimostrare che sotto alcune deboli ipotesi di stabilità del circuito, se il circuito è lineare e le eccitazioni presenti sono funzioni sinusoidali isofrequenziali del tempo, dopo un transitorio di durata dipendente dai parametri del circuito stesso, si raggiunge una soluzione di regime in cui tutte le grandezze del circuito sono funzioni sinusoidali isofrequenziali, con frequenza pari a quella dei generatori. Per calcolare la soluzione di regime, si può applicare il metodo simbolico che considera le grandezze e le equazioni del circuito trasformate mediante la trasformata di Steinmetz e perviene ad un sistema risolutivo algebrico nello spazio dei numeri complessi. Il sistema risolvibile si può ottenere sostituendo i condensatori e gli induttori con dei "resistori" con resistenza complessa (impedenza). Per la descrizione dettagliata del metodo si rimanda ai capitoli successivi. Per la soluzione del circuito simbolico sopramenzionato si applicano tutti i metodi precedentemente visti per i circuiti privi di memoria.

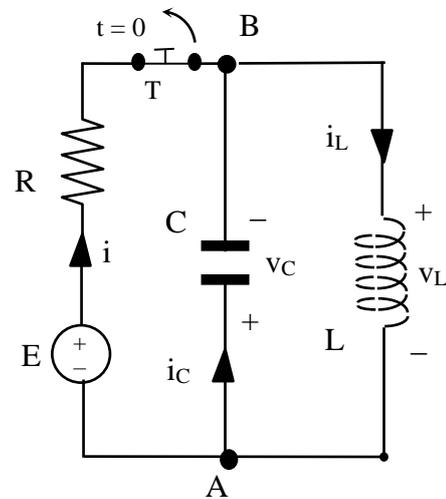


Figura 28

⁽⁶⁾ Al fine di evitare possibili fraintendimenti, a differenza di quanto accade usualmente, è consuetudine in elettrotecnica indicare con la lettera "j" l'unità immaginaria ($j^2 = -1$), riservando il simbolo "i" per le correnti.