

Dispense del **modulo 2** del Corso di  
**Conversione e utilizzazione dell'energia T**

A.A. 2020-2021

CdS in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio

Prof. P. L. Ribani

**CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO**  
**Modulo 2 del Corso di**  
**CONVERSIONE E UTILIZZAZIONE DELL'ENERGIA T**

**A.A. 2020-2021**

**Prerequisiti**

Sono richieste le conoscenze di analisi matematica e di fisica che vengono solitamente presentate nei rispettivi corsi del primo anno della Scuola di Ingegneria. In particolare: soluzione di equazioni differenziali ordinarie, operazioni con i numeri complessi, equazioni differenziali alle derivate parziali, equazioni del campo elettromagnetico nel vuoto.

**Programma**

**Teoria generale**

Dalla teoria dei campi alla teoria dei circuiti, legge di Kirchhoff delle tensioni, legge di Kirchhoff delle correnti, potenza elettrica, generatore di tensione e di corrente indipendente, resistore, induttore, condensatore, regime di corrente alternata.

**Produzione della energia elettrica**

Generatore sincrono: caratteristiche costruttive e principio di funzionamento. Compensatore sincrono. Generatore fotovoltaico.

**Trasporto e distribuzione della energia elettrica**

Linee elettriche monofase e trifase, linee trifase con il filo neutro. Il problema del rifasamento. Trasformatore: caratteristiche costruttive, principio di funzionamento, circuito elettrico equivalente, trasformatori trifase.

**Uso dell'energia elettrica**

Motore asincrono: caratteristiche costruttive, principio di funzionamento, circuito elettrico equivalente, caratteristica meccanica ed elettromeccanica. Cenni al controllo della velocità ed ai problemi di avviamento. Cenni di sicurezza elettrica: protezione dai contatti indiretti. Protezione dalle sovracorrenti.

**Metodi didattici**

Il corso è strutturato in lezioni frontali in aula in cui vengono presentati tutti gli argomenti indicati nel programma. In particolare la parte riguardante la teoria dei circuiti viene svolta direttamente alla lavagna. Gli argomenti relativi alle macchine elettriche ed alla sicurezza elettrica vengono invece prevalentemente illustrati con l'utilizzo di presentazioni al computer disponibili online nel sito del docente.

**Testi di riferimento:**

1. G. Chitarin, F. Gnesotto, M. Guarnieri, A. Maschio, A. Stella, *Elettrotecnica: 1 - Principi, Elettrotecnica: 2 - Applicazioni*, Esculapio, 2020.
  2. G. Rizzoni, *Elettrotecnica: principi e applicazioni*, McGraw-Hill, 3a edizione, 2013.
  3. A.R. Hambley, *Elettrotecnica*, Pearson Paravia Bruno Mondadori, 4a edizione 2009.
- Una traccia delle lezioni è disponibile sul sito del docente

**Modalità d'esame**

L'esame si svolge mediante una prova orale in cui lo studente illustra uno degli argomenti del programma proposto dal docente. La prova orale può essere svolta in qualsiasi periodo dell'anno concordando la data con il docente.

**Docente:**

Prof. Pier Luigi Ribani - Dipartimento di Ingegneria dell'Energia Elettrica e dell'Informazione

“Guglielmo Marconi” - DEI - Università di Bologna

Viale Risorgimento, 2 - 40136 Bologna - Tel. 051 209-3587

e-mail: [pierluigi.ribani@unibo.it](mailto:pierluigi.ribani@unibo.it)

home-page: <http://www.die.ing.unibo.it/pers/ribani/ribani.htm>

## INDICE DEI CAPITOLI

-	Teoria dei circuiti .....	1 - 17
-	Metodi per l'analisi dei circuiti .....	1 - 33
-	Grandezze periodiche .....	1- 4
-	Regime sinusoidale .....	1 - 20
-	Sistemi trifase .....	1-10
-	Trasformatori .....	1 -15
-	Campo rotante .....	1 - 6
-	Macchine asincrone .....	1 - 12
-	Macchine sincrone .....	1 - 5
-	Impianti .....	1 - 13
-	Sicurezza elettrica .....	1 - 6

## APPENDICI

-	Elettromagnetismo .....	1 - 15
-	Sistema Internazionale di unità di misura .....	1-1

# TEORIA DEI CIRCUITI

## 1. INTRODUZIONE

Si consideri un sistema elettrico costituito da un certo numero di "componenti" (vedi figura 1). Ciascun componente (A, B, C, D) è racchiuso all'interno di un contenitore da cui escono dei terminali collegati elettricamente tra di loro mediante dei fili metallici (1, 2, 3, 4, 5).

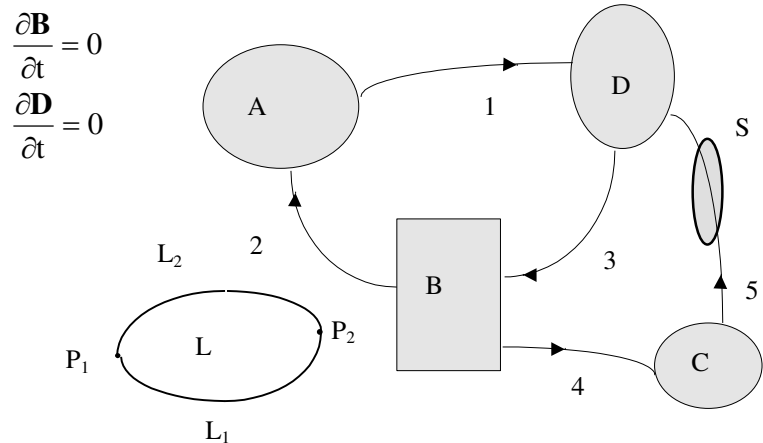


Figura 1

Tutto il sistema è immerso nell'aria che è un mezzo isolante. La regione costituita da tutto lo spazio meno quello occupato dai componenti (spazio esterno ai componenti) è una **regione a connessione lineare semplice**: presa una qualsiasi linea chiusa che giace in tale regione, esiste almeno una superficie che si appoggia a tale linea che giace anch'essa tutta all'interno della regione considerata. Si supponga che nello spazio esterno ai componenti sia possibile considerare nulla la derivata temporale della induzione magnetica e dello spostamento elettrico. Si consideri quindi la circuitazione del campo elettrico relativa ad una qualsiasi linea chiusa L che giace nello spazio esterno ai componenti. Risulta:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = 0 \quad (1)$$

Dalla (1) segue che la circuitazione del campo elettrico lungo una linea che congiunge due punti qualsiasi P<sub>1</sub> e P<sub>2</sub>, rimanendo sempre nello spazio esterno ai componenti, non dipende dalla particolare linea scelta ma unicamente dai punti P<sub>1</sub> e P<sub>2</sub> (si dice che **il campo elettrico è conservativo**) e viene chiamata differenza di potenziale tra il punto P<sub>1</sub> ed il punto P<sub>2</sub>:

$$\int_{P_1, L_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_1, L_2}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = v_{12} \quad (2)$$

Si consideri una superficie chiusa S qualsiasi che giace nello spazio esterno ai componenti, risulta :

$$\int_S \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \Rightarrow \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (3)$$

La densità volumetrica di corrente elettrica, nello spazio esterno ai componenti è nulla ovunque tranne che all'interno delle connessioni metalliche. In particolare si consideri una superficie S che racchiude al suo interno solo un tratto di connessione metallica; dalla (3) segue che la corrente che circola in quella connessione, non dipende dal punto considerato della connessione, ma è una caratteristica della connessione.

Nessun sistema elettrico reale verifica esattamente le ipotesi assunte per quello sopra descritto; tali ipotesi sono però soddisfatte con buona approssimazione per molti sistemi elettrici reali, per descrivere i quali si fa uso di un modello ideale che prende il nome di circuito elettrico a costanti concentrate. In particolare, per tali sistemi, la circuitazione del campo elettrico lungo una linea che congiunge due punti non è indipendente dalla linea scelta, ma la dipendenza è così piccola che risul-

ta trascurabile a tutti gli effetti pratici. In tal caso, invece di parlare di differenza di potenziale, per indicare l'approssimazione fatta, si preferisce parlare di tensione tra i due punti.

## 2. DEFINIZIONI E LEGGI DI KIRCHHOFF

Un **CIRCUITO ELETTRICO A COSTANTI CONCENTRATE**, o rete elettrica, è un insieme di componenti elettrici ideali soggetto ai vincoli (che saranno enunciati nel seguito) noti come Leggi di Kirchhoff. Nel seguito, per semplicità, con la parola circuito elettrico si intenderà circuito elettrico a costanti concentrate.

La carica elettrica, indicata con  $q$ , è la proprietà intrinseca della materia responsabile dei fenomeni elettrici e magnetici. L'unità di misura della quantità di carica è il coulomb (C). In un circuito elettrico le cariche elettriche possono muoversi attraverso i componenti e le connessioni metalliche. La **corrente**, indicata con  $i$ , che passa attraverso una data superficie (ad esempio la sezione di una connessione metallica) è definita dalla carica elettrica che attraversa quella superficie nell'unità di tempo. L'unità di misura della corrente è l'ampere (A); un ampere è pari ad un coulomb al secondo.

Possiamo dunque esprimere la corrente come: 
$$i = \frac{dq}{dt}$$

Il moto della carica elettrica attraverso i componenti e le connessioni metalliche richiede energia. La **tensione**, indicata con  $v_{BA}$ , tra due terminali A e B in un circuito è il lavoro richiesto per muovere una carica positiva unitaria da A (terminale  $-$ ) a B (terminale  $+$ ). L'unità di misura della tensione è il volt (V).

Possiamo dunque esprimere la tensione come: 
$$v_{BA} = \frac{dw_{A \rightarrow B}}{dq}$$

Un componente elettrico ideale (vedi figura 2) è caratterizzato da un numero di terminali, o morsetti (solitamente un componente a due terminali è detto bipolo, uno a tre terminali è detto tripolo, etc., uno a N terminali è detto N-polo,).

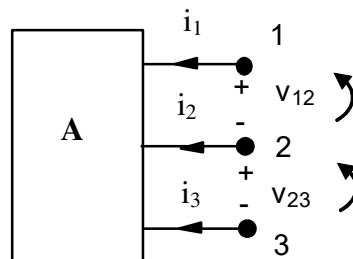


Fig. 2 Componente a tre terminali

A ciascun terminale è associata una corrente che è univocamente definita, in valore e segno, una volta che sia stato arbitrariamente scelto il suo verso positivo (indicato dalla freccia): una corrente  $i_1 = 2$  significa che una corrente di intensità pari a 2 Ampère entra nel componente A attraverso il terminale 1, viceversa, una corrente  $i_1 = -2$  significa che una corrente di intensità pari a 2 Ampère esce dal componente A attraverso il terminale 1

Ad ogni coppia di terminali è associata una tensione che è univocamente definita, in valore e segno, una volta che sia stato arbitrariamente scelto il terminale di riferimento (indicato col segno  $-$ ): una tensione  $v_{12} = 2$  significa che il terminale 1 si trova ad un potenziale superiore di 2 Volt rispetto a quello del terminale 2, viceversa una tensione  $v_{12} = -2$  significa che il terminale 1 si trova ad un potenziale inferiore di 2 Volt rispetto a quello del terminale 2. Talvolta l'indicazione del " $-$ " e del " $+$ " viene sostituita da una freccia che indica il terminale positivo.

Un componente con due terminali viene chiamato bipolo. Nel seguito, per semplicità, si supporrà che i circuiti in esame siano costituiti di soli bipoli; se ciò non fosse vero, si può pensare di ricondursi alla ipotesi, sostituendo i componenti con più di due terminali con opportuni circuiti equivalenti costituiti da soli bipoli: ciò è sicuramente possibile mediante l'introduzione di generatori pilotati (che verranno definiti nel seguito).

All'interno del circuito, i terminali appartenenti a diversi componenti sono collegati tramite connessioni ideali, caratterizzate dall'aver una tensione nulla ai loro capi (vedi figura 3).

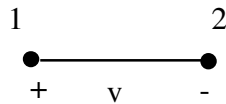


Fig. 3 Connessione ideale ( $v = 0$ )

Un nodo di un circuito elettrico è un punto a cui sono collegati, mediante una connessione ideale, due o più terminali, oppure è un terminale isolato; i nodi del circuito sono quindi le sue connessioni ideali ed i terminali isolati. Il circuito della figura 4 è costituito da cinque bipoli; collegati a 4 nodi (A, B, C, D). Una sequenza chiusa di nodi è una successione di nodi tale che il primo nodo coincide con l'ultimo. (Ad esempio, sono sequenze chiuse AA, ABA, ABCA, ABCDA, etc.)

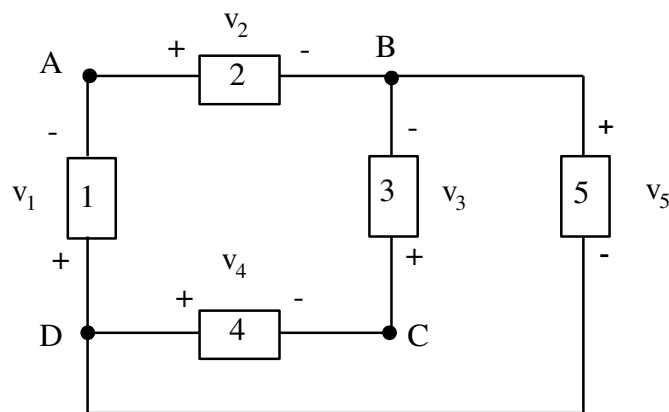


Figura 4. Circuito con 5 elementi e 4 nodi.

**LA LEGGE DI KIRCHHOFF DELLE TENSIONI (LKT)** afferma che per una qualsiasi sequenza chiusa di nodi la somma algebrica delle tensioni (tra due nodi successivi) è nulla.

Con riferimento al circuito della figura 4, applicando la LKT alla sequenza chiusa di nodi ABCA si ottiene la seguente equazione:

$$v_{AB} + v_{BC} + v_{CA} = 0 \quad (4)$$

Le tensioni di nodo (o potenziali di nodo) di un circuito sono le tensioni di tutti i nodi rispetto ad un nodo assunto come riferimento, la cui scelta è arbitraria (ma a cui solitamente si attribuisce un valore nullo). La LKT permette di esprimere la tensione tra una qualsiasi coppia di nodi del circuito come differenza delle relative tensioni di nodo: con riferimento alla figura 4, supponendo di scegliere il nodo A come nodo di riferimento (e posto dunque  $e_A = 0$ ), ed indicando con  $e_B$  ed  $e_C$  le tensioni di nodo dei nodi B e C ( $e_B = v_{BA}$ ;  $e_C = v_{CA}$ ) la equazione (4) permette di scrivere:

$$v_{BC} = e_B - e_C \quad (5)$$

La sequenza chiusa di nodi ABCDA individua un percorso chiuso attraverso i componenti del circuito: i tratti di tale percorso all'interno di ciascun componente vengono detti rami ed il percorso, maglia. In generale, un ramo di un circuito è un percorso che collega due nodi attraversando un componente; ad un bipolo è associato un solo ramo del circuito mentre ad un componente con più di due terminali sono associati più rami (tutti i percorsi possibili che collegano i terminali del componente attraversandolo). Applicando la LKT alla maglia ABCDA, tenendo conto dei versi positivi scelti per le tensioni ai capi dei componenti (tensioni di ramo) e del verso di circuitazione della maglia, si ottiene la seguente relazione:

$$v_2 - v_3 - v_4 + v_1 = 0 \quad (6)$$

La LKT applicata ad una maglia del circuito afferma che la somma algebrica delle tensioni di ramo (sui rami che compongono la maglia) è nulla.

La **LEGGE DI KIRCHHOFF DELLE CORRENTI (LKC)** afferma che per ogni superficie chiusa che interseca unicamente le connessioni tra i componenti, e non i componenti stessi, la somma algebrica delle correnti che attraversano la superficie è nulla.

Si consideri in primo luogo una superficie chiusa che racchiuda al suo interno solo un bipolo (vedi figura 5a).

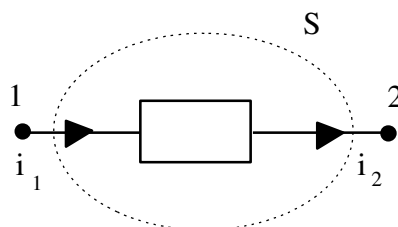


Fig. 5a. Legge di Kirchhoff delle correnti applicata ad un bipolo.

La corrente  $i_1$  entra nella superficie indicata con la linea tratteggiata S nella figura, mentre la corrente  $i_2$  esce da tale superficie (di solito si assumono positive le correnti uscenti e negative quelle entranti); la LKC afferma quindi che deve essere  $i_2 - i_1 = 0$ , da cui segue che:  $i_2 = i_1$ . Tenendo conto di ciò, con riferimento alla figura 5b si consideri la superficie chiusa la cui rappresentazione nel piano del disegno è la linea tratteggiata  $S_1$ .

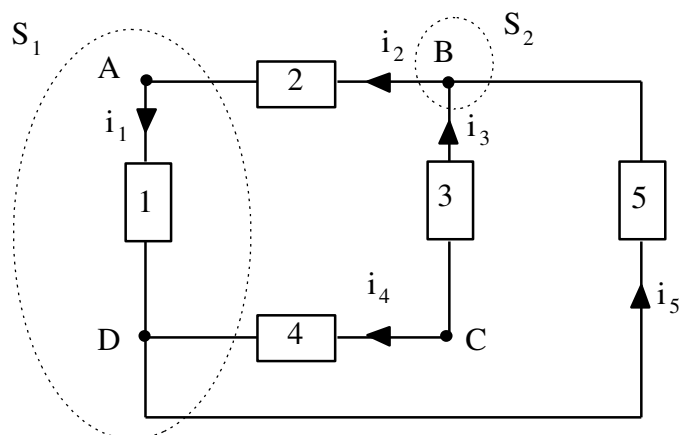


Figura 5b.



Le correnti che attraversano tale superficie sono la corrente  $i_2$  e la corrente  $i_4$  che entrano nella superficie e la corrente  $i_5$  che esce, per cui la LKC applicata a tale superficie permette di scrivere la seguente equazione:

$$-i_2 - i_4 + i_5 = 0 \quad (7)$$

Si consideri la superficie chiusa la cui rappresentazione nel piano della figura 5b è la linea tratteggiata  $S_2$ : tale superficie racchiude al suo interno solo il nodo B e la LKC ad essa associata afferma che la somma algebrica delle correnti dei rami che convergono nel nodo B è nulla:

$$i_2 - i_3 - i_5 = 0 \quad (8)$$

Applicando la LKC a tutti i quattro nodi del circuito di figura 5.b, ottiene quindi il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{array}{cccccc} +i_1 & -i_2 & & & & = 0 \\ & +i_2 & -i_3 & & -i_5 & = 0 \\ & & +i_3 & +i_4 & & = 0 \\ -i_1 & & & -i_4 & +i_5 & = 0 \\ \hline +0 & +0 & +0 & +0 & +0 & = 0 \end{array}$$

Come è immediato verificare, la somma delle equazioni porta ad una identità ( $0 = 0$ ). Tale risultato generale è dovuto al fatto che ogni corrente di ramo  $i_k$  compare esattamente due volte, con segni opposti, nelle LKC relative ai nodi che sono i terminali del ramo  $k$ . Una delle equazioni è dunque una combinazione lineare delle altre  $N - 1 = 3$ , e si può omettere. Le rimanenti  $N - 1 = 3$  equazioni sono chiaramente indipendenti in quanto, qualunque sia l'equazione omessa (ad esempio la quarta, nodo D), tutte le correnti di ramo presenti nell'equazione eliminata compaiono *una sola volta* nelle restanti equazioni (ad esempio  $i_1$ ,  $i_4$  ed  $i_5$ ). Le equazioni LKC indipendenti sono quindi  $N - 1$ .

**Le due leggi di Kirchhoff, delle tensioni e delle correnti, permettono di scrivere delle equazioni lineari tra le tensioni e le correnti che non dipendono dalla natura dei componenti presenti nel circuito, ma unicamente da come essi sono collegati tra di loro (topologia del circuito).**

Sia dato un circuito caratterizzato da  $R$  rami ed  $N$  nodi (ad esempio per il circuito di figura 5.b,  $N = 4$  ed  $R = 5$ ). Per ciascun ramo si assumano versi positivi per la tensione di ramo e la corrente di ramo associati secondo la scelta dell'utilizzatore, ossia quando la corrente entra nel terminale positivo (vedi fig. 6.a). I versi di riferimento associati secondo la scelta del generatore sono illustrati nella figura 6.b, in cui la corrente esce dal terminale positivo.

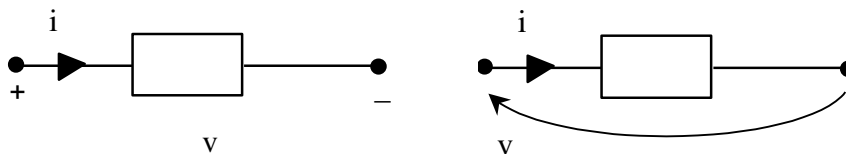


Fig. 6.a Versi di riferimento associati secondo la scelta dell'utilizzatore per la tensione e la corrente di ramo. A destra, l'indicazione del “-” e del “+” è sostituita da una freccia che indica il terminale positivo.

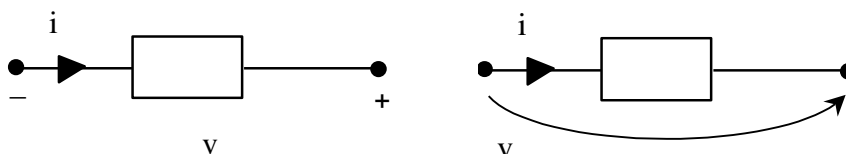


Fig. 6.b Versi di riferimento associati secondo la scelta del generatore per la tensione e la corrente di ramo. A destra, l'indicazione del “-” e del “+” è sostituita da una freccia che indica il terminale positivo.

Preso arbitrariamente un nodo come nodo di riferimento del circuito, la LKT permette di scrivere R relazioni del tipo (5) linearmente indipendenti che in forma matriciale assumono la forma:

$$\mathbf{v} = \mathbf{M} \mathbf{e} \quad (9)$$

dove  $\mathbf{v}$  è il vettore delle tensioni di ramo,  $\mathbf{e}$  è il vettore delle tensioni di nodo ed  $\mathbf{M}$  è una matrice avente R righe ed  $(N - 1)$  colonne, il cui generico elemento  $M_{hk}$  risulta nullo se il ramo h non è collegato al nodo k, uguale a +1 se la corrente del ramo h esce dal nodo k, -1 se la corrente del ramo h entra nel nodo k. A titolo di esempio si consideri ancora il circuito di figura 5.b, utilizzando *versi di riferimento associati secondo la scelta dell'utilizzatore per le tensioni e le correnti di ramo* e prendendo D come nodo di riferimento ( $e_D = 0$ ). Si ha quindi:

$$\begin{cases} v_1 = e_A \\ v_2 = e_B - e_A \\ v_3 = e_C - e_B \\ v_4 = e_C \\ v_5 = -e_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{cases} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} e_A \\ e_B \\ e_C \end{cases} \Rightarrow \mathbf{M} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

La LKC applicata a tutti i nodi tranne quello di riferimento permette di scrivere  $(N - 1)$  equazioni del tipo (8) che in forma matriciale assumono la forma:

$$\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0} \quad (10)$$

dove  $\mathbf{i}$  è il vettore delle correnti di ramo ed  $\mathbf{A}$  è una matrice, chiamata matrice di incidenza ridotta, avente  $(N - 1)$  righe ed R colonne, il cui generico elemento  $A_{hk}$  risulta nullo se il ramo k non è collegato al nodo h, uguale a +1 se la corrente del ramo k esce dal nodo h, -1 se la corrente del ramo k entra nel nodo h. A titolo di esempio si consideri ancora il circuito di figura 5.b. Si ha quindi:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 = 0 \\ i_2 - i_3 - i_5 = 0 \\ i_3 + i_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & 0 \end{bmatrix}$$

Risulta quindi dalle definizioni che  $\mathbf{M}$  è la trasposta di  $\mathbf{A}$ , cioè:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^T \quad (11)$$

Dalle equazioni (9), (10) ed (11) segue il **TEOREMA DI TELLEGEN** che afferma che, per un dato circuito, preso un qualsiasi vettore di tensioni di ramo  $\mathbf{v}_1$ , che soddisfi le LKT (9) per quel circuito, ed un vettore di correnti di ramo  $\mathbf{i}_2$ , che soddisfi le LKC (10) per quel circuito, allora vale la seguente relazione:

$$\mathbf{v}_1^T \mathbf{i}_2 = 0 \quad (12)$$

Infatti, si ha

$$\mathbf{v}_1^T \mathbf{i}_2 = (\mathbf{M} \mathbf{e}_1)^T \mathbf{i}_2 = \mathbf{e}_1^T \mathbf{M}^T \mathbf{i}_2 = \mathbf{e}_1^T \mathbf{A} \mathbf{i}_2 = \mathbf{e}_1^T \mathbf{0} = 0$$

Facendo riferimento a versi di tensione e corrente associati secondo la scelta dell'utilizzatore (fig. 6), si definisce **potenza elettrica assorbita** da un bipolo in un generico istante  $t$ , il prodotto tra la tensione presente ai suoi terminali all'istante  $t$  e la corrente che lo attraversa in quell'istante:

$$p(t) = v(t) i(t) \quad (13)$$

Infatti, dalle definizioni di  $i = dq/dt$  e di  $v = dw/dq$ , si ha  $v i = (dw/dq)(dq/dt) = dw/dt = p$ . Nel caso in cui i versi della tensione e della corrente siano associati secondo la scelta del generatore, il prodotto vi definisce la potenza elettrica erogata dal bipolo.

Più in generale, facendo riferimento ad un generico componente con  $N$  terminali, la potenza elettrica assorbita da tale componente in un generico istante  $t$  è data dalla seguente espressione:

$$p(t) = \sum_{k=1}^{N-1} v_{kN}(t) i_k(t) \quad (13.a)$$

dove si è preso l' $n$ -esimo terminale come terminale di riferimento per le tensioni ed i versi positivi delle correnti sono tutti entranti nell'elemento. Si dimostra che la potenza elettrica assorbita non dipende dalla scelta del terminale di riferimento, infatti, facendo uso delle leggi di Kirchhoff delle tensioni prima e della legge di Kirchhoff delle correnti poi si ottiene:

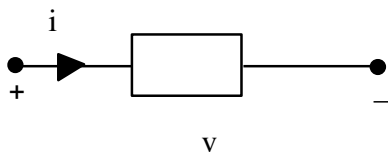
$$p' = \sum_{k=1, k \neq j}^N v_{kj} i_k = \sum_{k=1, k \neq j}^N (v_{kN} - v_{jN}) i_k = \sum_{k=1, k \neq j}^N v_{kN} i_k + v_{jN} i_j = p \quad (13.b)$$

Se si applica il teorema di Tellegen (12) considerando il vettore delle tensioni ed il vettore delle correnti che effettivamente sono presenti nel circuito ad un generico istante  $t$ , si ottiene la relazione (14) che, sulla base della definizione (13), mostra come la potenza elettrica assorbita da tutti i componenti del circuito risulti in ogni istante nulla.

$$\mathbf{v}(t)^T \mathbf{i}(t) = v_1(t) i_1(t) + v_2(t) i_2(t) + \dots = p_1(t) + p_2(t) + \dots = 0 \quad (14)$$

### 3. COMPONENTI

Nel seguito vengono descritte e discusse le equazioni costitutive e le proprietà fondamentali di alcuni tra i componenti di impiego più diffuso in elettrotecnica. In generale i componenti sono caratterizzati da una relazione (caratteristica o equazione costitutiva) tra la corrente che li attraversa e la tensione tra i loro terminali<sup>(o)</sup>. **Un componente in cui sia determinabile la tensione nota la corrente si dice *controllato in corrente*** (cioè, è possibile alimentarlo con un generatore di corrente con corrente impressa qualsiasi [definito nel seguito] e ad ogni valore della corrente impressa corrisponde un solo valore della tensione ai terminali); analogamente, **un componente in cui sia determinabile la corrente nota la tensione si dice *controllato in tensione*** (cioè, è possibile alimentarlo con un generatore di tensione con tensione impressa qualsiasi [definito nel seguito] e ad ogni valore della tensione impressa corrisponde un solo valore della corrente assorbita). Infine, si premette che **due componenti si dicono equivalenti quando presentano la stessa caratteristica tensione-corrente** (anche se hanno una struttura interna differente).



Caratteristica del componente:  $f(i, v) = 0$

Se il componente è *controllato in corrente*:  $v = h(i)$

Se il componente è *controllato in tensione*:  $i = g(v)$

<sup>(o)</sup> Il tempo può comparire esplicitamente nella relazione caratteristica. In tal caso il componente è detto *tempo-variante*, altrimenti il componente è detto *tempo-invariante*. Tutti i componenti trattati nel seguito sono tempo-invarianti.

## Resistore lineare

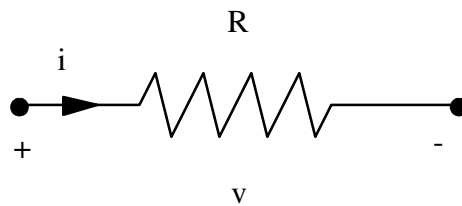


Figura 7 Simbolo del resistore lineare

Il simbolo del resistore lineare è indicato nella figura 7. Con riferimento alla scelta dell'utilizzatore per i versi positivi di tensione e corrente, la legge costitutiva del resistore è la seguente:

$$v = R i \quad (15.a)$$

o, alternativamente

$$i = G v \quad (15.b)$$

dove  $R$  è una costante chiamata resistenza (misurata in  $\Omega$  [Ohm]),  $G$  è una costante chiamata conduttanza (misurata in S [Siemens]) e risulta  $G = 1/R$ . L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (13) e risulta:

$$p = v i = (R i) i = R i^2 = i^2/G \quad (16.a)$$

o, alternativamente

$$p = v i = v (v/R) = v^2/R = G v^2 \quad (16.b)$$

Se la resistenza  $R$  è positiva, la potenza elettrica assorbita risulta essere sempre positiva, o al più nulla quando la corrente è nulla; i componenti che godono di tale proprietà vengono detti **componenti passivi**. Facendo ricorso alle conoscenze della fisica, si può dimostrare che un filo di rame di lunghezza  $L$  e sezione  $S$  può essere modellato per mezzo di un resistore di resistenza  $R$  pari a  $\rho L/S$ , in cui la potenza elettrica assorbita viene trasformata in energia termica mediante un fenomeno noto come "effetto Joule".

Dalla (15.a) segue che se è nota la corrente che circola sul resistore è nota anche la tensione ai suoi capi; quindi il resistore è un componente controllato in corrente. Inoltre, se  $R$  è diversa da zero, quando è nota la tensione è anche nota la corrente, pari a  $v/R$ ; quindi il resistore è anche un componente controllato in tensione. Pertanto, il resistore non nullo risulta un componente controllato sia in tensione che in corrente.

La connessione ideale, illustrata nella figura 3 ed anche chiamata corto circuito, può essere considerata un resistore lineare di resistenza nulla (o conduttanza infinita). Come tale risulta essere un componente controllato in corrente, ma non in tensione; infatti ad un unico valore di tensione (zero) corrispondono infiniti valori possibili della corrente. Viceversa, un circuito aperto, il cui simbolo è rappresentato nella figura 8, può essere considerato come un resistore di resistenza infinita (o conduttanza zero) e come tale è un componente controllato in tensione, ma non in corrente: infatti all'unico valore possibile della corrente (zero) corrisponde una infinità di valori possibili della tensione ai suoi capi.

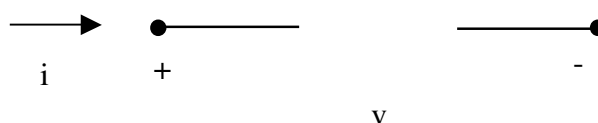


Figura 8 Simbolo del circuito aperto ( $i = 0$ )

Due resistori si dicono collegati in serie quando sono percorsi dalla stessa corrente (figura 9); dalle equazioni costitutive dei due resistori si vede che essi sono equivalenti ad un unico resistore avente una resistenza equivalente pari alla somma delle due resistenze. La relazione ottenuta è generalizzabile ad un numero qualsiasi di resistori in serie (per definizione tutti percorsi dalla stessa corrente):  $R_{eq} = \sum_k R_k$ .

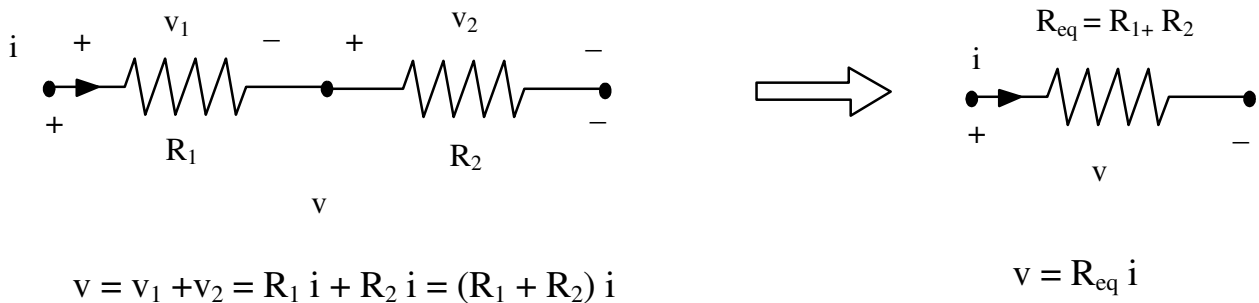


Figura 9 Resistori collegati in serie

Due resistori si dicono collegati in parallelo quando la tensione ai loro capi è la stessa (figura 10); dalle equazioni costitutive dei due resistori si vede che essi sono equivalenti ad un unico resistore avente una resistenza equivalente il cui inverso è dato dalla somma degli inversi delle due resistenze (ovvero, ricordando la definizione di conduttanza, due resistori in parallelo sono equivalenti ad un unico resistore avente una conduttanza equivalente pari alla somma delle due conduttanze:  $G_{eq} = G_1 + G_2$ ). La relazione ottenuta è generalizzabile ad un numero qualsiasi di resistori in parallelo (per definizione tutti soggetti alla stessa tensione):  $G_{eq} = \sum_k G_k$ .

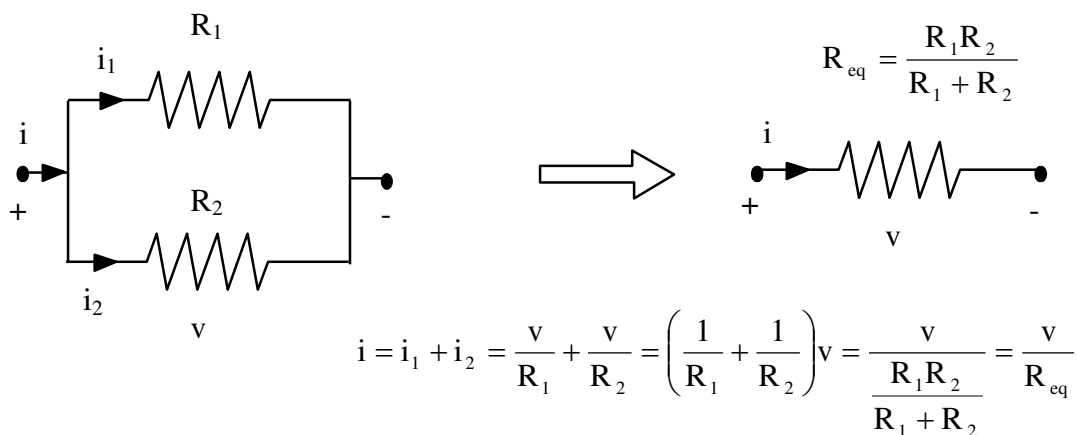


Figura 10 Resistori collegati in parallelo

### Diodo ideale

Il simbolo del diodo ideale è indicato nella figura 11. La legge costitutiva del diodo ideale è rappresentata, nel piano tensione - corrente, dal semiasse negativo delle tensioni e dal semiasse positivo delle correnti (vedi figura 12): se la tensione anodo (A) - catodo (K) è negativa, si dice che il diodo è polarizzato in inversa, in questo caso il passaggio della corrente è interdetto (per qualunque valore di tensione); viceversa, se il diodo è percorso da corrente (diodo in conduzione) la tensione ai suoi capi è nulla (per qualunque valore di corrente).

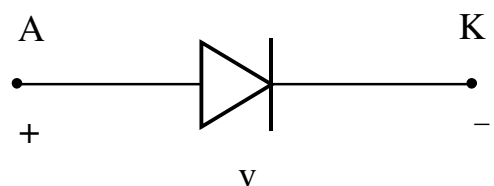


Figura 11 Simbolo del diodo ideale

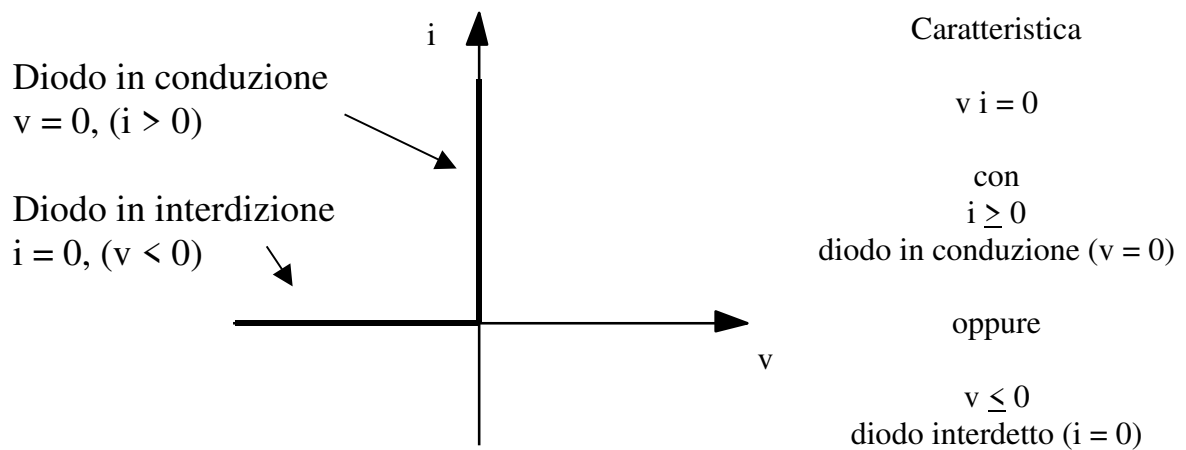


Fig. 12 Caratteristica del diodo ideale

Come si può vedere dalla caratteristica del diodo, il diodo non è controllato né in corrente, perché quando la corrente è nulla la tensione può assumere una infinità di valori (tutti quelle negativi), né in tensione, perché quando la tensione è nulla la corrente può assumere una infinità di valori, tutti quelli positivi. A seconda quindi che il diodo ideale sia polarizzato in diretta od in inversa, può essere considerato rispettivamente un corto circuito od un circuito aperto; in ogni caso la potenza elettrica assorbita dal diodo è nulla.

Un diodo reale è generalmente realizzato a partire da un cristallo di materiale semiconduttore (ad esempio Si, appartenente al IV gruppo della tavola periodica degli elementi) drogandolo con impurità di tipo p (ad esempio B, appartenente al III gruppo) e di tipo n (ad esempio P, appartenente al V gruppo), come illustrato nella figura 13. La caratteristica tensione - corrente della giunzione p-n così ottenuta è rappresentata, nella figura 13. Nella sua espressione analitica, sempre riportata nella figura 13,  $k$  è la costante di Boltzman ( $1.38 \times 10^{-23}$  J/K),  $T$  la temperatura in K,  $q$  la carica (in modulo) dell'elettrone ( $1.602 \times 10^{-19}$  C) ed  $I_0$  la corrente inversa di saturazione, che è una corrente (tipicamente molto piccola) caratteristica del dispositivo. Quando il diodo reale è in conduzione, è presente ai suoi capi una tensione positiva ( $V_d$ ) ed il diodo reale assorbe una modesta potenza elettrica dalla rete cui è collegato. Quando il diodo è polarizzato in inversa, fintanto che la tensione è inferiore, in valore assoluto, ad un valore limite (tensione di rottura o breakdown  $V_b$ ) circola una piccola corrente inversa (dal catodo all'anodo) ( $I_0$ ). Pertanto, anche in interdizione il diodo reale assorbe una potenza di modesta entità. Al superamento, in valore assoluto, della tensione di breakdown il diodo si danneggia irreparabilmente, consentendo la circolazione di una ingente corrente inversa. Il diodo reale può essere considerato come un resistore non lineare, la cui resistenza è una funzione della corrente.

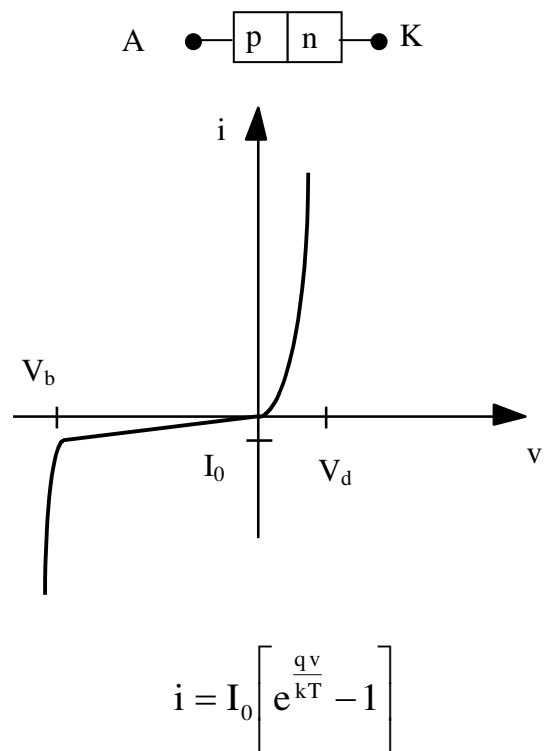


Fig. 13 Struttura e caratteristica di un diodo reale

## Induttore lineare

Si definisce induttore lineare un componente a due terminali il cui simbolo è indicato nella figura 14 caratterizzato dalla seguente legge costitutiva:

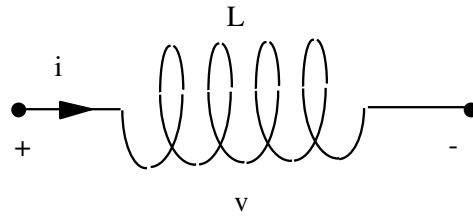


Figura 14 Simbolo dell'induttore

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (17)$$

dove  $L$  è una costante chiamata induttanza dell'induttore (misurata in H). L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (13) e risulta:

$$p = vi = L \frac{di}{dt} i = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right) \quad (18)$$

La (18) mostra come tutta la energia elettrica assorbita dall'induttore vada ad incrementare il termine  $E_m = \frac{1}{2} Li^2$  che assume quindi il significato di energia magnetica immagazzinata nell'induttore; tale energia, una volta immagazzinata, può essere interamente restituita ai componenti del circuito cui è collegato l'induttore durante un transitorio successivo. La potenza elettrica assorbita dall'induttore può quindi assumere valori sia positivi che negativi.

Un avvolgimento costituito da  $N$  spire finemente avvolte sopra un nucleo toroidale di materiale ferromagnetico dolce, qualora l'intensità della corrente che lo percorre non sia troppo elevata, in modo da poter trascurare la saturazione del materiale ferromagnetico, può essere modellato come un resistore ed un induttore collegati in serie (vedi fig. 15).

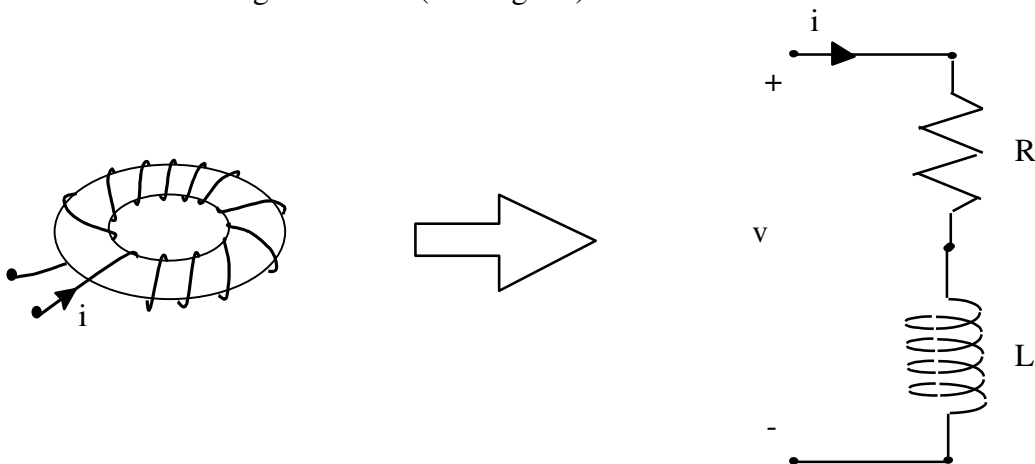


Figura 15 Induttore reale

Il campo magnetico  $H$  prodotto dalla corrente  $i$ , a causa dell'elevato valore della permeabilità magnetica ( $\mu$ ) del materiale di cui è costituito il nucleo toroidale dell'avvolgimento, tende a concentrarsi in tale regione. Si può dimostrare che, trascurando i flussi dispersi, il valore della induttanza dell'induttore è definito dalla relazione:

$$\frac{1}{2} Li^2 = \int_{V_{\text{toro}}} \frac{1}{2} \mu H^2 dV \quad (19)$$

La potenza elettrica assorbita dall'induttore reale, viene in parte trasformata in energia termica per effetto Joule ed in parte immagazzinata nel campo magnetico presente all'interno del nucleo toroidale. Per sottolineare il fatto che alla energia elettromagnetica  $E_m$  è associato un campo magnetico, tale energia viene più specificatamente chiamata energia magnetica immagazzinata nell'induttore.

L'equazione costitutiva dell'induttore (17) permette in ogni istante, se è noto il valore della tensione ai suoi capi, di calcolare la derivata temporale della corrente che lo attraversa lasciandone però completamente indeterminato il valore. Il valore della corrente individua univocamente l'energia magnetica immagazzinata nell'induttore e dipende dal transitorio subito dalla corrente nel periodo precedente all'istante di tempo che si considera. Infatti, integrando nel tempo la (17), supponendo che all'istante  $-\infty$ , quando è stato assemblato il circuito ed è iniziato il transitorio, la corrente sull'induttore fosse nulla, si ottiene:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau \quad (20)$$

La (20) mostra che il valore della corrente all'istante  $t$  dipende dal valore della tensione in tutti gli istanti precedenti. Per indicare ciò si dice che l'induttore è un componente dotato di memoria. Il valore della corrente che attraversa l'induttore individua univocamente l'energia magnetica immagazzinata al suo interno e perciò costituisce la sua variabile di stato.

### Condensatore lineare

Il simbolo del condensatore è indicato nella figura 16, la sua legge costitutiva è la seguente:

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (21)$$

dove  $C$  è una costante chiamata capacità del condensatore (misurata in F).

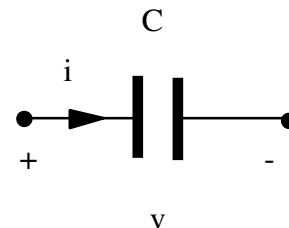


Figura 16 Simbolo del condensatore

L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (13) e risulta:

$$p = vi = vC \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} C v^2 \right) \quad (22)$$

La (22) mostra come tutta la energia elettrica assorbita dall'induttore vada ad incrementare il termine  $E_c = \frac{1}{2} C v^2$  che assume quindi il significato di energia elettromagnetica immagazzinata nel condensatore; tale energia, una volta immagazzinata, può essere interamente restituita ai componenti del circuito cui è collegato il condensatore durante un transitorio successivo. La potenza elettrica assorbita dal condensatore può quindi assumere valori sia positivi che negativi.

Un cilindro ed una corona cilindrica coassiali, costituiti di materiale conduttore, separate da una corona cilindrica, coassiale con le precedenti, costituita di materiale isolante, formano un condensatore cilindrico che può essere modellato con buona approssimazione mediante un condensatore ideale (vedi fig. 17).



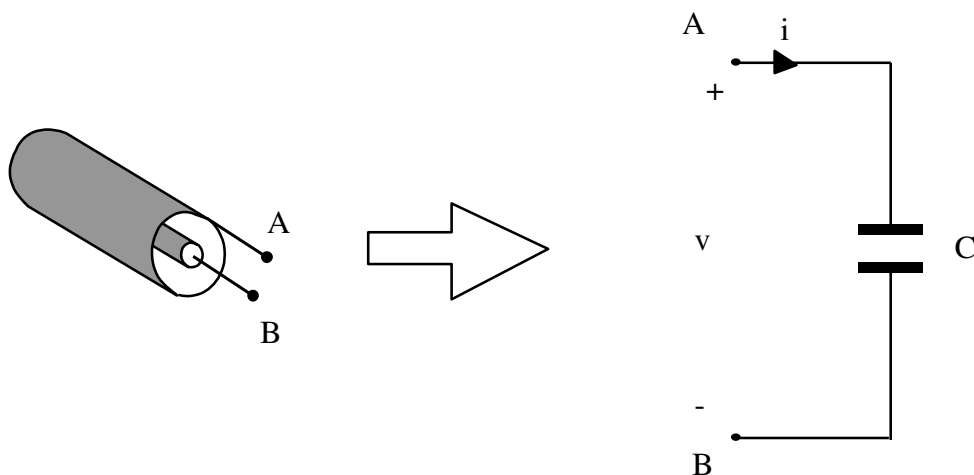


Figura 17 Condensatore cilindrico

Quando una carica  $q$  viene spostata tramite una connessione elettrica dalla armatura esterna (collegata al terminale A) a quella interna (collegata al terminale B), la regione di spazio occupata dall'isolante interposto tra le armature del condensatore è sede di un campo elettrico. Trascurando il campo elettrico all'esterno di tale regione, il valore della capacità del condensatore è definito dalla relazione:

$$\frac{1}{2} C v^2 = \int_{V_{\text{isolante}}} \frac{1}{2} \epsilon E^2 dV \quad (23)$$

dove  $\epsilon$  è la costante dielettrica dell'isolante. La potenza elettrica assorbita dal condensatore cilindrico viene immagazzinata nel campo elettrico presente nell'isolante tra le armature del condensatore. Per sottolineare il fatto che alla energia elettromagnetica  $E_e$  è associato un campo elettrico, tale energia viene più specificatamente chiamata energia elettrica immagazzinata nel condensatore.

Le relazioni (21, 22, 23) mostrano come esista una relazione di dualità tra il condensatore e l'induttore; infatti è possibile ottenere le relazioni caratteristiche di un componente da quelle dell'altro, scambiando tra di loro i simboli della tensione con la corrente, dell'induttanza con la capacità, del campo magnetico con il campo elettrico e della permeabilità magnetica con la costante dielettrica. Analogamente all'induttore, anche il condensatore è un componente con memoria; integrando la (21) dall'istante  $-\infty$ , in cui è stato assemblato il circuito ed in cui la tensione ai capi del condensatore si è supposta nulla, al generico istante  $t$  si ottiene:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad (24)$$

La (24) mostra che il valore della tensione in un generico istante  $t$  dipende dal valore della corrente in tutti gli istanti precedenti. Il valore della tensione ai capi del condensatore individua univocamente l'energia elettrica immagazzinata al suo interno e perciò rappresenta la sua variabile di stato. Infine, dalla 24, si riconosce anche che la carica  $Q$  presente sull'armatura positiva (cioè quella collegata al terminale positivo) è legata alla tensione  $v$  dalla relazione  $Q = C v$ .

## Generatore di tensione

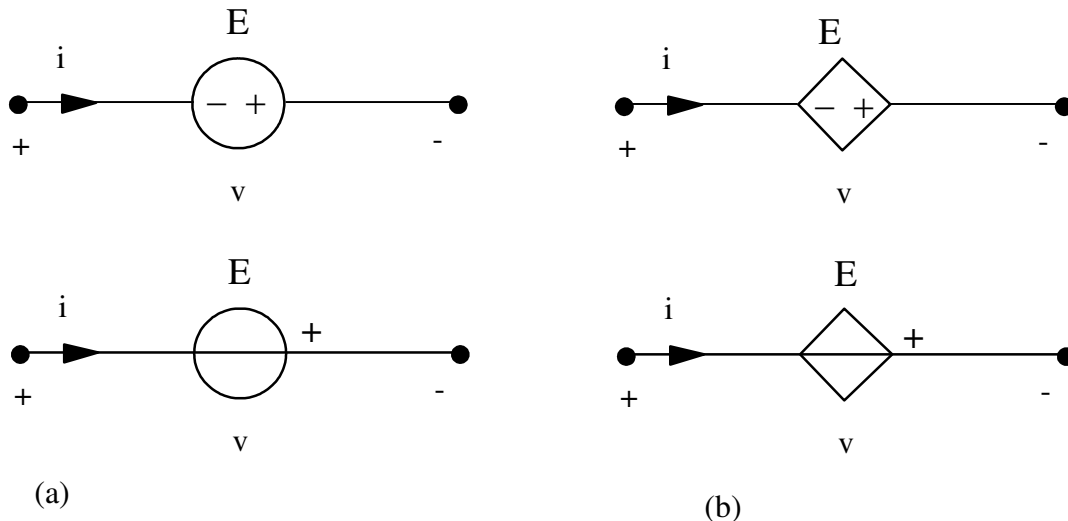
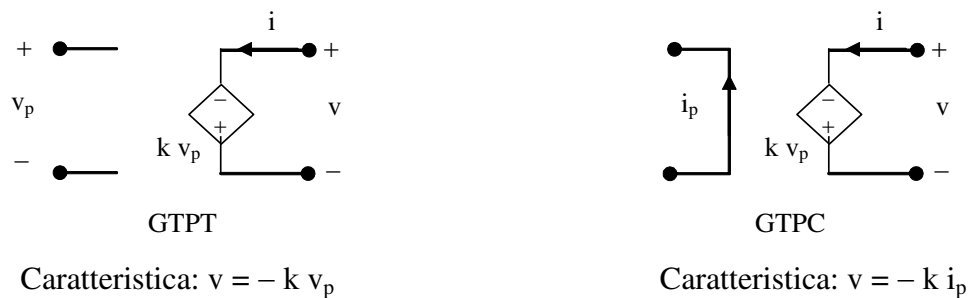


Figura 18 Simboli del generatore di tensione

I simboli che vengono utilizzati per il generatore indipendente di tensione sono indicati nella figura 18a, quelli utilizzati per il generatore di tensione pilotato (o dipendente) nella figura 18b (i due simboli vengono usati nella letteratura scientifica con uguale frequenza e sono del tutto equivalenti);. Nel caso del generatore di tensione indipendente, la tensione impressa  $E$  del generatore (o forza elettro-motrice del generatore) è una funzione nota del tempo, nel caso del generatore di tensione pilotato, la tensione impressa dipende dal valore della tensione (generatore di tensione pilotato in tensione: GTPT) o della corrente (generatore di tensione pilotato in corrente: GTPC) di un altro ramo del circuito. Con riferimento ai versi positivi delle grandezze indicati nella figura 18a, l'equazione costitutiva del generatore di tensione indipendente è la seguente:

$$v = - E \quad (25)$$

In figura sono illustrati i generatori pilotati GTPT e GTPC aventi caratteristica lineare.



L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (13) e risulta:

$$p = v i = - E i \quad (26)$$

La potenza elettrica assorbita risulta quindi positiva o negativa a seconda che la corrente attraversi il generatore nel verso associato o non associato secondo la convenzione degli utilizzatori rispetto a quello della tensione impressa. Il generatore indipendente di tensione è quindi in grado di assorbire od erogare, in dipendenza dalle condizioni di lavoro del circuito, una potenza elettrica di valore qualsiasi, mantenendo comunque inalterato il valore della tensione ai suoi capi. Il generatore indipendente di tensione è un componente controllato in corrente. Il generatore dipendente di tensione non è un componente controllato né in tensione né in corrente.

Una batteria (generatore di tensione reale) può essere modellata elettricamente mediante lo schema illustrato nella figura 19, costituito da un resistore e da un generatore indipendente di tensione collegati in serie.

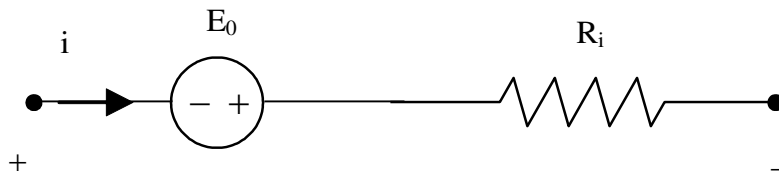


Figura 19a Modello circuitale di una batteria

Il generatore di tensione permette di simulare la trasformazione di energia chimica in elettrica e viceversa che avviene all'interno della batteria; la tensione impressa  $E_0$  è pari alla tensione ai capi della batteria durante il funzionamento a vuoto (quando non eroga corrente). La resistenza  $R_i$  del resistore, viene detta resistenza interna della batteria e permette di simulare la dissipazione di energia elettrica, per effetto Joule, in calore che viene ceduto all'ambiente circostante, che accompagna il passaggio della corrente nella batteria. A questa dissipazione è associata una caduta di tensione. La caratteristica tensione-corrente del bipolo di figura 19a è illustrata in figura 19b. Il generatore di tensione reale (la batteria) è un componente controllato sia in tensione che in corrente.

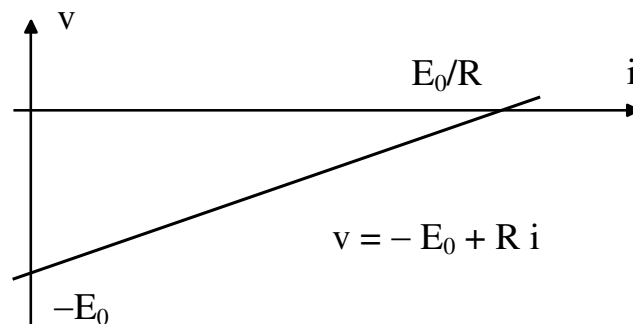


Figura 19b Caratteristica tensione-corrente di un generatore di tensione reale (batteria).

### Generatore di corrente

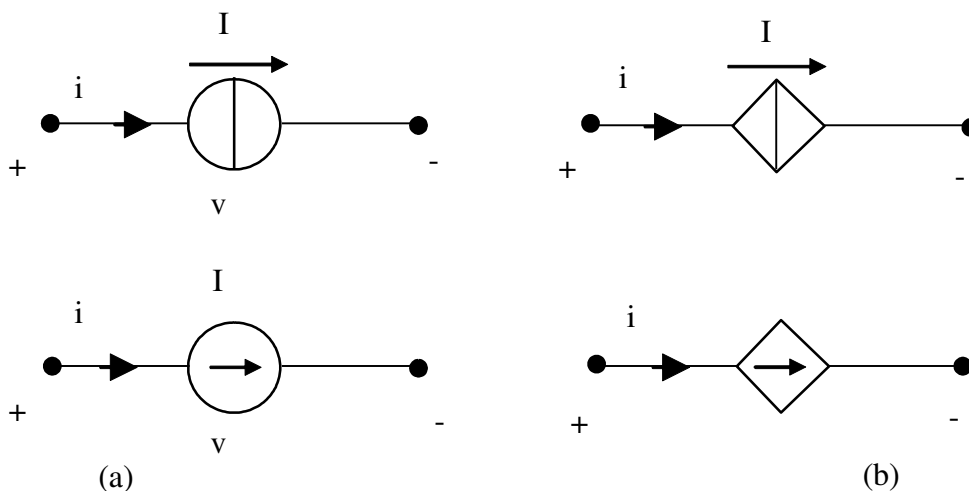
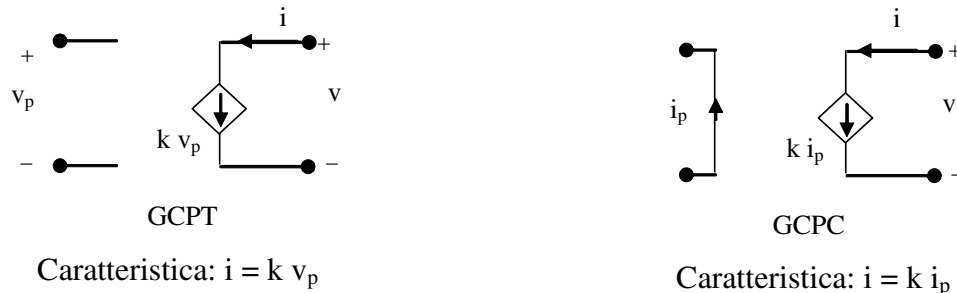


Figura 20 Simboli del generatore di corrente

I simboli che vengono utilizzati per il generatore indipendente di corrente sono indicati nella figura 20a, quelli che vengono utilizzati per il generatore di corrente pilotato (o dipendente) nella figura 20b (i due simboli vengono usati nella letteratura scientifica con uguale frequenza e sono del tutto equivalenti). Nel caso del generatore indipendente la corrente impressa ( $I$ ) è una funzione nota del tempo, mentre nel caso del generatore pilotato dipende da un'altra grandezza che può essere la corrente (generatore di corrente pilotato in corrente: GCPC) o la tensione (generatore di corrente pilotato in tensione: GCPT) di un altro componente del circuito. Con riferimento ai versi positivi delle grandezze indicati nella figura, l'equazione costitutiva del generatore di corrente è la seguente:

$$i = I \quad (27)$$

In figura sono illustrati i generatori pilotati GCPT e GCPC aventi caratteristica lineare.



L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (13) e risulta:

$$p = v i = v I \quad (28)$$

La potenza elettrica assorbita risulta quindi positiva o negativa a seconda che la tensione ai capi del generatore abbia verso associato o non associato (secondo la convenzione degli utilizzatori) rispetto a quello della corrente impressa. Il generatore indipendente di corrente è quindi in grado di assorbire od erogare, in dipendenza dalle condizioni di lavoro del circuito, una potenza elettrica di valore qualsiasi, mantenendo comunque inalterato il valore della corrente che lo attraversa. Il generatore indipendente di corrente è un componente controllato in tensione. Il generatore dipendente di corrente non è un componente controllato né in tensione né in corrente.

A differenza dei componenti visti in precedenza, non esiste un componente elettrico reale che venga modellato elettricamente, con buona approssimazione, da un solo generatore di corrente. Il generatore di corrente interviene invece nel circuito elettrico equivalente dei dispositivi elettronici. Ad esempio, è possibile realizzare un circuito complesso che modella un transistor npn in cui sono presenti due generatori di corrente pilotati in corrente.

## Il trasformatore ideale

Il trasformatore ideale è un doppio bipolo il cui funzionamento è descritto dalle seguenti relazioni lineari:

$$v_1 = K v_2 \quad (29.a)$$

$$i_2 = -K i_1 \quad (29.b)$$

Dove la costante  $K$  è detta rapporto di trasformazione. Il simbolo del trasformatore ideale è indicato nella figura 21. Si noti che in figura 21 una coppia di terminali è segnata con un punto, indicando quindi i versi di riferimento positivi delle tensioni e delle correnti per cui le equazioni costitutive (30) sono corrette. In figura 26 è mostrato inoltre uno dei possibili circuiti equivalenti del trasformatore ideale. Si noti anche che, poiché il trasformatore ideale è un componente ideale definito dalle (30), le relazioni tra tensioni e correnti a primario e secondario sono valide per tutte le forme d'onda (incluso quindi il regime stazionario).

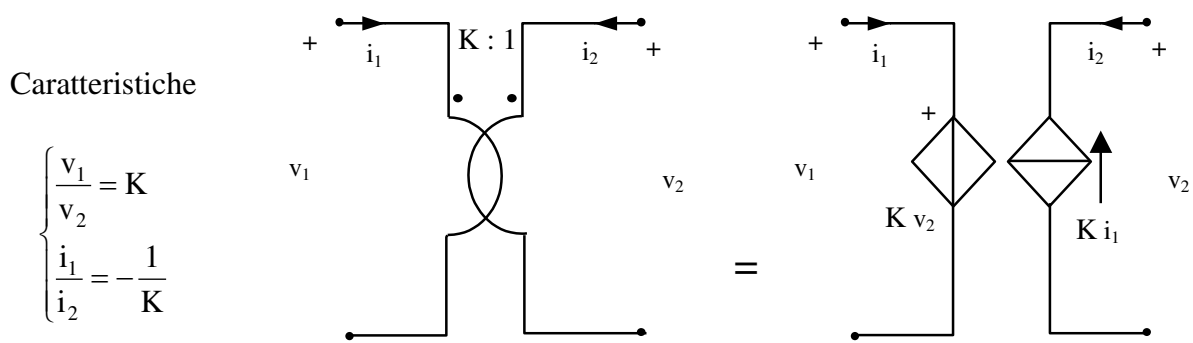


Figura 21 - Trasformatore ideale e circuito equivalente.

La potenza assorbita dal trasformatore ideale è nulla; infatti, con riferimento ai versi di riferimento positivi delle tensioni e delle correnti definiti in figura 21, si ha

$$p(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = (Kv_2(t))\left(-\frac{i_2(t)}{K}\right) + v_2(t)i_2(t) = -v_2(t)i_2(t) + v_2(t)i_2(t) = 0$$

Quindi la somma delle potenze assorbite a primario e secondario è complessivamente nulla, ovvero la potenza assorbita a primario dal trasformatore ideale ( $p_1 = v_1 i_1$ ) risulta in ogni istante uguale a quella erogata al secondario ( $p_2 = -v_2 i_2$ ). Anche se non assorbe potenza, il trasformatore ideale muta i parametri (tensione e corrente) con cui la energia elettrica viene assorbita a primario ed erogata a secondario: la tensione viene ridotta (od aumentata) di un fattore pari al rapporto di trasformazione del trasformatore  $K$  mentre la corrente viene aumentata (o diminuita) dello stesso fattore.

Quando a secondario di un trasformatore ideale è collegato un resistore di resistenza  $R$ , il primario si comporta come un resistore di resistenza equivalente  $K^2R$ . Tale equivalenza è illustrata nella figura 22 e prende il nome di “riduzione da secondario a primario”. La dimostrazione è immediata:

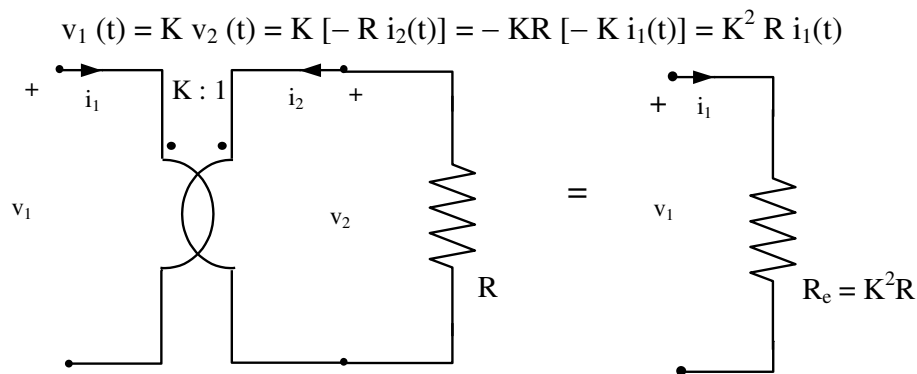


Figura 22 - Riduzione da secondario a primario.

## METODI PER L'ANALISI DEI CIRCUITI

Nel seguito vengono illustrati, mediante esempi, alcuni tra i metodi più utilizzati per l'analisi dei circuiti elettrici. Il problema che si vuole risolvere è il seguente: assegnato il circuito elettrico e le grandezze impresse dai generatori indipendenti presenti, in generale funzioni qualunque del tempo, si vuole calcolare l'andamento temporale delle correnti e delle tensioni in tutti i rami del circuito. **Come già detto, si suppone per semplicità che tutti i componenti siano dei bipoli, potendosi ricondurre alla ipotesi mediante l'introduzione di circuiti equivalenti dei componenti a più di due terminali.** Gli esempi illustrativi si riferiscono, per semplicità, a circuiti in regime stazionario (o regime di corrente continua), definito dalla condizione  $d/dt \equiv 0$ . In tal caso, ogni grandezza nel circuito si suppone tempo-invariante.

### DAI CIRCUITI AI GRAFI

È possibile associare ad ogni circuito un'entità matematica  $G$  chiamata *grafo*, formata da un insieme di nodi  $N$  (nodi del circuito) e da un insieme di rami  $R$  (rami del circuito) che collegano i nodi tra loro. Notiamo che si è così evidenziata la struttura topologica del circuito, cioè il modo in cui sono connessi i componenti tra loro, senza preoccuparsi delle caratteristiche dei componenti stessi. Ad ogni ramo sono associati una corrente di ramo ed una tensione di ramo. È possibile associare ad ogni nodo un potenziale (tensione di nodo) definita come tensione esistente tra il nodo in esame e il nodo di riferimento, il cui simbolo è  $\phi$ , scelto arbitrariamente.  $\perp$  Una proprietà del circuito che si trasferisce al corrispondente grafo è la *proprietà di connessione*, secondo la quale tutto il circuito è connesso elettricamente, e quindi per ogni nodo del circuito è possibile trovare un percorso che, seguendo i rami del grafo, connetta tale nodo al nodo di riferimento (nel caso in cui il circuito non sia connesso vedremo che è sempre possibile connetterlo interponendo un collegamento tra ogni coppia di circuiti non connessi). Ogni ramo del grafo deve essere orientato, ottenendo così un grafo orientato: questa orientazione corrisponde al verso positivo della corrente in quel ramo. L'orientazione della tensione del ramo può essere fatta indipendentemente da quella della corrente. Tuttavia, usualmente la tensione sarà orientata secondo la *convenzione degli utilizzatori* in modo che la corrente vada dal terminale positivo a quello negativo. Con questa convenzione, la potenza  $p(t) = v(t) i(t)$  è assorbita se positiva, erogata se negativa. Se la tensione è orientata in senso opposto (convenzione dei generatori), allora la potenza è assorbita se negativa, erogata se positiva.

A titolo di esempio si consideri il circuito illustrato nella figura 1 ( $N = 4$  nodi,  $R = 6$  rami), dove non sono stati indicati i versi positivi delle tensioni di ramo, perché si suppone di considerare comunque versi di riferimento associati per tensioni e correnti di ramo mediante la scelta dell'utilizzatore. Il grafo orientato corrispondente è illustrato in figura 1.a.

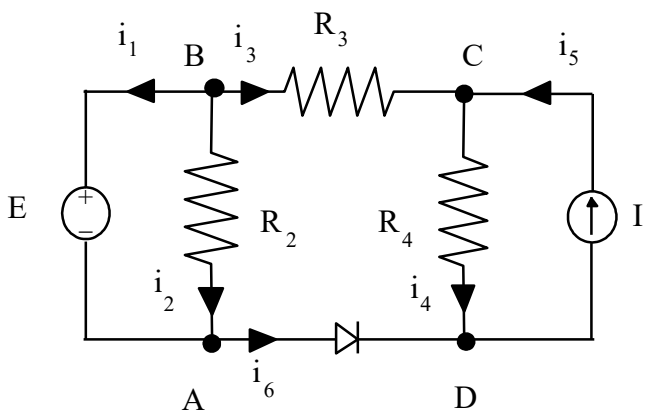


Figura 1

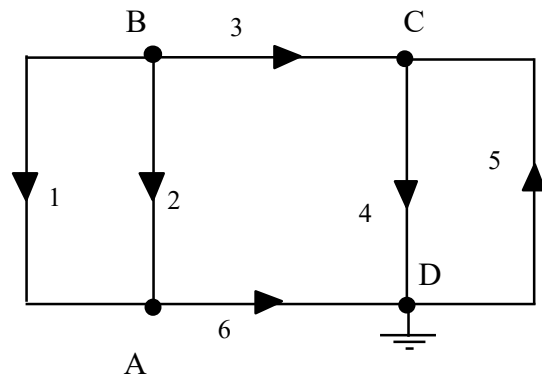


Figura 1.a

Le Leggi di Kirchhoff (delle Tensioni e delle Correnti) ci permettono di scrivere delle equazioni che descrivono la topologia del circuito, ovvero il modo in cui i componenti sono connessi tra loro:

- La Legge di Kirchhoff delle Correnti (*LKC*) afferma che la somma algebrica delle correnti in un nodo è nulla in qualsiasi istante di tempo.

- Equazione per un nodo ( $LKC_n$ ): 
$$\sum_{r=1}^n i_r = 0 \quad (1.a)$$

- La Legge di Kirchhoff delle Tensioni (*LKT*) può essere formulata in due modi equivalenti tra loro:

- La somma algebrica delle tensioni di ramo sui rami di una maglia è nulla per qualsiasi istante di tempo;

- Equazione per una maglia ( $LKT_m$ ): 
$$\sum_{r=1}^m v_r = 0 \quad (1.b)$$

- Ogni tensione di ramo è data dalla differenza dei potenziali di nodo dei suoi terminali.

- Equazione per un ramo ( $LKT_r$ ): 
$$v_{AB} = e_A - e_B \quad (1.c)$$

Scriviamo le equazioni *LKC* e *LKT* utilizzando il grafo associato al circuito. Supponiamo che il grafo associato abbia  $N$  nodi e  $R$  rami orientati. Con riferimento al grafo di figura 1.a,  $N = 4$  (A, B, C, D) e  $R = 6$ . Si scelga ad esempio il nodo D come nodo di riferimento per le tensioni e si indichino con  $e_A$ ,  $e_B$  ed  $e_C$  le tensioni dei nodi A, B e C rispetto al nodo di riferimento ( $e_D = 0$ ). Le equazioni  $LKT_r$  e  $LKC_n$  assumono allora la forma rispettivamente delle (2.i) e (2.ii):

$$\begin{aligned}
 & v_1 = e_B - e_A \\
 & v_2 = e_B - e_A \\
 LKT_r: & v_3 = e_B - e_C \\
 & v_4 = e_C \\
 & v_5 = -e_C \\
 & v_6 = e_A
 \end{aligned} \quad (2.i)$$

(una equazione per ogni ramo, quindi in generale  $R$  equazioni in cui compaiono  $R$  tensioni di ramo ed  $N - 1$  potenziali di nodo; nell'esempio in oggetto possiamo quindi scrivere 6  $LKT_r$  in cui compaiono 6 tensioni di ramo ed 3 potenziali di nodo)

$$\begin{aligned}
 & i_1 + i_2 - i_6 = 0 \\
 LKC_n: & -i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\
 & i_3 - i_4 + i_5 = 0
 \end{aligned} \quad (2.ii)$$

(una equazione per ogni nodo, meno quello di riferimento, quindi in generale  $N - 1$  equazioni in cui compaiono  $R$  correnti di ramo; nell'esempio in oggetto possiamo quindi scrivere 3  $LKC_n$  in cui compaiono 6 correnti di ramo). È ovviamente possibile scrivere una ulteriore  $LKC_n$  applicata al nodo di riferimento ( $-i_6 - i_4 + i_5 = 0$ ), ma è facile mostrare che è una combinazione lineare delle precedenti  $N - 1$ . Infatti, tale equazione si ottiene sommando le (2.ii).

Si noti che le (2.i) e le (2.ii) sono  $R + N - 1$  equazioni in  $2R + N - 1$  incognite (tensioni di ramo, potenziali di nodo e correnti di ramo): per risolvere il circuito dobbiamo aggiungere ancora  $R$  equazioni, e precisamente i modelli dei componenti.

La *LKT* può essere enunciata considerando le maglie del circuito (secondo la formulazione 1.b). Per questo, introduciamo il concetto di *albero*  $T$  associato ad un grafo  $G$ :

- $T$  è un sottografo di  $G$  con tutti i nodi e una parte dei rami; ogni ramo conserva la sua orientazione;
- $T$  è connesso;

3.  $T$  non ha maglie: c'è un solo percorso che collega ogni coppia di nodi.

Ovviamente, ad ogni grafo è associato più di un albero. Comunque, ogni albero  $T$  ha  $N - 1$  rami. I rami di  $G$  appartenenti a  $T$  sono chiamati *rami dell'albero*, mentre i rimanenti sono chiamati *rami del coalbero* (e sono  $R - N + 1$ ). Se aggiungiamo un ramo del coalbero a  $T$ , creiamo una maglia che è formata da rami dell'albero e da quell'unico ramo del coalbero (*maglia fondamentale*). Per ogni ramo del coalbero, possiamo ripetere l'operazione formando ogni volta una maglia diversa, indipendente da tutte le altre<sup>(\*)</sup>. Si può allora dimostrare che il numero di maglie indipendenti di un circuito (cioè l'insieme delle maglie fondamentali) è pari ai rami del coalbero, e precisamente  $R - (N - 1) = R - N + 1$ .

A titolo di esempio si consideri il grafo illustrato nella figura 1.a; uno dei possibili alberi è illustrato in figura 1.b (rami 2, 3 e 4). I rami tratteggiati sono quelli di coalbero (rami 1, 5 e 6). Le maglie indipendenti sono quindi  $R - N + 1 = 3$ , (in particolare  $a = A1B2A$ ,  $b = A2B3C4D6A$ ,  $c = D4C5D$ ).

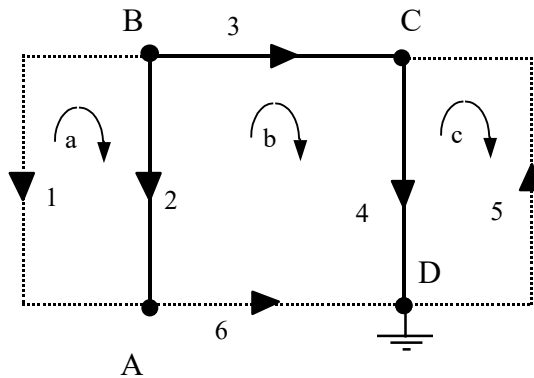


Figura 1.b

Applicando la  $LKT_m$  alle maglie così definite si ottiene il seguente sistema di equazioni lineari in cui compaiono solo le tensioni di ramo:

$$\begin{aligned}
 LKT_m: \quad & -v_1 + v_2 = 0 \\
 & -v_2 + v_3 + v_4 - v_6 = 0 \\
 & -v_4 - v_5 = 0
 \end{aligned} \tag{2.iii}$$

(una equazione per ogni maglia indipendente quindi in generale  $R - N + 1$  equazioni in cui compaiono  $R$  tensioni di ramo; nell'esempio in oggetto possiamo quindi scrivere 3  $LKT_m$  in cui compaiono 6 tensioni di ramo)

Si noti che le (2.iii) e le (2.ii) sono  $R$  equazioni in  $2R$  incognite (tensioni di ramo e correnti di ramo): per risolvere il circuito dobbiamo aggiungere ancora  $R$  equazioni, e precisamente i modelli dei componenti.

Operativamente, per trovare le maglie indipendenti di un circuito, si deve associare un albero  $T$  al grafo  $G$  del circuito, quindi scrivere la  $LKT_m$  per ogni maglia associata ad un ramo del coalbero.

## CIRCUITI PRIVI DI MEMORIA

I circuiti privi di memoria sono quelli in cui tutti i componenti del circuito sono privi di memoria ossia le loro caratteristiche tensione-corrente stabiliscono un legame istantaneo tra le due grandezze che non dipende dai valori da esse assunte in precedenza. In tal caso il sistema risolvibile del circuito stesso è costituito da un sistema di equazioni algebriche ed il valore di tutte le grandezze incognite in un generico

<sup>(\*)</sup> Un insieme di  $m$  maglie si dice indipendente se le  $m$  equazioni ottenute applicando la LKT ad ognuna di esse sono linearmente indipendenti. Pertanto, una maglia è indipendente da altre se la relativa equazione LKT è indipendente dalle equazioni LKT delle altre.



istante può essere calcolato dalla conoscenza del valore delle grandezze impresse del circuito in quello stesso istante.

### Analisi di Tableau

Il metodo più generale, per l'analisi di un circuito qualunque ( $R$  = numero di rami del circuito,  $N$  = numero di nodi del circuito), consiste nel considerare come incognite del sistema le  $R$  correnti di ramo, le  $R$  tensioni di ramo e le  $(N - 1)$  tensioni di nodo rispetto ad un nodo arbitrariamente scelto come nodo di riferimento. Il sistema risolvibile viene quindi ottenuto da  $R$  equazioni LKT<sub>r</sub> (una per ogni ramo), da  $N - 1$  equazioni LKC<sub>n</sub> (una per ogni nodo, tranne quello di riferimento) e da  $R$  equazioni costitutive dei componenti.

A titolo di esempio si consideri il circuito illustrato nella figura 1, dove non sono stati indicati i versi positivi delle tensioni di ramo, perché si suppone di considerare comunque versi di riferimento associati con la regola dell'utilizzatore per tensioni e correnti di ramo.

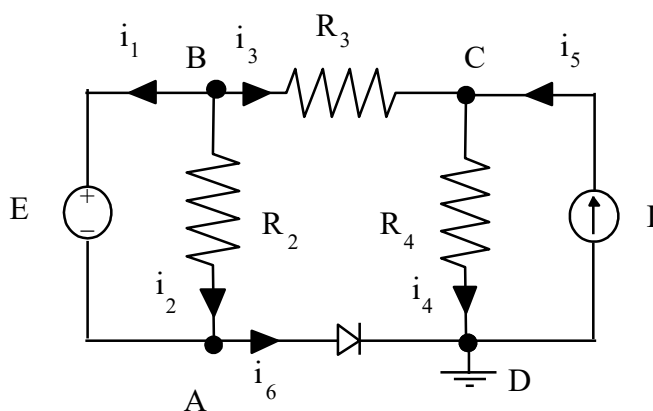


Figura 1

Si scelga arbitrariamente il nodo D come nodo di riferimento per le tensioni e si indichino con  $e_A$ ,  $e_B$  ed  $e_C$  le tensioni dei nodi A, B e C rispetto al nodo di riferimento. Le equazioni LKT<sub>r</sub> e LKC<sub>n</sub> assumono allora la forma rispettivamente delle (2.i) e (2.ii):

$$\begin{aligned} v_1 &= e_B - e_A \\ v_2 &= e_B - e_A \\ v_3 &= e_B - e_C \\ v_4 &= e_C \\ v_5 &= -e_C \\ v_6 &= e_A \end{aligned} \tag{2.i}$$

( $R = 6$  equazioni LKT<sub>r</sub> in cui compaiono come incognite  $R = 6$  tensioni di ramo ed  $N - 1 = 3$  potenziali di nodo)

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 - i_6 &= 0 \\ -i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\ i_3 - i_4 + i_5 &= 0 \end{aligned} \tag{2.ii}$$

( $N - 1 = 3$  equazioni LKC<sub>n</sub> in cui compaiono come incognite  $R = 6$  correnti di ramo)

Il sistema viene quindi chiuso dalle seguenti equazioni costitutive dei componenti:

(R = 6 equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono come incognite R = 6 tensioni di ramo ed R = 6 correnti di ramo)

$$\begin{aligned}
 v_1 &= E \\
 v_2 &= R_2 i_2 \\
 v_3 &= R_3 i_3 \\
 v_4 &= R_4 i_4 \\
 i_5 &= I \\
 v_6 i_6 &= 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

Il sistema costituito dalle equazioni (2.i), (2.ii) e (3), dove sono note le grandezze E, I, R<sub>2</sub>, R<sub>3</sub>, ed R<sub>4</sub>, costituisce un sistema di 15 equazioni nelle 15 incognite del problema che sono rispettivamente e<sub>A</sub>, e<sub>B</sub>, e<sub>C</sub>, v<sub>1</sub>, v<sub>2</sub>, v<sub>3</sub>, v<sub>4</sub>, v<sub>5</sub>, v<sub>6</sub>, i<sub>1</sub>, i<sub>2</sub>, i<sub>3</sub>, i<sub>4</sub>, i<sub>5</sub>, i<sub>6</sub>. Il sistema di equazioni risolvente è non lineare per la presenza del diodo che è un componente non lineare (ultima equazione delle (3)). Il procedimento illustrato è completamente trasferibile su un computer e la soluzione (o le soluzioni matematicamente possibili, poiché in generale, essendo il sistema non lineare, può esistere più di una soluzione) può essere ottenuta numericamente. In questo caso la soluzione può essere ottenuta eliminando la non linearità del sistema, considerando separatamente i due casi possibili: diodo in conduzione (i<sub>6</sub> ≥ 0, v<sub>6</sub> = 0) oppure diodo interdetto (i<sub>6</sub> = 0, v<sub>6</sub> ≤ 0).

**Diodo in conduzione.** Ponendo v<sub>6</sub> = 0 nelle (2.i) ed eliminando contemporaneamente l'ultima equazione delle (3) che è diventata una identità, si ottiene un sistema di 14 equazioni lineari nelle 14 incognite e<sub>A</sub>, e<sub>B</sub>, e<sub>C</sub>, v<sub>1</sub>, v<sub>2</sub>, v<sub>3</sub>, v<sub>4</sub>, v<sub>5</sub>, i<sub>1</sub>, i<sub>2</sub>, i<sub>3</sub>, i<sub>4</sub>, i<sub>5</sub>, i<sub>6</sub>, la cui soluzione è la seguente:

$$\begin{aligned}
 e_A &= 0 \quad ; \quad e_B = E \quad ; \quad e_C = R_4 \frac{E + R_3 I}{R_3 + R_4} \\
 v_1 &= E \quad ; \quad i_1 = -\frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4} - \frac{E}{R_2} \\
 v_2 &= E \quad ; \quad i_2 = \frac{E}{R_2} \\
 v_3 &= R_3 \frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4} \quad ; \quad i_3 = \frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4} \\
 v_4 &= R_4 \frac{E + R_3 I}{R_3 + R_4} \quad ; \quad i_4 = \frac{E + R_3 I}{R_3 + R_4} \\
 v_5 &= -R_4 \frac{E + R_3 I}{R_3 + R_4} \quad ; \quad i_5 = I \\
 i_6 &= -\frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Affinché la soluzione trovata non contraddica l'ipotesi di diodo in conduzione deve essere i<sub>6</sub> ≥ 0 e quindi, dalla ultima delle (4) deve essere:

$$E \leq R_4 I \tag{5}$$

**Diodo interdetto.** Ponendo i<sub>6</sub> = 0 nelle (2.ii) ed eliminando contemporaneamente l'ultima equazione delle (3) che è diventata una identità, si ottiene un sistema di 14 equazioni lineari nelle 14 incognite e<sub>A</sub>, e<sub>B</sub>, e<sub>C</sub>, v<sub>1</sub>, v<sub>2</sub>, v<sub>3</sub>, v<sub>4</sub>, v<sub>5</sub>, v<sub>6</sub>, i<sub>1</sub>, i<sub>2</sub>, i<sub>3</sub>, i<sub>4</sub>, i<sub>5</sub>, la cui soluzione è la seguente:

$$\begin{aligned}
e_A &= -E + R_4 I \quad ; \quad e_B = R_4 I \quad ; \quad e_C = R_4 I \\
v_1 &= E \quad ; \quad i_1 = -\frac{E}{R_2} \\
v_2 &= E \quad ; \quad i_2 = \frac{E}{R_2} \\
v_3 &= 0 \quad ; \quad i_3 = 0 \\
v_4 &= R_4 I \quad ; \quad i_4 = I \\
v_5 &= -R_4 I \quad ; \quad i_5 = I \\
v_6 &= -E + R_4 I
\end{aligned} \tag{6}$$

Affinché la soluzione trovata non contraddica l'ipotesi di diodo interdetto deve essere  $v_6 \leq 0$  e quindi dalla ultima delle (6) deve essere:

$$E \geq R_4 I \tag{7}$$

Dal confronto della (5) con la (7) si vede che, una volta assegnati i valori di  $E$ ,  $I$  ed  $R_4$ , una sola delle due soluzioni è accettabile.

Riassumendo, per applicare il metodo di Tableau ad un circuito connesso qualunque ( $R$  = numero di rami del circuito,  $N$  = numero di nodi del circuito), si prende arbitrariamente un nodo come nodo di riferimento del circuito, si applica la  $LKT_r$  ad ogni ramo del circuito, si applica la  $LKC_n$  a tutti i nodi tranne quello di riferimento e si chiude il sistema con le equazioni costitutive (caratteristiche) dei componenti:

$$\begin{array}{ll}
R \text{ equazioni } LKT_r & \mathbf{v} = \mathbf{M} \mathbf{e} \\
N - 1 \text{ equazioni } LKC_n & \mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0} \\
R \text{ equazioni caratteristiche} & \mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}
\end{array}$$

dove  $\mathbf{v}$  è il vettore delle tensioni di ramo (dimensione  $R$ ),  $\mathbf{i}$  è il vettore delle correnti di ramo (dimensione  $R$ ),  $\mathbf{e}$  è il vettore delle tensioni di nodo (dimensione  $N - 1$ ),  $\mathbf{M}$  è una matrice costante  $R \times (N - 1)$  ed  $\mathbf{A}$  è una matrice costante  $(N - 1) \times R$  [Come si è già visto, risulta che  $\mathbf{M}$  è la trasposta di  $\mathbf{A}$ , cioè:  $\mathbf{M} = \mathbf{A}^T$ ]. In generale la funzione  $\mathbf{f}$  può dipendere anche dalla variabile temporale  $t$ , ma tale dipendenza, per semplicità di notazione, non è esplicitamente indicata. Il sistema risolvibile contiene dunque  $2R + N - 1$  equazioni in  $2R + N - 1$  incognite.

Nel caso particolare in cui tutti i componenti siano resistori lineari, generatori indipendenti di tensione e di corrente oppure generatori pilotati con caratteristica lineare, la rete si definisce lineare e le equazioni delle caratteristiche possono essere scritte nella forma

$$R \text{ equazioni caratteristiche} \quad \mathbf{H} \mathbf{i} + \mathbf{K} \mathbf{v} = \mathbf{S}$$

dove  $\mathbf{H}$  è una matrice costante  $R \times R$ ,  $\mathbf{K}$  è una matrice costante  $R \times R$  ed  $\mathbf{S}$  è il vettore di dimensione  $R$  che contiene le tensioni e le correnti impresse dai generatori indipendenti (sui rami in cui sono presenti e zero altrove). In tal caso il sistema risolvibile è lineare ed è possibile esprimere ogni variabile come combinazione lineare delle sole tensioni e correnti impresse dai generatori indipendenti. Con riferimento alla corrente sul  $k$ -esimo ramo potremo quindi scrivere:

$$i_k = \sum_n \underset{\text{gen.ind.tensione}}{g_{k,n}} E_{s,n} + \sum_m \underset{\text{gen.ind.corrente}}{\alpha_{k,m}} I_{s,m} \quad \text{per ogni } k$$

Tale relazione è l'enunciato del **Principio di Sovrapposizione degli Effetti**: *In una rete lineare la corrente in un generico ramo (effetto) è uguale alla somma algebrica delle correnti che vi sarebbero prodotte dai*

singoli generatori **indipendenti** presenti nella rete se agissero separatamente. Lo stesso vale per le tensioni di ramo e di nodo<sup>(o)</sup>.

### Eliminazione delle tensioni di nodo

Le soluzioni (4) e (6) sono state ottenute risolvendo un sistema di 14 equazioni lineari in 14 incognite. Tale soluzione, anche se la matrice del sistema è sparsa, può risultare complessa. L'ordine del sistema risolvente può essere ridotto osservando che è possibile ottenere un sistema di  $2R$  equazioni indipendenti nelle sole tensioni e correnti di ramo incognite. Si consideri infatti la figura 2 in cui sono indicate 3 ( $R - N + 1$  risulta in questo caso uguale a 3) maglie indipendenti del circuito individuate in figura 1.b.

Applicando la  $LKT_m$  alle maglie così definite si ottiene il seguente sistema di equazioni lineari in cui compaiono solo le tensioni di ramo:

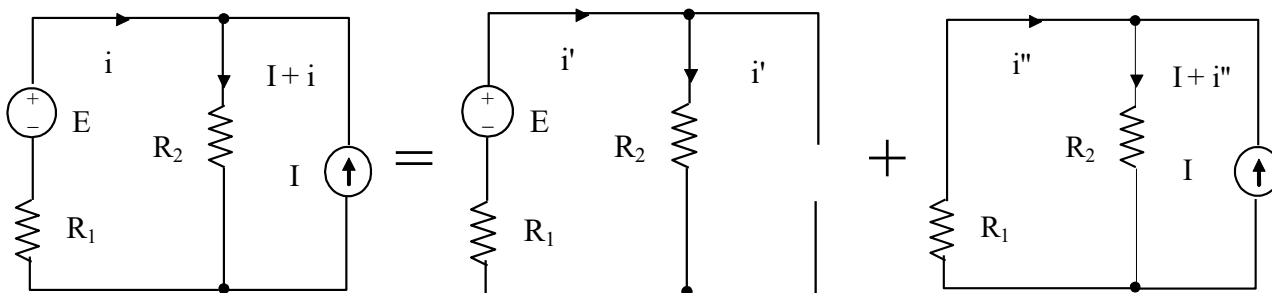
$$\begin{aligned} -v_1 + v_2 &= 0 \\ -v_2 + v_3 + v_4 - v_6 &= 0 \\ -v_4 - v_5 &= 0 \end{aligned} \quad (2.iii)$$

( $R - N + 1 = 3$  equazioni  $LKT_m$  in cui come incognite compaiono  $R = 6$  tensioni di ramo)

<sup>(o)</sup> Risolvere una rete lineare con il principio di sovrapposizione degli effetti significa allora scomporre la rete originaria in tante rete parziali quanti sono i generatori indipendenti, calcolare la corrente nei rami per ognuna di queste reti, e sommare algebricamente le correnti parziali. Si calcoli ad esempio la corrente  $i$  nella resistenza  $R_1$  della rete di figura. Si ha:

$$i = \frac{E}{R_1 + R_2} - \frac{R_2 I}{R_1 + R_2}$$

Ponendo  $i' = \frac{E}{R_1 + R_2}$  ;  $i'' = -\frac{R_2 I}{R_1 + R_2}$  si ha  $i = i' + i''$ , dove  $i'$  ed  $i''$  sono le correnti nelle due sottoreti:



La prima è la rete che si ottiene da quella originaria, annullando l'azione del generatore indipendente di corrente, la seconda quella in cui è annullata l'azione del generatore indipendente di tensione. La figura illustra il concetto mostrando, nel contempo, in che modo si esclude l'azione dei generatori: i generatori indipendenti di tensione nulla sono equivalenti a cortocircuiti, i generatori indipendenti di corrente nulla sono equivalenti a circuiti aperti.

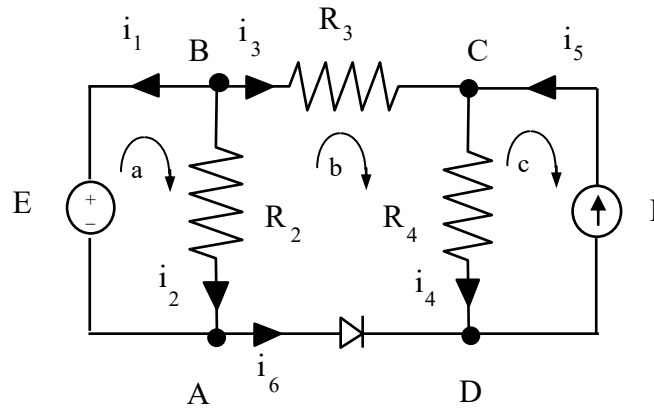


Figura 2

Le  $LKT_m$  (2.iii), le  $LKC_n$  (2.ii) e le relazioni costitutive (3) costituiscono un sistema di  $2R$  equazioni, risolvendo il quale è possibile calcolare le  $2R$  incognite tensioni e correnti di ramo.

( $N - 1 = 3$  equazioni  $LKC_n$  in cui compaiono come incognite  $R = 6$  correnti di ramo)

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 - i_6 &= 0 \\ -i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.ii)$$

$$\begin{aligned} i_3 - i_4 + i_5 &= 0 \\ v_1 &= E \end{aligned}$$

( $R = 6$  equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono come incognite  $R = 6$  tensioni di ramo ed  $R = 6$  correnti di ramo)

$$\begin{aligned} v_2 &= R_2 i_2 \\ v_3 &= R_3 i_3 \\ v_4 &= R_4 i_4 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} i_5 &= I \\ v_6 i_6 &= 0 \end{aligned}$$

Infine, per tutti i componenti controllati in tensione (in questo esempio il ramo 5) o in corrente (in questo esempio i rami 1, 2, 3, e 4), è possibile sostituire le equazioni costitutive nelle  $LKT_m$  ed  $LKC_n$ . Tale sostituzione porta ad un sistema contenente un numero di equazioni pari a  $R +$  (Numero di componenti non controllati né in tensione né in corrente), in altrettante variabili (tensioni o correnti di ramo). Nell'esempio in oggetto otterremo quindi (dato che il diodo è l'unico componente presente non controllato né in tensione né in corrente) il seguente sistema di 7 equazioni nelle incognite  $v_5, v_6, i_1, i_2, i_3, i_4, i_6$ :

$$\begin{aligned} -E + R_2 i_2 &= 0 \\ -R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4 - v_6 &= 0 \\ -R_4 i_4 - v_5 &= 0 \end{aligned} \quad (3.i)$$

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 - i_6 &= 0 \\ -i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.ii)$$

$$\begin{aligned} i_3 - i_4 + I &= 0 \\ v_6 i_6 &= 0 \end{aligned} \quad (3.iii)$$

Riassumendo, per applicare il metodo dell'eliminazione delle tensioni di nodo ad un circuito connesso qualunque ( $R =$  numero di rami del circuito,  $N =$  numero di nodi del circuito), si applica la  $LKT_m$  ad ogni maglia indipendente del circuito, si applica la  $LKC_n$  a tutti i nodi tranne uno e si chiude il sistema con le equazioni costitutive (caratteristiche) dei componenti:

$$R - N + 1 \text{ equazioni } LKT_m \quad \mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$N - 1$  equazioni LKC<sub>n</sub>

$$\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

$R$  equazioni caratteristiche

$$f(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

dove  $\mathbf{v}$  è il vettore delle tensioni di ramo (dimensione  $R$ ),  $\mathbf{i}$  è il vettore delle correnti di ramo (dimensione  $R$ ),  $\mathbf{B}$  è una matrice costante  $(R - N + 1) \times R$  ed  $\mathbf{A}$  è una matrice costante  $(N - 1) \times R$ . Il sistema risolvete contiene dunque  $2R$  equazioni in  $2R$  incognite. Tuttavia, se tutti i componenti sono controllati in tensione o in corrente è possibile sostituire le caratteristiche nelle LKT ed LKC, giungendo ad un sistema risolvete di  $R$  equazioni in  $R$  incognite.

### Metodo dei Tagli Fondamentali

Una differente semplificazione del sistema risolvete (2.iii), (2.ii), (3) si può ottenere osservando che le LKC permettono di esprimere la corrente in ciascun ramo di albero come una combinazione lineare delle correnti sui rami di coalbero. Infatti, dato che l'albero associato al grafo è, per definizione, privo di maglie, è sempre possibile associare ad ogni ramo d'albero una superficie chiusa (superficie di taglio) che intersechi, oltre ad esso, solo rami di coalbero. L'insieme dei rami intersecati da tale superficie chiusa prende il nome di taglio (la rimozione del taglio separa il grafo in due sotto-grafi non connessi). Se il taglio contiene un solo ramo di albero, esso prende il nome di taglio fondamentale relativo a quel ramo e a quell'albero. In figura 2.b sono illustrati tre superfici che individuano i tagli fondamentali associati ai rami di albero (tagli fondamentali: [1, 2, 6], [3, 6], [4, 5, 6]) da cui è possibile ricavare le (8) applicando la Legge di Kirchhoff delle Correnti su tali superfici (LKC<sub>t</sub>).

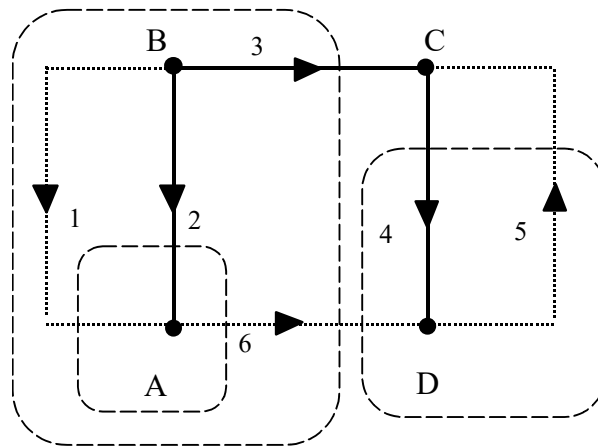


Figura 2.b

( $N - 1 = 3$  equazioni LKC<sub>t</sub> in cui compaiono come incognite  $R = 6$  correnti di ramo)

$$\begin{aligned} i_2 &= -i_1 + i_6 \\ i_3 &= -i_6 \\ i_4 &= -i_6 + i_5 \end{aligned} \quad (8)$$

(una relazione per ogni ramo di albero quindi in generale  $N - 1$  relazioni che esprimono le  $N - 1$  correnti di albero in funzione delle  $R - N + 1$  correnti sui rami di coalbero; nell'esempio in oggetto possiamo quindi scrivere 3 relazioni che esprimono le 3 correnti di albero  $i_2$ ,  $i_3$  e  $i_4$  in funzione delle 3 correnti sui rami di coalbero  $i_1$ ,  $i_5$  e  $i_6$ )

Dato che le (8) sono state ottenute applicando la Legge di Kirchhoff delle Correnti, esse risultano equivalenti alle (2.ii) (infatti sostituendo le (8) nelle (2.ii) si ottengono tre identità  $0 = 0$ ). Inoltre, per tutti i componenti sui rami di albero è possibile sostituire le relazioni (8) nelle relazioni costitutive dei

componenti. Tale sostituzione porta ad un sistema contenente un numero di equazioni pari a  $2R - N + 1$ , in altrettante variabili (tensioni di ramo e correnti di coalbero). Nell'esempio in oggetto otterremo quindi il seguente sistema di 9 equazioni nelle incognite  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, i_1, i_5, i_6$ :

$$\begin{array}{l}
 (R - N + 1 = 3 \text{ equazioni LKT}_m \text{ in cui come incognite compaiono } R = 6 \text{ tensioni di ramo}) \\
 \\
 (R = 6 \text{ equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono come incognite } R = 6 \text{ tensioni di ramo ed } R - N + 1 = 3 \text{ correnti di coalbero})
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 -v_1 + v_2 = 0 \\
 -v_2 + v_3 + v_4 - v_6 = 0 \\
 -v_4 - v_5 = 0 \\
 v_1 = E \\
 v_2 = R_2(-i_1 + i_6) \\
 v_3 = -R_3 i_6 \\
 v_4 = R_4(-i_6 + i_5) \\
 i_5 = I \\
 v_6 i_6 = 0
 \end{array}
 \quad (2.iii) \quad (8.i)$$

Infine, per tutti i componenti controllati in corrente (in questo esempio i rami 1, 2, 3, e 4), è possibile sostituire le equazioni costitutive nelle LKT<sub>m</sub>. Tale sostituzione porta ad un sistema contenente un numero di equazioni pari a  $R - N + 1 + (\text{Numero di componenti non controllati in corrente})$ , in altrettante variabili (tensioni di ramo o correnti di coalbero). Nell'esempio in oggetto otterremo quindi (dato che il diodo ed il generatore di corrente non sono controllati in corrente) il seguente sistema di 5 equazioni nelle incognite  $v_5, v_6, i_1, i_5, i_6$ :

$$\begin{array}{l}
 (R - N + 1 = 3 \text{ equazioni LKT}_m) \\
 \\
 (\text{equazione costitutive dei componenti non controllati in corrente})
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 -E + R_2(-i_1 + i_6) = 0 \\
 -R_2(-i_1 + i_6) - R_3 i_6 + R_4(-i_6 + i_5) - v_6 = 0 \\
 -R_4(-i_6 + i_5) - v_5 = 0 \\
 i_5 = I \\
 v_6 i_6 = 0
 \end{array}
 \quad (8.ii) \quad (8.iii)$$

Si noti che risulta conveniente, se possibile, scegliere i rami dell'albero escludendo quelli contenenti generatori di corrente indipendenti. In tal caso infatti, si ottengono direttamente delle equazioni del tipo  $i_5 = I$  (relazione costitutiva del generatore di corrente), che consentono di ridurre direttamente l'ordine del sistema.

Riassumendo, per applicare il metodo dei Tagli fondamentali ad un circuito connesso qualunque ( $R =$  numero di rami del circuito,  $N =$  numero di nodi del circuito), si definisce un albero (ed un coalbero), si applica la LKT<sub>m</sub> ad ogni maglia fondamentale, si applica la LKC<sub>t</sub> ad ogni taglio fondamentale e si chiude il sistema con le equazioni costitutive (caratteristiche) dei componenti:

$$\begin{array}{ll}
 R - N + 1 \text{ equazioni LKT}_m & \mathbf{B v} = \mathbf{0} \\
 N - 1 \text{ equazioni LKC}_t \text{ ed } R - N + 1 \text{ identità} & \mathbf{i} = \mathbf{Q i}_c \\
 R \text{ equazioni caratteristiche} & \mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}
 \end{array}$$

dove  $\mathbf{v}$  è il vettore delle tensioni di ramo (dimensione  $R$ ),  $\mathbf{i}$  è il vettore delle correnti di ramo (dimensione  $R$ ),  $\mathbf{i}_c$  è il vettore delle correnti dei rami di coalbero (dimensione  $R - N + 1$ ),  $\mathbf{B}$  è una matrice costante  $(R - N + 1) \times R$  detta matrice delle maglie fondamentali e  $\mathbf{Q}$  è una matrice costante  $R \times (R - N + 1)$  [le prime  $R - N + 1$  righe di  $\mathbf{Q}$  corrispondono ad identità] detta matrice dei tagli fondamentali. È dunque sempre possibile sostituire le LKC nelle equazioni caratteristiche ottenendo il sistema ridotto

R - N + 1 equazioni LKT<sub>m</sub>

$$\mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

R equazioni caratteristiche

$$f(\mathbf{Q} \mathbf{i}_c, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

Il sistema risolvibile contiene dunque  $2R - N + 1$  equazioni in  $2R - N + 1$  incognite. Tuttavia, se tutti i componenti sono controllati in corrente, cioè se  $f(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{v} - \mathbf{h}(\mathbf{i})$ , è possibile sostituire le caratteristiche nelle LKT, giungendo ad un sistema risolvibile di  $R - N + 1$  equazioni nelle  $R - N + 1$  incognite “correnti dei rami di coalbero”.

R - N + 1 equazioni LKT<sub>m</sub>

$$\mathbf{B} \mathbf{h}(\mathbf{Q} \mathbf{i}_c) = \mathbf{0}$$

### Metodo dei potenziali di nodo

Quando il numero dei nodi N del circuito è piccolo, è possibile e conveniente utilizzare il metodo dell'analisi dei nodi per scrivere un sistema risolvibile di (N - 1) equazioni nelle (N - 1) tensioni di nodo incognite del circuito. A tale scopo si considerino nuovamente le (2.i), (2.ii) e (3):

(R = 6 equazioni LKT<sub>r</sub> in cui compaiono come incognite R = 6 tensioni di ramo ed N - 1 = 3 potenziali di nodo)

$$\begin{aligned} v_1 &= e_B - e_A \\ v_2 &= e_B - e_A \\ v_3 &= e_B - e_C \\ v_4 &= e_C \\ v_5 &= -e_C \\ v_6 &= e_A \end{aligned} \quad (2.i)$$

(N - 1 = 3 equazioni LKC<sub>n</sub> in cui compaiono come incognite R = 6 correnti di ramo)

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 - i_6 &= 0 \\ -i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\ i_3 - i_4 + i_5 &= 0 \end{aligned} \quad (2.ii)$$

(R = 6 equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono come incognite R = 6 tensioni di ramo ed R = 6 correnti di ramo)

$$\begin{aligned} v_1 &= E \\ v_2 &= R_2 i_2 \\ v_3 &= R_3 i_3 \\ v_4 &= R_4 i_4 \\ i_5 &= I \\ v_6 i_6 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Per ogni ramo è possibile sostituire le relazioni (2.i) nelle relazioni costitutive dei componenti (3). Tale sostituzione porta ad un sistema contenente un numero di equazioni pari a  $R + N - 1$ , in altrettante variabili (potenziali di nodo e correnti di ramo). Nell'esempio in oggetto otterremo quindi il seguente sistema di 9 equazioni nelle incognite  $e_A, e_B, e_C, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$ :

(N - 1 = 3 equazioni LKC<sub>n</sub> in cui compaiono come incognite R = 6 correnti di ramo)

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 - i_6 &= 0 \\ -i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\ i_3 - i_4 + i_5 &= 0 \end{aligned} \quad (2.ii)$$



(R = 6 equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono come incognite R = 6 correnti di ramo ed N - 1 = 3 potenziali di nodo)

$$\begin{aligned}
 e_B - e_A &= E \\
 e_B - e_A &= R_2 i_2 \\
 e_B - e_C &= R_3 i_3 \\
 e_C &= R_4 i_4 \\
 i_5 &= I \\
 e_A i_6 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{9.i}$$

Infine, per tutti i componenti controllati in tensione (in questo esempio i rami 2, 3, 4 e 5), è possibile esplicitare le correnti e sostituire le equazioni costitutive nelle LKC [ $i_2 = (e_B - e_A)/R_2$ ,  $i_3 = (e_B - e_C)/R_3$ ,  $i_4 = e_C/R_4$ ,  $i_5 = I$ ]. Tale sostituzione porta ad un sistema contenente un numero di equazioni pari a N - 1 + (Numero di componenti non controllati in tensione), in altrettante variabili (correnti di ramo o potenziali di nodo). Nell'esempio in oggetto otterremo quindi (dato che il diodo ed il generatore di tensione non sono controllati in tensione) il seguente sistema di 5 equazioni nelle incognite  $e_A, e_B, e_C, i_1, i_6$ :

$$\begin{aligned}
 i_1 + \frac{e_B - e_A}{R_2} - i_6 &= 0 \\
 -i_1 - \frac{e_B - e_A}{R_2} - \frac{e_B - e_C}{R_3} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{9.ii}$$

(N - 1 = 3 equazioni LKC<sub>n</sub>)

$$\begin{aligned}
 \frac{e_B - e_C}{R_3} - \frac{e_C}{R_4} + I &= 0 \\
 e_B - e_A &= E \\
 e_A i_6 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{9.iii}$$

(equazioni costitutive dei componenti non controllati in tensione)

Riassumendo, per applicare il metodo dei potenziali di nodo ad un circuito connesso qualunque (R = numero di rami del circuito, N = numero di nodi del circuito), si prende arbitrariamente un nodo come nodo di riferimento del circuito, si applica la LKT<sub>r</sub> ad ogni ramo del circuito, si applica la LKC<sub>n</sub> a tutti i nodi tranne quello di riferimento e si chiude il sistema con le equazioni costitutive (caratteristiche) dei componenti:

$$R \text{ equazioni LKT}_r \quad \mathbf{v} = \mathbf{M} \mathbf{e}$$

$$N - 1 \text{ equazioni LKC}_n \quad \mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

$$R \text{ equazioni caratteristiche} \quad \mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

dove  $\mathbf{v}$  è il vettore delle tensioni di ramo (dimensione R),  $\mathbf{i}$  è il vettore delle correnti di ramo (dimensione R),  $\mathbf{e}$  è il vettore delle tensioni di nodo (dimensione N - 1),  $\mathbf{M}$  è una matrice costante R × (N - 1) ed  $\mathbf{A}$  è una matrice costante (N - 1) × R. È dunque sempre possibile sostituire le LKT nelle equazioni caratteristiche ottenendo il sistema ridotto

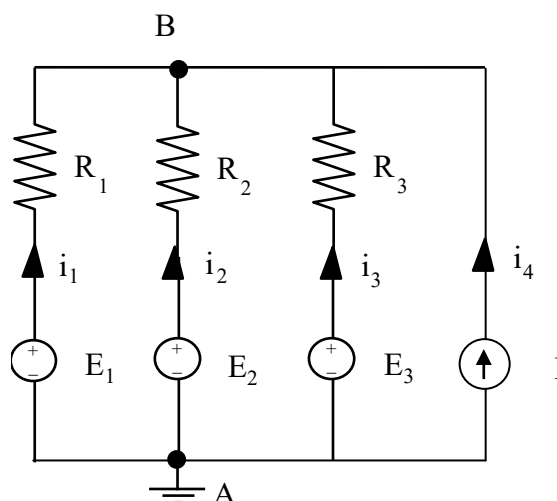
$$N - 1 \text{ equazioni LKC}_n \quad \mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

$$R \text{ equazioni caratteristiche} \quad \mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{M} \mathbf{e}) = \mathbf{0}$$

Il sistema risolvibile contiene dunque R + N - 1 equazioni in R + N - 1 incognite. Tuttavia, se tutti i componenti sono controllati in tensione, cioè se  $\mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{i} - \mathbf{g}(\mathbf{v})$ , è possibile sostituire le caratteristiche nelle LKC, giungendo ad un sistema risolvibile di N - 1 equazioni nelle N - 1 incognite "tensioni di nodo".

$$N - 1 \text{ equazioni LKC}_n \quad \mathbf{A} \mathbf{g}(\mathbf{M} \mathbf{e}) = \mathbf{0}$$

Il metodo dei potenziali di nodo è particolarmente utile quando il numero di nodi è piccolo e tutti i componenti sono controllati in tensione. Come esempio limite si consideri il circuito illustrato nella figura, che contiene un solo nodo indipendente ( $N - 1 = 1$ ). Tre componenti, costituiti ciascuno da un generatore indipendente di tensione e da un resistore collegati in serie (generatore di tensione reale), sono collegati in parallelo a un generatore di corrente. Prendendo il nodo A come nodo di riferimento, è presente una sola tensione di nodo  $e_B = v_{BA}$  incognita.



Ciascuno dei componenti è controllato in tensione. Infatti, dalla legge costitutiva dei componenti, si può esprimere la corrente in ogni ramo del circuito in funzione della tensione ai suoi capi:

$$v_{BA} = E_k - R_k i_k \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} i_k &= G_k (E_k - v_{BA}), \quad k = 1, 2, 3 \\ i_4 &= I \end{aligned} \quad (12)$$

La tensione ai capi di ciascun ramo, dalle LKT<sub>r</sub> può essere espressa come differenza delle tensioni di nodo dei nodi cui il ramo è collegato. Il sistema risolvibile si ottiene scrivendo la LKC<sub>n</sub> per ogni nodo del circuito, escluso quello di riferimento, e risulta quindi costituito da  $(N - 1) = 1$  equazioni nelle  $(N - 1) = 1$  tensioni di nodo incognite. Con riferimento all'esempio di figura risulta:

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^3 G_k (E_k - v_{BA}) + I = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{BA} = \frac{\sum_{k=1}^3 G_k E_k + I}{\sum_{k=1}^3 G_k} = \frac{\sum_{k=1}^3 \frac{E_k}{R_k} + I}{\sum_{k=1}^3 \frac{1}{R_k}} \quad (13)$$

L'ultima relazione delle (13), che mostra la relazione tra la tensione di nodo  $v_{BA}$ , le tensioni e la corrente impressa dei generatori e le resistenze dei rami stessi; viene anche indicata col nome di **Teorema di Millman**, e può essere estesa ad un numero qualsiasi di generatori reali in parallelo.

Supponendo, ad esempio, che i dati del problema siano:  $E_1 = 110 \text{ V}$ ,  $E_2 = 105 \text{ V}$ ,  $E_3 = 0 \text{ V}$ ,  $R_1 = 0.5 \text{ } \Omega$ ,  $R_2 = 0.5 \text{ } \Omega$ ,  $R_3 = 5 \text{ } \Omega$ ,  $I = 3 \text{ A}$  dalla (13) si ottiene  $v_{BA} = 103.1 \text{ V}$  e sostituendo nelle (12)  $i_1 = 13.8 \text{ A}$ ,  $i_2 = 3.8 \text{ A}$ ,  $i_3 = -20.6 \text{ A}$ .

### Teorema di Thevenin

*Ipotesi.* Sono dati due bipoli, L ed N collegati come illustrato nella figura 3. Il bipolo L è una rete lineare e controllato in corrente, mentre il bipolo N può essere qualsiasi, anche non lineare.

*Tesi.* Limitatamente alla corrente  $i$  ed alla tensione  $v_{AB}$  alla porta, il circuito che si ottiene sostituendo il bipolo L (quello lineare) con un generatore di tensione ed un bipolo L' collegati in serie, è equivalente in ogni istante al circuito originale. Il bipolo L' si ottiene dal bipolo L annullando le grandezze impressa dei generatori indipendenti di tensione e di corrente eventualmente presenti (i generatori indipendenti di tensione vengono quindi sostituiti con dei corto-circuiti ed i generatori indipendenti di corrente vengono

sostituiti con dei circuiti aperti). La tensione impressa  $E_0$  del generatore di tensione di Thevenin è pari al valore della tensione  $v_{AB}$  alla porta del bipolo  $L$  quando la corrente  $i$  è nulla (È da notare che il verso positivo di  $E_0$  è arbitrario: una volta scelto il verso positivo, il valore di  $E_0$  è pari alla tensione  $v_{AB}$  se il terminale positivo è  $A$ , è pari invece a  $-v_{AB}$  se il terminale positivo è  $B$ )

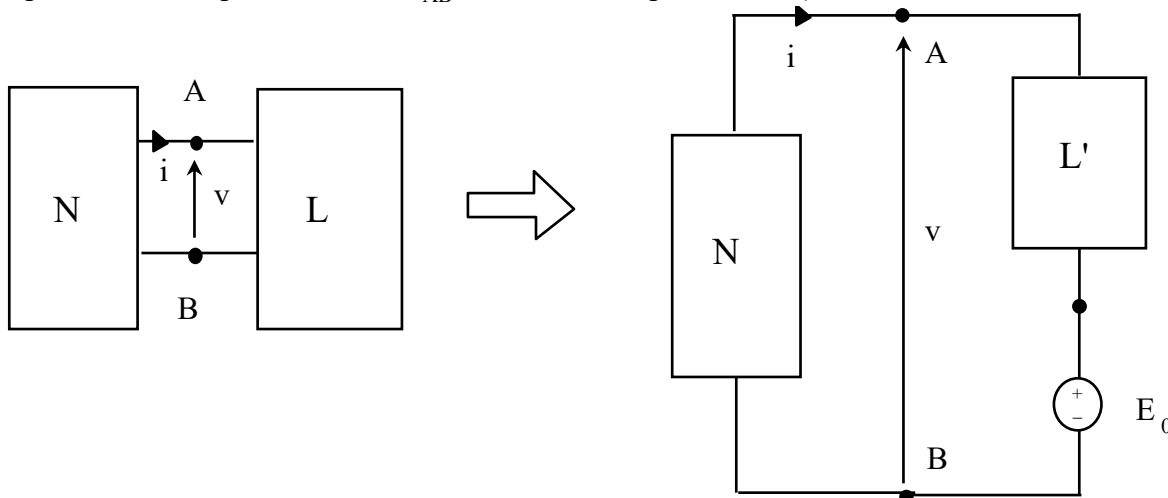
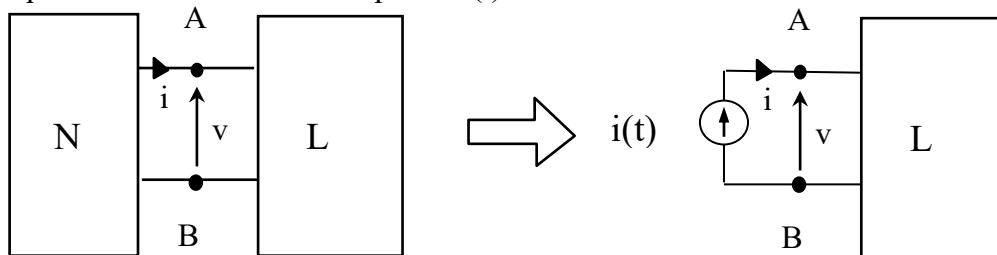
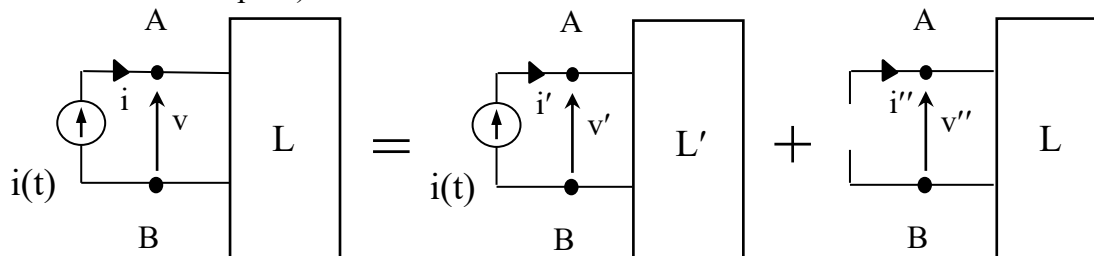


Figura 3 Teorema di Thevenin

Dimostrazione: poiché il bipolo  $L$  è controllato in corrente (data la corrente è possibile determinare la tensione ai terminali), è possibile, ai fini del calcolo della tensione  $v$ , sostituire al bipolo  $N$  un generatore di corrente indipendente la cui corrente impressa  $i(t)$  coincide con la corrente assorbita dal bipolo  $L$ .



Dato che il bipolo  $L$  è lineare, è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. In particolare, consideriamo due circuiti: nel primo azzeriamo i generatori indipendenti in  $L$  (e indicheremo tale bipolo con  $L'$ , nel secondo azzeriamo il generatore indipendente di corrente (come già visto, i generatori indipendenti di tensione nulla sono equivalenti a cortocircuiti, i generatori indipendenti di corrente nulla sono equivalenti a circuiti aperti).



Si ha:

$$i = i' + i'', \text{ dove } i' \text{ ed } i'' \text{ sono le correnti nelle due sottoreti:}$$

e

$$v = v' + v'', \text{ dove } v' \text{ ed } v'' \text{ sono le tensioni nelle due sottoreti:}$$

È evidente tuttavia che  $i' = i(t)$  e che  $i'' = 0$ . Inoltre, applicando la LKT alle due sottoreti otteniamo (si ricordi che per ipotesi L è controllato in corrente):

$$v' = V_{L'}(i') = V_{L'}(i)$$

$$v'' = V_L(i'') = V_L(0)$$

dove  $V_{L'}()$  ed  $V_L()$  rappresentano le caratteristiche dei bipoli  $L'$  ed  $L$ , rispettivamente. Infine, definendo  $E_0 = V_L(0) = v_{AB}|_{L \text{ a vuoto}}$  si ottiene:

$$v = V_{L'}(i) + E_0$$

che è proprio la caratteristica del bipolo equivalente mostrato in figura 3. Il teorema di Thevenin, come enunciato, è valido in regime qualsiasi. In particolare, in regime stazionario (corrente continua) si ha che “Un circuito lineare L con due terminali controllato in corrente è equivalente a un generatore di tensione reale (bipolo di Thevenin) formato da un generatore indipendente di tensione  $E_0$  in serie con un resistore  $R_e$ , in cui  $E_0$  è la tensione a vuoto ai terminali e  $R_e$  è la resistenza vista ai terminali quando i generatori indipendenti sono spenti”. Infatti, poiché il bipolo L è lineare e controllato in corrente, la sua relazione costitutiva è esprimibile per ipotesi come  $V_{L'}(i) = R_e i$ . Questo è sufficiente a definire univocamente il valore di  $R_e$ . Risulta infatti:

$$R_e = V_{L'}(i) / i = (v_{AB} / i)_{\text{Generatori Indipendenti di L Spenti}}$$

Si può applicare il teorema di Thevenin alla soluzione del circuito di figura 1 considerando come bipolo N il diodo ideale e quindi come bipolo L l'insieme di tutti gli altri componenti del circuito (vedi figura 4.a). Il bipolo  $L'$  è quello indicato nella figura 4.b, mentre il valore della tensione  $E_0$  viene calcolato risolvendo il circuito riportato nella figura 4.c ed è dato dalla relazione (10).

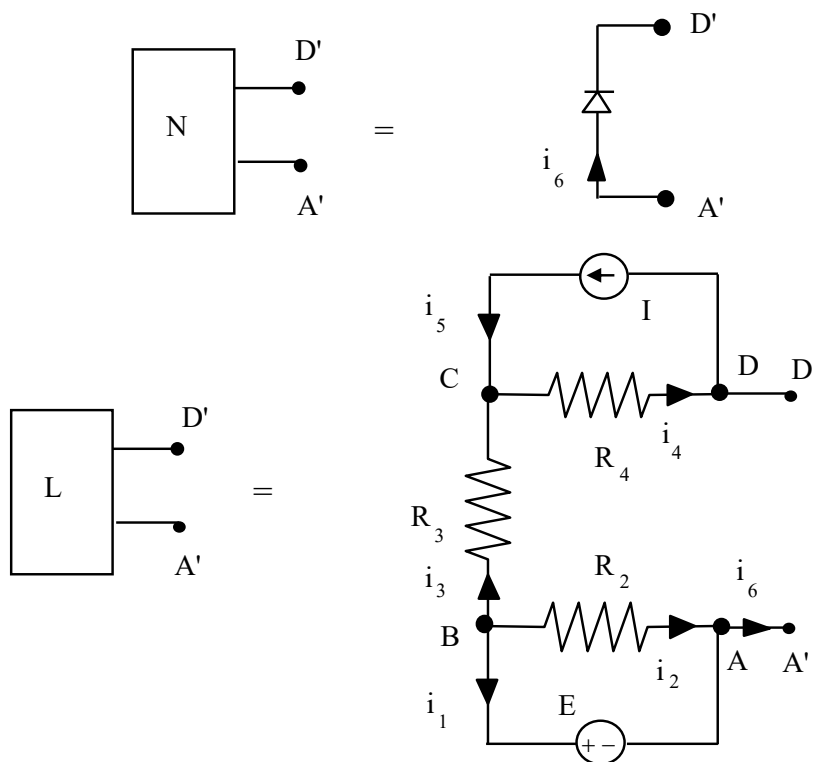


Figura 4.a

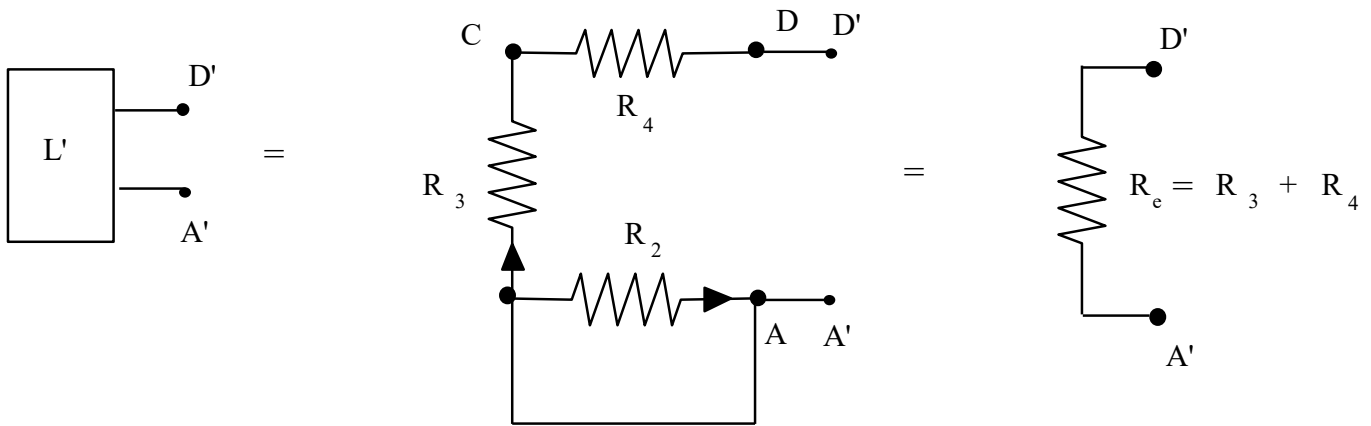
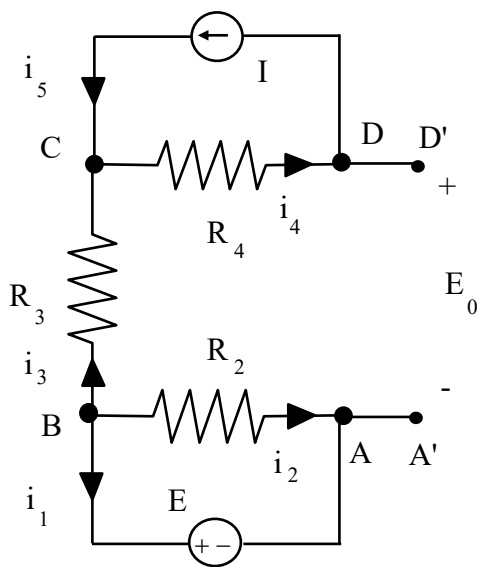


Figura 4.b



$$E_0 = E - R_4 I \quad (10)$$

Figura 4.c – La soluzione del circuito di figura è immediata notando che il ramo 3 costituisce un taglio fondamentale. Pertanto  $i_3 = 0$ , e dunque si ha che

$$i_4 = i_5 = I$$

ed

$$i_2 = -i_1 = E/R_2$$

Infine la valutazione di  $E_0$  si ottiene applicando la LKT alla sequenza ABCDA:

$$0 = -R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4 + E_0$$

ovvero

$$E_0 = E - R_4 I$$

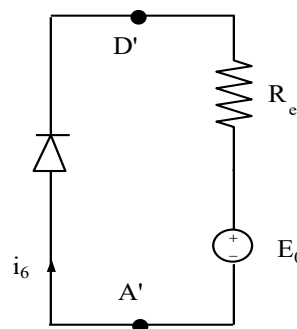


Figura 5

Infine il valore della corrente  $i_6$  viene ottenuto risolvendo il circuito illustrato nella figura 5, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo circuito equivalente di Thevenin.

Si ritrova quindi che sono possibili due casi: diodo interdetto oppure diodo in conduzione. Se il diodo è interdetto allora la corrente  $i_6$  è nulla e la tensione  $v_{A'D'}$ , che essendo nulla la caduta di tensione sulla resistenza  $R_e$  (corrente nulla) coincide con  $-E_0$ , deve essere minore od uguale a zero, da cui scende ancora la relazione (7). Se il diodo è in conduzione allora la corrente  $i_6$  è pari a  $-E_0/R_e$  e deve risultare maggiore od uguale a zero, da cui si ricava nuovamente la (5).

Supponendo ad esempio che i dati del problema siano i seguenti:  $E = 24 \text{ V}$ ,  $I = 4 \text{ A}$ ,  $R_2 = 2 \text{ } \Omega$ ,  $R_3 = 12 \text{ } \Omega$ ,  $R_4 = 8 \text{ } \Omega$  risulta:

$$E = 24 \quad \rightarrow \quad E < R_4 \cdot I \quad \rightarrow \quad \text{diodo in conduzione}$$

$$R_4 \cdot I = 32$$

e quindi dalla soluzione del circuito di figura 5 e dalle leggi di Kirchhoff per il circuito di figura 1 si ottiene:

$$v_6 = 0$$

$$i_6 = -\frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4} = 0.4 \text{ A}$$

$$i_4 = I - i_6 = 3.6 \text{ A}$$

$$v_4 = R_4 i_4 = 28.8 \text{ V}$$

$$i_5 = I = 4 \text{ A}$$

$$v_5 = -v_4 = -28.8 \text{ V}$$

$$i_3 = -i_6 = -0.4 \text{ A}$$

$$v_3 = R_3 i_3 = -4.8 \text{ V}$$

$$v_2 = E = 24 \text{ V}$$

$$i_2 = \frac{v_2}{R_2} = 12 \text{ A}$$

$$v_1 = E = 24 \text{ V}$$

$$i_1 = i_6 - i_2 = -11.6 \text{ A}$$

È da notare che la soluzione del circuito di figura 1 in cui sono presenti solo generatori e resistori (lineari e non), cioè elementi privi di memoria, si ottiene mediante relazioni algebriche, in ogni istante, dal valore che in quell'istante hanno le eccitazioni del sistema, cioè le grandezze impresse dei generatori.

Analogo al teorema di Thevenin, con ipotesi simili e le stesse possibilità di applicazione è il teorema di Norton.

### Teorema di Norton

*Ipotesi.* Sono dati due bipoli, L ed N collegati come illustrato nella figura 6. Il bipolo L è una rete lineare e controllato in tensione, mentre il bipolo N può essere qualsiasi, anche non lineare.

*Tesi.* Limitatamente alla corrente  $i$  ed alla tensione  $v_{AB}$  alla porta, il circuito che si ottiene sostituendo il bipolo L (quello lineare) con un generatore di corrente ed un bipolo L' collegati in parallelo, è equivalente in ogni istante al circuito originale. Il bipolo L' si ottiene dal bipolo L annullando le grandezze impresse dei generatori indipendenti di tensione e di corrente eventualmente presenti (il bipolo L' è lo stesso che interviene nel teorema di Thevenin). La corrente impressa  $I_c$  del generatore di corrente di Norton è pari al valore della corrente  $i$  alla porta del bipolo L quando la tensione  $v_{AB}$  è nulla (E' da notare che il verso positivo di  $I_c$  è arbitrario: una volta scelto il verso positivo il valore di  $I_c$  è pari alla corrente  $i$  se la freccia punta verso il terminale dove la corrente  $i$  esce da L, è pari invece a  $-i$  se la freccia punta verso il terminale dove la corrente  $i$  entra in L)

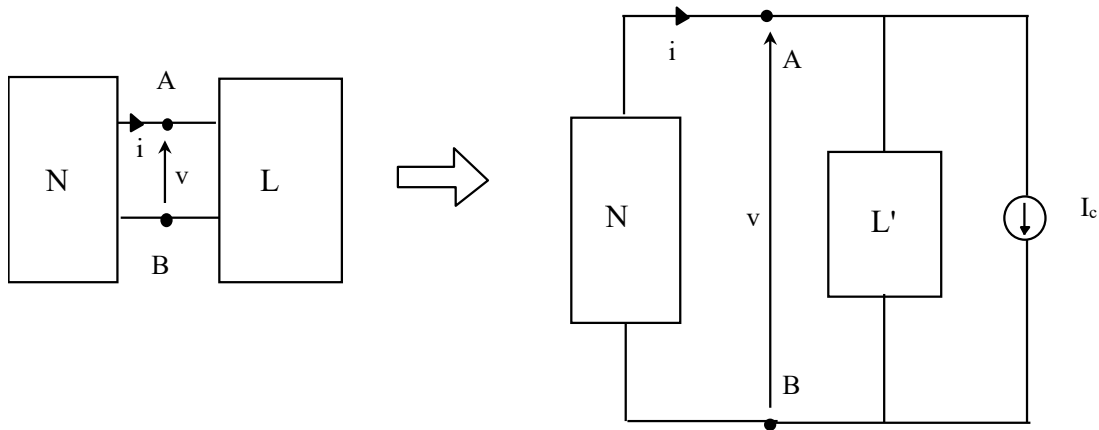
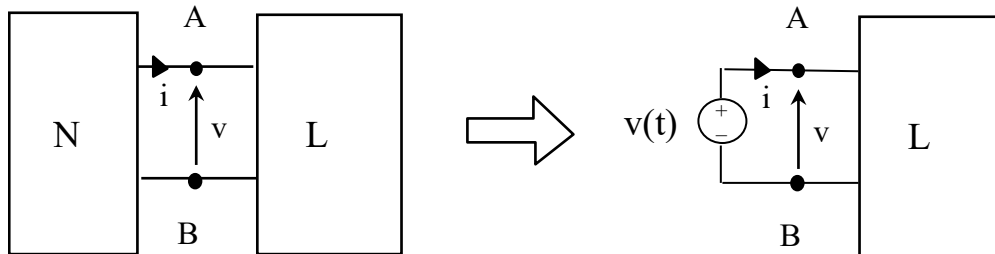
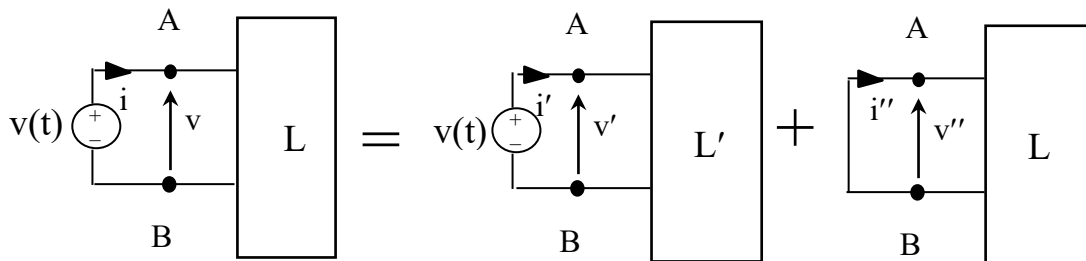


Figura 6 Teorema di Norton

Dimostrazione: poiché il bipolo L è controllato in tensione (data la tensione è possibile determinare la corrente assorbita), è possibile, ai fini del calcolo della corrente i, sostituire al bipolo N un generatore di tensione indipendente la cui tensione impressa  $v(t)$  coincide con la tensione ai terminali del bipolo L.



Dato che il bipolo L è lineare, è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. In particolare, consideriamo due circuiti: nel primo azzeriamo i generatori indipendenti in L (e indicheremo tale bipolo con L', nel secondo azzeriamo il generatore indipendente di tensione (come già visto, i generatori indipendenti di tensione nulla sono equivalenti a cortocircuiti, i generatori indipendenti di corrente nulla sono equivalenti a circuiti aperti.).



Si ha:

$$i = i' + i'', \text{ dove } i' \text{ ed } i'' \text{ sono le correnti nelle due sottoreti:}$$

e

$$v = v' + v'', \text{ dove } v' \text{ ed } v'' \text{ sono le tensioni nelle due sottoreti:}$$

È evidente tuttavia che  $v' = v(t)$  e che  $v'' = 0$ . Inoltre, applicando la LKC alle due sottoreti otteniamo (si ricordi che per ipotesi L è controllato in tensione):

$$i' = I_{L'}(v') = I_{L'}(v)$$

$$i'' = I_L(v'') = I_L(0)$$

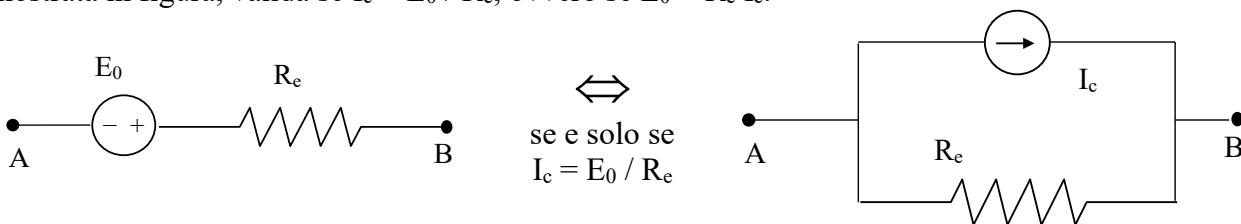
dove  $I_{L'}(\cdot)$  ed  $I_L(\cdot)$  rappresentano le caratteristiche dei bipoli L' ed L, rispettivamente. Infine, definendo  $I_c = I_L(0) = i|_L$  in cortocircuito si ottiene:

$$i = I_{L'}(v) + I_c$$

che è proprio la caratteristica del bipolo equivalente mostrato in figura 6. Il teorema di Norton, come enunciato, è valido in regime qualsiasi. In particolare, in regime stazionario (corrente continua) si ha che “Un circuito lineare L con due terminali controllato in tensione è equivalente a un bipolo (bipolo di Norton) formato da un generatore indipendente di corrente  $I_c$  in parallelo con un resistore  $R_e$ , in cui  $I_c$  è la corrente di cortocircuito tra i terminali e  $R_e$  è la resistenza vista ai terminali quando i generatori indipendenti sono spenti”. Infatti, poiché il bipolo L è lineare e controllato in tensione, la sua relazione costitutiva è esprimibile per ipotesi come  $I_{L'}(v) = v/R_e$ . Questo è sufficiente a definire univocamente il valore di  $R_e$ . Risulta infatti:

$$R_e = v/I_{L'}(v) = (v_{AB}/i)_{\text{Generatori Indipendenti di L Spenti}}$$

Si noti che tale espressione coincide con quella trovata nel teorema di Thevenin. Infatti, applicando il teorema di Norton al bipolo di Thevenin in regime stazionario (corrente continua) si ottiene l'equivalenza mostrata in figura, valida se  $I_c = E_0 / R_e$ , ovvero se  $E_0 = R_e I_c$ .



Infine, i teoremi di Thevenin e di Norton, possono essere enunciati anche se nel bipolo L sono presenti induttori lineari e condensatori lineari.

Si può applicare il teorema di Norton alla soluzione del circuito di figura 1 considerando come bipolo N il diodo ideale e quindi come bipolo L l'insieme di tutti gli altri componenti del circuito (vedi figura 7.a). Il bipolo L' è quello indicato nella figura 7.b, mentre il valore della corrente  $I_c$  viene calcolata risolvendo il circuito riportato nella figura 7.c ed è dato dalla relazione (11).



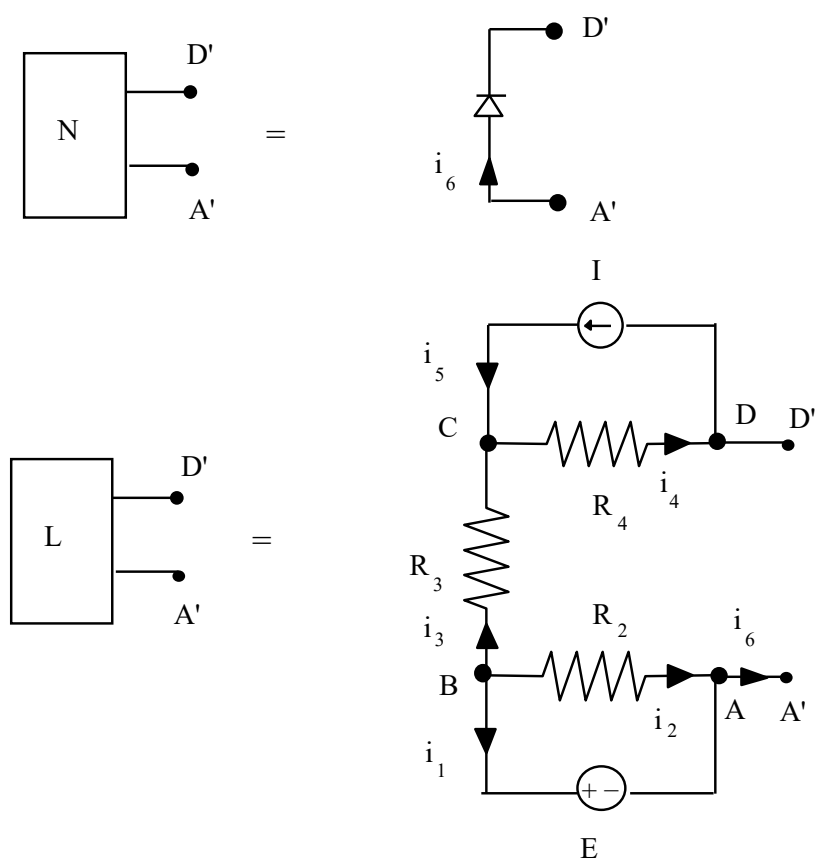


Figura 7.a

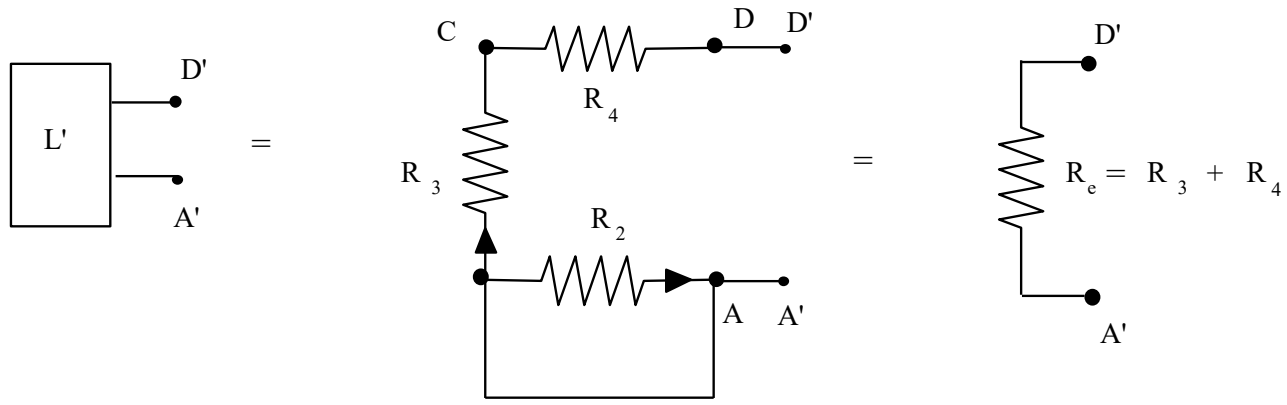


Figura 7.b

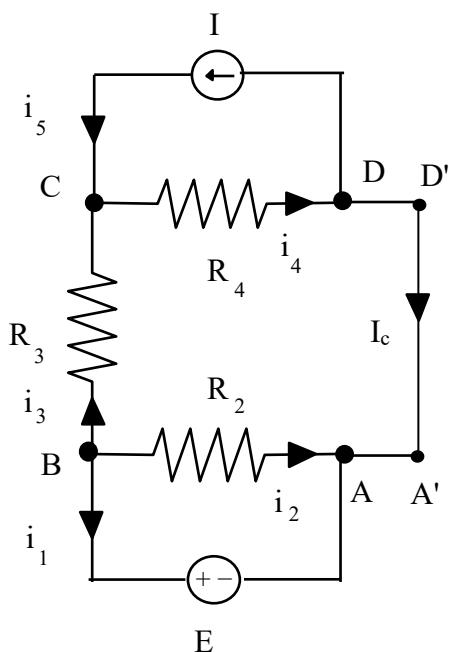


Figura 7.c – La soluzione del circuito di figura è immediata notando che:

$$\begin{aligned}
 i_5 &= I \\
 i_4 &= I + I_c \\
 i_3 &= I_c \\
 i_2 &= E/R_2 \\
 i_1 &= -I_c - E/R_2
 \end{aligned}$$

Infine la valutazione di  $I_c$  si ottiene applicando la LKT alla sequenza ABCDA:

$$\begin{aligned}
 0 &= -R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4 \\
 0 &= -E + R_3 I_c + R_4 (I + I_c)
 \end{aligned}$$

ovvero  $(R_3 + R_4) I_c = E - R_4 I$

$$I_c = \frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4} \quad (11)$$

Infine il valore della corrente  $i_6$  viene ottenuto risolvendo il circuito illustrato nella figura 8, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo circuito equivalente di Norton.

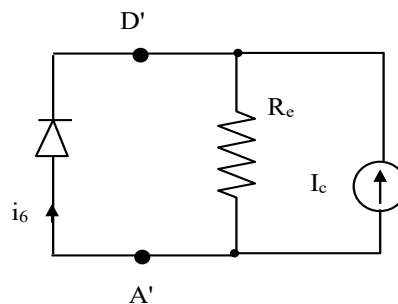


Figura 8

Si ritrova quindi che sono possibili due casi: diodo interdetto oppure diodo in conduzione. Se il diodo è interdetto allora la corrente  $i_6$  è nulla e la tensione  $v_{A'D'}$ , che coincide con la caduta di tensione sulla resistenza  $R_e$ , cioè con  $-R_e I_c$ , deve essere minore od uguale a zero, da cui discende ancora la relazione (7). Se il diodo è in conduzione allora la corrente  $i_6$  è pari a  $-I_c$  e deve risultare maggiore od uguale a zero, da cui si ricava nuovamente la (5).

### Trasformazioni stella-triangolo e triangolo-stella

Nella figura 9 sono mostrati tre resistori collegati a stella; nella figura 10 sono mostrati tre resistori collegati a triangolo. Entrambi i sistemi costituiscono un tripolo che viene collegato al circuito esterno attraverso i tre terminali A, B e C. Facendo uso delle Leggi di Kirchhoff e delle relazioni costitutive dei resistori è possibile dimostrare che, per quanto riguarda le tensioni e le correnti ai terminali ( $i_A$ ,  $i_B$  e  $i_C$ ), è possibile sostituire tre resistori collegati a stella con tre resistori, di resistenza opportuna, collegati a triangolo e viceversa. La sostituzione va intesa nel senso che qualunque sia il sistema di tensioni applicate ai terminali A, B e C il sistema di correnti assorbito dai due carichi è lo stesso.

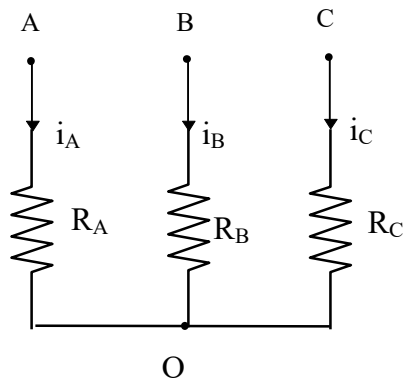


Figura 9

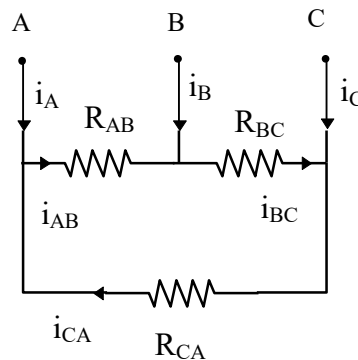


Figura 10

Con riferimento alle figure 9 e 10, le espressioni delle resistenze equivalenti per le trasformazioni stella-triangolo e triangolo-stella sono le seguenti dove è indicata con  $G$  la conduttanza, cioè l'inverso della resistenza  $R$ .

#### Trasformazione triangolo-stella

$$R_A = \frac{R_{AB} R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$$R_B = \frac{R_{BC} R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$$R_C = \frac{R_{CA} R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

#### Trasformazione stella-triangolo

$$G_{AB} = \frac{G_A G_B}{G_A + G_B + G_C}$$

$$G_{BC} = \frac{G_B G_C}{G_A + G_B + G_C}$$

$$G_{CA} = \frac{G_C G_A}{G_A + G_B + G_C}$$

### CIRCUITI NON CONNESSI

Tutti i circuiti visti sinora godono della *proprietà di connessione*, secondo la quale tutto il circuito è connesso elettricamente, e quindi per ogni coppia di nodi del circuito è possibile trovare un percorso che li connetta seguendo i rami del grafo. Consideriamo ora il caso in cui il circuito da studiare sia costituito da due o più sottoreti non connesse. Si consideri ad esempio il circuito di figura 19.a. Sostituendo al trasformatore ideale il suo circuito equivalente si ottiene la rete elettrica non connessa di figura 19.b. Dato che la rete non è connessa, non è possibile per ogni nodo del circuito trovare un percorso che, seguendo i rami del grafo, connetta tale nodo al nodo di riferimento. Analogamente, non è possibile definire un albero per l'intero circuito. I metodi di Tableau, delle tensioni di nodo e delle correnti di coalbero non sono quindi direttamente applicabili. Possiamo però applicare il metodo dell'eliminazione delle tensioni di nodo (in cui le variabili sono le tensioni e le correnti di ramo) ad ogni sottorete. In particolare, per il circuito di figura 19.b, la sottorete di sinistra (1) ha  $R_1 = 2$  rami e  $N_1 = 2$  nodi, e la sottorete di destra (2) ha  $R_2 = 2$  rami e  $N_2 = 2$  nodi.

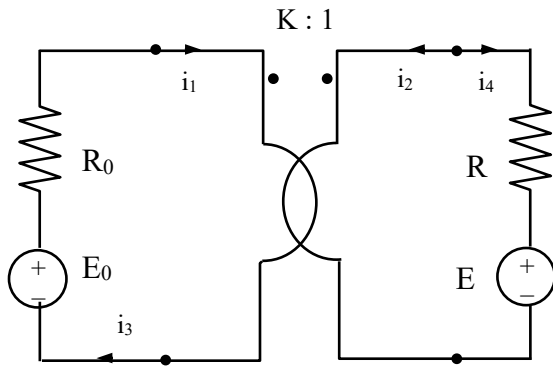


Figura 19.a

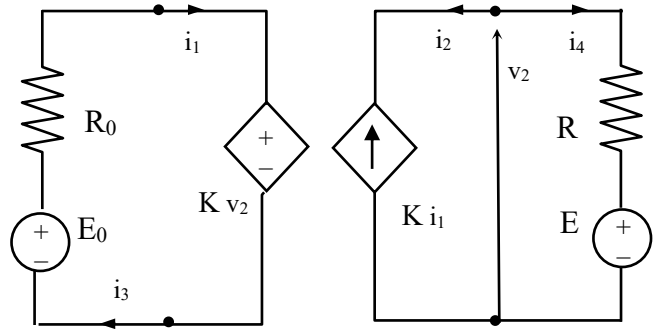


Figura 19.b

Le LKT<sub>m</sub>, le LKC<sub>n</sub> e le relazioni costitutive della sottorete di sinistra (1) costituiscono un sistema di  $2 R_1$  equazioni in cui compaiono le  $2 (R_1 + R_2)$  tensioni e le correnti di ramo di tutta la rete:

$$(R_1 - N_1 + 1 = 1 \text{ equazioni LKT}_m \text{ per la sottorete (1)}) \quad v_1 + v_3 = 0 \quad (22.i)$$

$$(N_1 - 1 = 1 \text{ equazioni LKC}_n \text{ per la sottorete (1)}) \quad i_1 - i_3 = 0 \quad (22.ii)$$

$$(R_1 = 2 \text{ caratteristiche dei componenti della sottorete (1)}) \quad \begin{aligned} v_1 &= K v_2 \\ v_3 &= -E_0 + R_0 i_3 \end{aligned} \quad (22.iii)$$

Le LKT<sub>m</sub>, le LKC<sub>n</sub> e le relazioni costitutive della sottorete di destra (2) costituiscono un sistema di  $2 R_2$  equazioni in cui compaiono le  $2 (R_1 + R_2)$  tensioni e le correnti di ramo di tutta la rete:

$$(R_2 - N_2 + 1 = 1 \text{ equazioni LKT}_m \text{ per la sottorete (2)}) \quad v_2 - v_4 = 0 \quad (23.i)$$

$$(N_2 - 1 = 1 \text{ equazioni LKC}_n \text{ per la sottorete (2)}) \quad i_2 + i_4 = 0 \quad (23.ii)$$

$$(R_2 = 2 \text{ caratteristiche dei componenti della sottorete (2)}) \quad \begin{aligned} i_2 &= -K i_1 \\ v_4 &= R i_4 + E \end{aligned} \quad (23.iii)$$

Pertanto, le (22), (23), costituiscono un sistema di  $2 (R_1 + R_2)$  equazioni in cui compaiono le  $2 (R_1 + R_2)$  tensioni e le correnti di ramo di tutta la rete. Analogamente quindi ai circuiti connessi, le LKT<sub>m</sub>, le LKC<sub>n</sub> (applicate ad ogni sottorete) e le relazioni costitutive costituiscono un sistema di  $2R$  equazioni, risolvendo il quale è possibile calcolare le  $2R$  incognite tensioni e correnti di ramo.<sup>(6)</sup>

La soluzione del sistema (22-23) è la seguente:

$$\begin{aligned} i_1 = i_3 &= \frac{E_0 - KE}{R_0 + K^2 R} & i_2 = -i_4 &= -K \frac{E_0 - KE}{R_0 + K^2 R} \\ v_1 = -v_3 &= K \frac{KRE_0 + R_0 E}{R_0 + K^2 R} & v_2 = v_4 &= \frac{KRE_0 + R_0 E}{R_0 + K^2 R} \end{aligned}$$

Supponendo, ad esempio, che i dati del problema siano:  $E_0 = 100 \text{ V}$ ,  $E = 12 \text{ V}$ ,  $K = 10$ ,  $R_0 = 0.5 \Omega$ ,  $R = 0.1 \Omega$  si ottiene  $i_1 = -1.905 \text{ A}$ ,  $i_2 = 19.05 \text{ A}$ ,  $i_3 = -1.905 \text{ A}$ ,  $i_4 = -19.05 \text{ A}$ , ottiene  $v_1 = 100.9 \text{ V}$ ,  $v_2 = 10.09 \text{ V}$ ,  $v_3 = -100.9 \text{ V}$ ,  $v_4 = 10.09 \text{ V}$ .

<sup>(6)</sup> Si noti che è fondamentale applicare le Leggi di Kirchhoff ad ogni sottorete separatamente. In caso contrario, con riferimento alla figura 19.b, detti  $R = 4$  i rami del circuito e  $N = 4$  i nodi, si sarebbe tentati di scrivere sbagliando  $R - N + 1 = 1$  equazioni LKT<sub>m</sub> ed  $N - 1 = 3$  equazioni LKC<sub>n</sub>. Come si vede dalle (22) e (23) si sono applicate invece 2 equazioni LKT<sub>m</sub> ed 2 equazioni LKC<sub>n</sub>.

Dato che, come si è visto il metodo dell'eliminazione delle tensioni di nodo porta a scrivere un sistema di  $2R$  equazioni, è lecito chiedersi se non sia possibile, modificando la topologia del circuito, applicare i metodi delle tensioni di nodo e delle correnti di coalbero anche ai circuiti non connessi. A tale scopo, consideriamo il grafo di figura 20.a: in assenza di informazioni sui componenti presenti sui rami potremmo definire due riferimenti (più in generale, uno per ogni sottorete connessa). La difficoltà in tal caso è dovuta al fatto che, mentre per il primo riferimento (Ref 1) possiamo annullare la tensione del nodo corrispondente, per il secondo riferimento (Ref 2) la tensione del nodo corrispondente è incognita (rispetto al primo riferimento). Dal grafo di figura 20.a è inoltre chiaro che non c'è scambio di corrente tra le due sottoreti. Consideriamo ora il grafo di figura 20.b, in cui si è inserito il ramo 5 tra i nodi di riferimento delle due sottoreti (e dunque se ne è lasciato uno solo per tutta la rete). Il ramo 5 è un taglio fondamentale e dunque  $i_5 = 0$  (e non c'è scambio di corrente tra le due sottoreti).

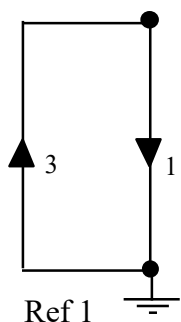


Figura 20.a

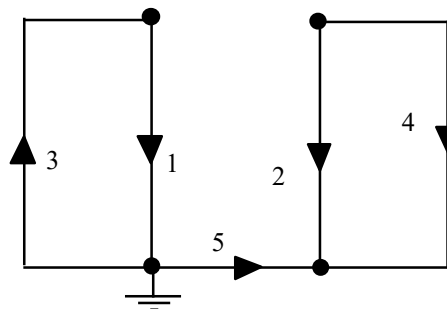


Figura 20.b

Il componente più opportuno da inserire sul ramo 5 dipende anche dalle informazioni disponibili: se si conosce (ed è un dato aggiuntivo) la tensione tra i due riferimenti ( $E_{Ref}$ ), è possibile inserire un generatore di tensione indipendente (come in figura 21.a). In caso contrario la tensione tra i riferimenti è incognita e possiamo inserire un cortocircuito (equivalente a supporre  $E_{Ref} = 0$ ) con l'avvertenza che la differenza tra potenziali di nodi appartenenti a due reti diverse non ha logicamente senso. In entrambi i casi il circuito è connesso e possiamo utilizzare ogni metodo già visto per la sua soluzione.

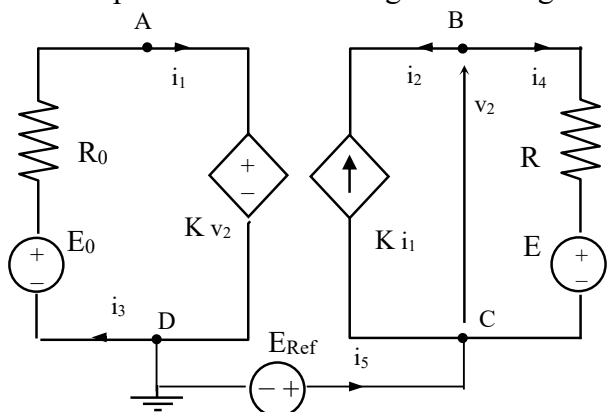


Figura 21.a

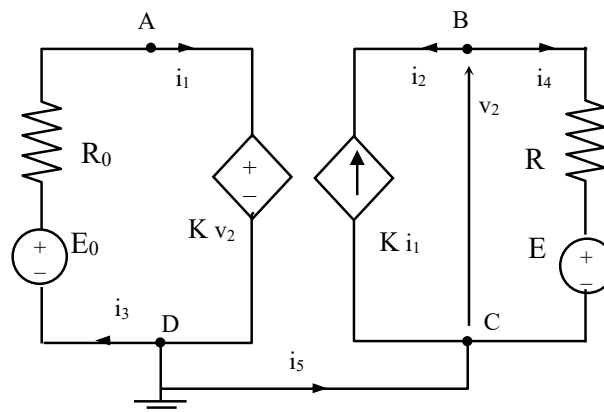


Figura 21.b

Con riferimento al circuito di figura 21.b, con  $R = 5$  rami ed  $N = 4$  nodi, si ha:

**Metodo dei Tagli Fondamentali** [albero = 1, 5, 2] (sistema di  $R - N + 1 + (\text{Numero di componenti non controllati in corrente}) = 4$  equazioni)

$$\begin{aligned}
 (R - N + 1 = 2 \text{ equazioni LKT}_m) \quad & -E_0 + R_0 i_1 + v_1 = 0 \\
 & -E + R i_2 + v_2 = 0
 \end{aligned} \tag{24.i}$$

(equazione costitutive dei componenti non controllati in corrente)

$$\begin{aligned}v_1 &= Kv_2 \\ i_2 &= -Ki_1\end{aligned}\quad (24.ii)$$

**Metodo dei potenziali di nodo** [ $e_D = 0$ ] (sistema di  $N - 1 +$  (Numero di componenti non controllati in tensione) = 6 equazioni)

( $N - 1 = 3$  equazioni LKC<sub>n</sub>)

$$\begin{aligned}\frac{E_0 - e_A}{R_0} - i_1 &= 0 \\ \frac{e_B - E}{R} + i_2 &= 0 \\ -\frac{e_B - E}{R} - i_2 - i_5 &= 0\end{aligned}\quad (25.i)$$

(equazioni costitutive dei componenti non controllati in tensione)

$$\begin{aligned}e_A &= Ke_B \\ i_2 &= -Ki_1 \\ e_C &= 0\end{aligned}\quad (25.ii)$$

La soluzione del sistema (25) è la seguente:

$$\begin{aligned}i_1 &= \frac{E_0 - KE}{R_0 + K^2R} & i_2 &= -K \frac{E_0 - KE}{R_0 + K^2R} & i_5 &= 0 \\ e_A &= K \frac{KRE_0 + R_0E}{R_0 + K^2R} & e_B &= \frac{KRE_0 + R_0E}{R_0 + K^2R} & e_C &= 0\end{aligned}$$

## CIRCUITI CON MEMORIA

Vengono detti circuiti con memoria quelli in cui è presente almeno un componente dotato di memoria; in questo caso il sistema risolvete del circuito stesso è costituito da un sistema di equazioni non più algebriche, come nel caso dei circuiti senza memoria, ma, in generale integro-differenziali ed il valore di tutte le grandezze incognite in un generico istante può essere calcolato dalla conoscenza del valore delle grandezze impresse del circuito in tutto l'intervallo temporale precedente all'istante considerato, a partire da un istante iniziale in cui sono note le variabili di stato del sistema (quelle grandezze cui è associata una energia elettromagnetica immagazzinata nel circuito: tensione ai capi dei condensatori e corrente attraverso gli induttori). Tutti i metodi precedentemente descritti per il caso dei circuiti senza memoria, sono applicabili in questo caso, con le stesse ipotesi, compresi i teoremi di Thevenin e di Norton, la cui formulazione, infatti, non fa alcun riferimento alle caratteristiche di memoria del circuito, ma portano a scrivere un sistema di equazioni integro-differenziali. In particolare, per quanto riguarda l'analisi di Tableau, le equazioni costituite dalle LKC e LKT rimangono un sistema di equazioni algebriche lineari che viene però chiuso dalle equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono i termini integro-differenziali.

### Metodo delle equazioni di stato

Si consideri un circuito in cui gli unici componenti dotati di memoria siano induttori e condensatori, è possibile pervenire con un procedimento automatico ad un sistema risolvete costituito da tante equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, quanti sono i condensatori e gli induttori presenti nel circuito, in cui le incognite sono le variabili di stato del circuito, e cioè le tensioni ai capi dei condensatori e le correnti attraverso gli induttori. Si consideri ad esempio il circuito illustrato nella figura 22.a. Le equazioni costitutive del condensatore e dell'induttore portano a scrivere le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{dv_C}{dt} &= \frac{i_C}{C} \\ \frac{di_L}{dt} &= \frac{v_L}{L} \end{aligned} \quad (26)$$

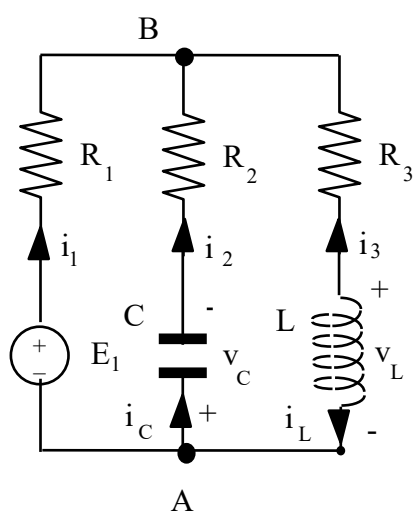


Figura 22.a

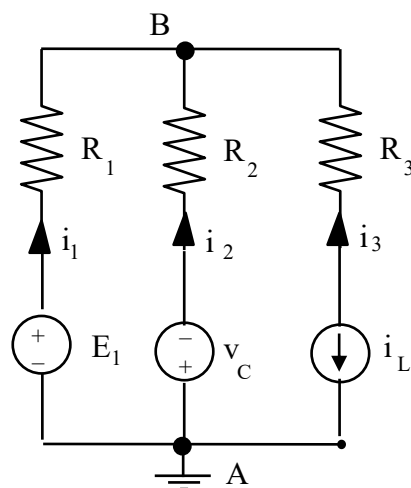


Figura 22.b

La corrente attraverso il condensatore  $i_C$  e la tensione ai capi dell'induttore  $v_L$  possono essere espresse in funzione delle variabili di stato  $v_C$  ed  $i_L$  risolvendo, con una qualsiasi delle metodologie già viste, il circuito privo di memoria illustrato nella figura 22.b, ottenuto dal circuito originale sostituendo l'induttore con un generatore di corrente con corrente impressa  $i_L$  ed il condensatore con un generatore di tensione con tensione impressa  $v_C$ .

La soluzione del circuito di figura 22.b può essere ottenuta mediante il metodo dell'analisi dei nodi, calcolando prima la tensione del nodo B rispetto al nodo A. In questo caso la formula di Millman è direttamente applicabile; il procedimento seguito per ottenere la formula di Millman porta a scrivere le seguenti relazioni:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \frac{E_1 - v_{BA}}{R_1} \\ i_2 &= \frac{-v_C - v_{BA}}{R_2} \\ i_3 &= -i_L \\ i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_{BA} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{v_C}{R_2} - i_L}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad (27)$$

È quindi possibile esprimere la corrente  $i_C$  e la tensione  $v_L$  in funzione delle variabili di stato del sistema (la (27) esprime infatti la tensione  $v_{BA}$  in funzione delle variabili di stato):

$$\begin{aligned} i_C &= \frac{-v_C - v_{BA}}{R_2} \\ v_L &= v_{BA} - R_3 i_L \end{aligned} \quad (28)$$

Supponendo, ad esempio, che i dati del problema siano:  $E_1 = 110 \text{ V}$ ,  $E_2 = 105 \text{ V}$ ,  $R_1 = 0.5 \Omega$ ,  $R_2 = 0.5 \Omega$ ,  $R_3 = 5 \Omega$ ,  $C = 2 \times 10^{-4} \text{ F}$ ,  $L = 3 \times 10^{-3} \text{ H}$ , dalla (27) si ottiene:

$$v_{BA} = 55 - 0.5v_C - 0.25i_L \quad (29)$$

sostituendo la (29) nelle (28):

$$\begin{aligned} i_C &= -v_C + 0.5i_L - 110 \\ v_L &= -0.5v_C - 5.25i_L + 55 \end{aligned} \quad (30)$$

Infine, sostituendo le (30) nelle (26) si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{dv_C}{dt} &= \frac{-v_C + 0.5i_L - 110}{2 \cdot 10^{-4}} \\ \frac{di_L}{dt} &= \frac{-0.5v_C - 5.25i_L + 55}{3 \cdot 10^{-3}} \end{aligned} \quad (31)$$

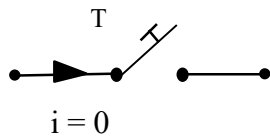
La soluzione del sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine (31) può essere ottenuta, eventualmente per via numerica, a partire dall'istante iniziale in cui sono noti i valori  $v_{C0}$  ed  $i_{L0}$  delle variabili di stato (condizioni iniziali):

$$\begin{aligned} v_C(0) &= v_{C0} \\ i_L(0) &= i_{L0} \end{aligned} \quad (32)$$

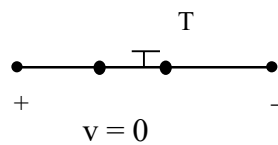
In generale si ha interesse a studiare circuiti in cui interviene una istantanea variazione della topologia, ossia circuiti in cui sono presenti interruttori ideali che si aprono e si chiudono istantaneamente. Quando l'interruttore ideale è aperto esso equivale ad un circuito aperto e quindi la corrente che lo attraversa è nulla ( $i = 0$ ). Viceversa quando l'interruttore è chiuso esso equivale ad un corto circuito e la tensione ai suoi capi è nulla ( $v = 0$ ).



### Interruttore aperto



### Interruttore chiuso



Interruttore ideale aperto e chiuso

L'interruzione o l'instaurarsi di una corrente elettrica in un interruttore "reale" è un fenomeno molto complesso che non avviene istantaneamente; avviene comunque in un tempo molto piccolo che può risultare trascurabile ai fini del transitorio che si vuole studiare, in questo caso è possibile descrivere il processo mediante l'interruttore ideale.

Per determinare l'evoluzione delle grandezze elettriche in circuiti con interruttori ideali, è necessario conoscere i valori delle variabili di stato nell'istante iniziale ( $t = 0$ ), ossia nell'istante in cui si modifica la topologia del circuito e inizia il transitorio. Si consideri ad esempio il circuito rappresentato nella figura 23 in cui è presente l'interruttore ideale T che si chiude istantaneamente all'istante  $t = 0$ .

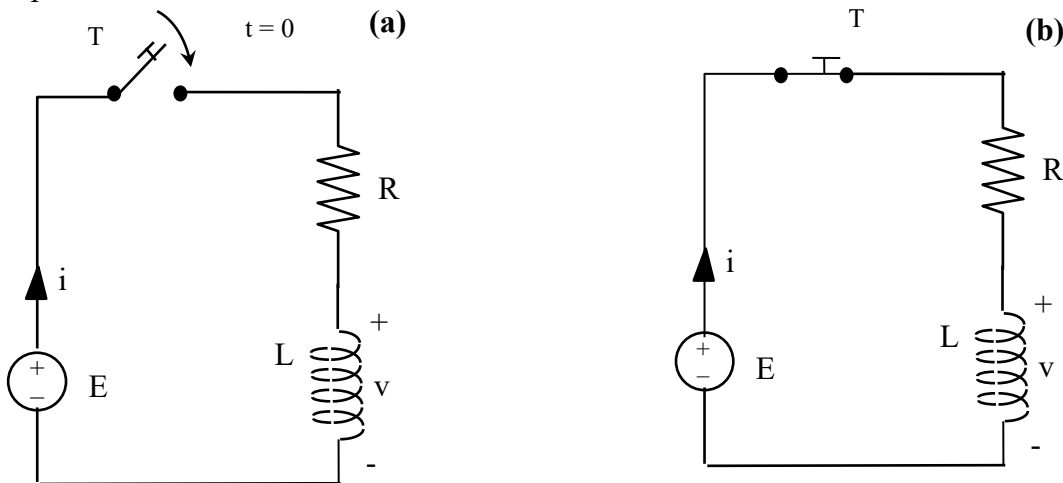


Figura 23 Circuito con interruttore ideale aperto (a) e chiuso (b)

All'istante  $t = 0^-$ , cioè un istante prima che l'interruttore si chiuda, il circuito si trova in regime stazionario; la corrente è nulla e quindi è nulla anche la tensione ai capi dell'induttore e del resistore. Un istante dopo che l'interruttore si è chiuso ( $t = 0^+$ ) le grandezze del circuito hanno in generale, essendo cambiata in maniera discontinua la topologia del circuito, valori diversi da quelli relativi all'istante  $t = 0^-$ . Ad esempio, la tensione ai capi della serie resistore induttore, nulla all'istante  $t = 0^-$  risulta pari ad E all'istante  $t = 0^+$ . Non risultano però cambiati i valori di quelle grandezze a cui è associata una energia del circuito, cioè le correnti degli induttori e le tensioni dei condensatori (le variabili di stato); nel caso specifico il valore della corrente  $i$  nullo all'istante  $t = 0^-$  risulta quindi nullo anche all'istante  $t = 0^+$ . Il **Postulato di Continuità dell'Energia** afferma infatti che **l'energia non può subire discontinuità nel tempo**. Una discontinuità dell'energia in un intervallo di tempo infinitesimo equivarrebbe, infatti, all'intervento di una sorgente di potenza infinita, il che non è fisicamente accettabile. Come conseguenza di tale postulato si deduce che i valori delle grandezze cui è associata una energia nel circuito sono funzioni continue del tempo e, in particolare, che:

- la *corrente* non può subire discontinuità in un ramo contenente un'induttanza;
- la *tensione* non può subire discontinuità in un ramo contenente un condensatore.

Questo consente di risolvere il circuito all'istante  $t = 0^+$  a partire dalla conoscenza dei valori delle variabili di stato (cioè tensione ai capi dei condensatori e corrente attraverso gli induttori) all'istante  $t = 0^-$  e quindi

permette di determinare le condizioni iniziali necessarie per risolvere il sistema di equazioni integro - differenziali che modella il circuito.

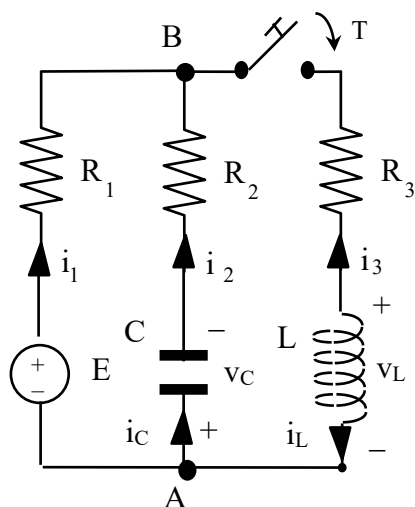


Figura 24.a

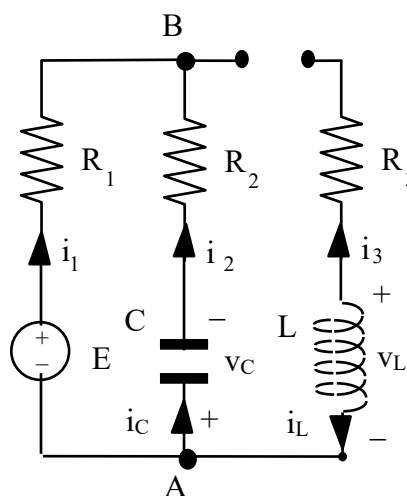


Figura 24.b - Schema circuitale per  $t < 0$

Si vuole ora studiare l'evoluzione delle grandezze elettriche nel circuito rappresentato in figura 22.a, nelle condizioni definite dalla chiusura dell'interruttore T, posizionato come illustrato in figura 24.a. Per calcolare le condizioni iniziali (cioè all'istante immediatamente successivo alla chiusura di T) è sufficiente dunque considerare il circuito di figura 24.b, cioè prima della chiusura dell'interruttore T ( $t < 0$ ). Infatti, è chiaro che  $i_L(0^-) = 0$ , visto che l'interruttore T è aperto, e che  $v_C(0^-) = -E$ , poiché il condensatore si comporta in continua come un circuito aperto. Utilizzando ora il postulato di continuità dell'energia è possibile affermare che  $i_L(0^+) = 0$  e che  $v_C(0^+) = -E$ . Il sistema (31) viene quindi completato dalle condizioni iniziali e può essere risolto:

$$\begin{cases} \frac{dv_C}{dt} = -5 \cdot 10^3 v_C + 2.5 \cdot 10^3 i_L - 5.5 \cdot 10^5 \\ \frac{di_L}{dt} = -1.66 \cdot 10^2 v_C - 1.75 \cdot 10^3 i_L + 1.826 \cdot 10^4 \\ v_C(0) = -1.1 \cdot 10^2, \quad i_L(0) = 0 \end{cases} \quad (33)$$

In forma vettoriale il sistema (33) si scrive come:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} v_C \\ i_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \cdot 10^3 & 2.5 \cdot 10^3 \\ -1.66 \cdot 10^2 & -1.75 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_C \\ i_L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -5.5 \cdot 10^5 \\ 1.826 \cdot 10^4 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} v_C \\ i_L \end{Bmatrix} (t=0) = \begin{Bmatrix} -1.1 \cdot 10^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (34)$$

Il sistema differenziale da risolvere utilizzando il metodo delle equazioni di stato è sempre simile al (34) e cioè, indicando con  $x$  il vettore delle variabili di stato, un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = [\mathbf{A}] \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (35)$$

L'integrale generale di un sistema di equazioni differenziali lineari come questo è la somma di un integrale particolare (soluzione di regime, se il regime esiste) e dell'integrale generale del sistema omogeneo associato (soluzione transitoria):  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{x}_0(t)$ . Se il termine noto è costante, per calcolare l'integrale particolare è sufficiente annullare le derivate e quindi risolvere il sistema  $[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{x}_p + \mathbf{b} = 0$ . Per quanto riguarda l'integrale generale del sistema omogeneo associato (cioè con  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ), esso va sempre cercato nella forma di un esponenziale reale o immaginario. La sostituzione dell'esponenziale  $e^{\lambda t}$  nel sistema omogeneo associato del (35) porta a scrivere l'equazione caratteristica  $\det[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}] = 0$  che permette di determinare, calcolando gli autovalori di  $[\mathbf{A}]$ , le costanti di tempo del sistema. L'analisi matematica approfondita di sistemi differenziali in questa forma esula dagli scopi di questa trattazione. In ogni caso il sistema (35) è solubile tramite svariati metodi ampiamente trattati in letteratura.

Gli autovalori di  $[\mathbf{A}]$  sono particolarmente rilevanti nello studio della stabilità delle reti (Un circuito si dice stabile se, sottoposto ad una eccitazione esterna di durata limitata, ha risposta che rimane limitata nel tempo dopo che la sollecitazione esterna ha finito di agire). Si può dimostrare infatti che un circuito è stabile se  $\Re(\lambda) \leq 0$ , per ogni  $\lambda$  autovalore di  $[\mathbf{A}]$ . In particolare, i circuiti lineari, tempo invarianti, contenenti solo elementi privi di memoria passivi ed elementi con memoria sono stabili.

Nel seguito vengono illustrati alcuni esempi di soluzione di circuiti con memoria. Il problema che si vuole risolvere è il seguente: assegnato il circuito elettrico e le grandezze impresse dei generatori indipendenti presenti, si vuole calcolare l'andamento temporale delle correnti di ramo e delle tensioni di ramo. Si suppone per semplicità che tutti i componenti siano dei bipoli, potendosi ricondurre all'ipotesi mediante l'introduzione di circuiti equivalenti dei componenti a più di due terminali.

Si consideri, ad esempio, il circuito in figura 23, che è un circuito del 1° ordine, cioè un circuito caratterizzato da un'equazione differenziale del primo ordine (cioè contenente un solo elemento con memoria). Applicando la Legge di Kirchhoff delle Tensioni (LKT) all'istante  $t = 0^+$  (cioè un istante dopo la chiusura dell'interruttore T), si ottiene:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E \quad (36)$$

L'integrale generale di una equazione differenziale lineare è la somma di un integrale particolare (soluzione di regime, se esiste il regime) e dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata (soluzione transitoria):  $i(t) = i_p(t) + i_0(t)$ . Se si assume che E sia costante, per calcolare l'integrale particolare è sufficiente annullare la derivata:  $i_p(t) = E/R$ . Per quanto riguarda l'integrale generale dell'equazione omogenea associata, esso va sempre cercato nella forma di un esponenziale reale o immaginario. La sostituzione dell'esponenziale  $e^{\lambda t}$  nella omogenea associata della (36) porta a scrivere l'equazione caratteristica:

$$L \lambda + R = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -R/L \quad \Rightarrow \quad i(t) = E/R + I e^{-Rt/L}$$

La determinazione della costante I può essere effettuata se è noto il valore iniziale:

$$i(0^+) = i_0 \quad (37)$$

Per calcolare il valore iniziale è sufficiente considerare il circuito di figura 23.a, cioè prima della chiusura dell'interruttore T ( $t < 0$ ). È evidente che  $i(0^-) = 0$ , visto che l'interruttore T è aperto. Utilizzando ora il postulato di continuità dell'energia è possibile affermare che  $i(0^+) = 0$ . Risulta quindi:

$$0 = E/R + I \quad \Rightarrow \quad I = -E/R$$

In conclusione, l'andamento temporale della corrente  $i$  è stato calcolato tramite la soluzione della seguente equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti con il valore iniziale di corrente nulla.

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + Ri = E \\ i(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (38)$$

Il parametro  $\tau = L/R$  è detto costante di tempo del circuito. La costante di tempo rappresenta l'intervallo di tempo necessario perché la risposta transitoria raggiunga il 63% del suo valore di regime. Dopo un tempo pari a  $5\tau$  la risposta transitoria supera il 99% del suo valore di regime. Dalla figura 25 emerge una interpretazione del parametro  $\tau$  che può essere assunto ad indicare la maggiore o minore "rapidità" del fenomeno transitorio.

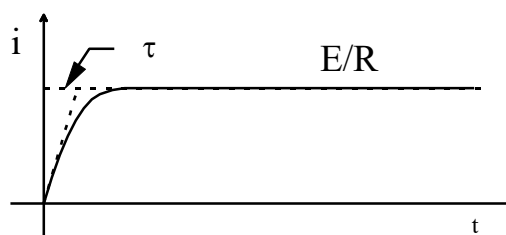


Figura 25

Si consideri ora il circuito rappresentato nella figura 26.a in cui è presente l'interruttore ideale  $T$  che si chiude istantaneamente all'istante  $t = 0$ . La LKT nel ramo considerato ha la forma:

$$E = Ri + v_C \Rightarrow i = \frac{E - v_C}{R}$$

ossia:

$$\begin{cases} C \frac{dv_C}{dt} = \frac{E - v_C}{R} \\ v_C(0) = v_{C,0} \end{cases} \quad (39)$$

ove  $v_{C,0}$  è il valore della tensione iniziale ai capi del condensatore (che si mantiene uguale a  $t = 0^-$  e a  $t = 0^+$  per il postulato di continuità dell'energia). Dalla (39) si ottiene la seguente equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti:

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{\tau} = \frac{E}{\tau} \Rightarrow v_C(t) = E + Ae^{-t/\tau} \quad (40)$$

dove  $\tau = RC$  è la costante di tempo del circuito. Per la determinazione della costante  $A$  si considera il valore iniziale e si scrive la (40) per  $t = 0^+$ :

$$v_C(0^+) = v_{C,0} = E + A \Rightarrow v_C(t) = E + (v_{C,0} - E)e^{-t/\tau} \Rightarrow i(t) = \frac{E - v_{C,0}}{R} e^{-t/\tau} \quad (41)$$

Il grafico della (41) è mostrato in figura 26.b. Si noti che anche in questo caso emerge una interpretazione del parametro  $\tau$  che può essere assunto ad indicare la maggiore o minore "rapidità" del fenomeno transitorio. In particolare, per  $t > 5\tau$  si può assumere che il transitorio sia esaurito e che si sia raggiunta la soluzione di regime (che in questo caso è  $i(t) = 0$ ).

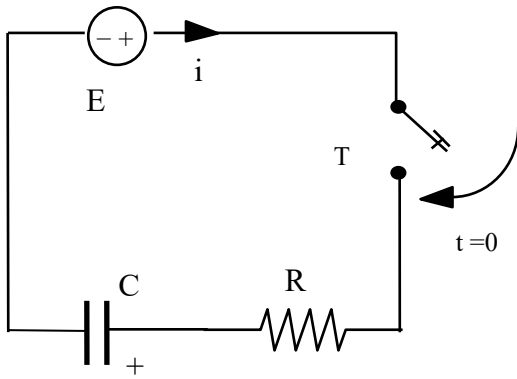


Figura 26.a

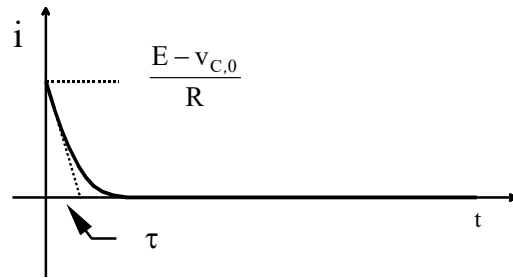


Figura 26.b

I circuiti contenenti componenti attivi (cioè in grado di erogare potenza) non sono necessariamente stabili. A titolo di esempio si consideri il circuito di figura 27, in cui l'interruttore T si chiude all'istante  $t = 0$  e si riapre all'istante  $t = t_0$ .

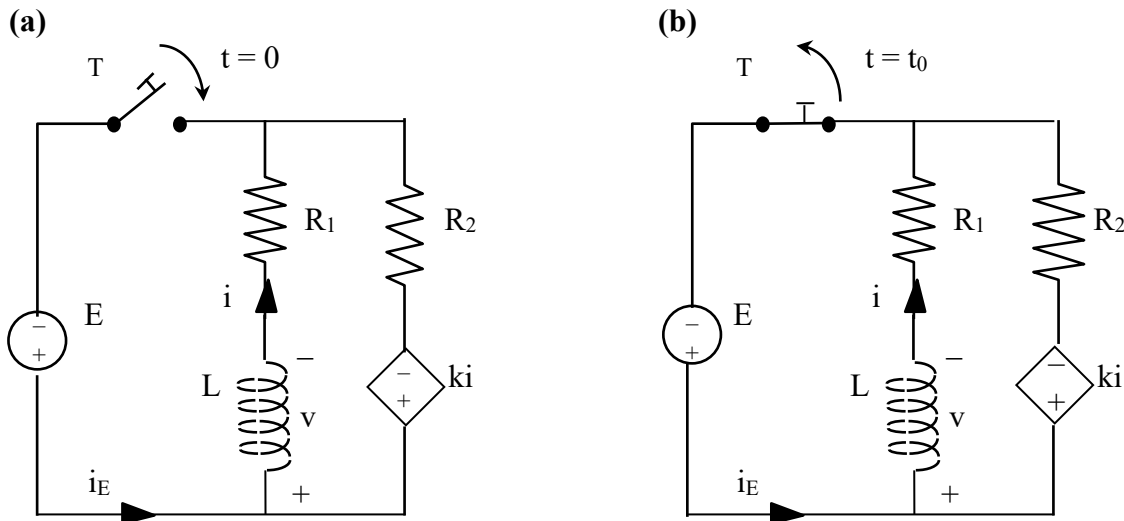


Figura 27

L'andamento temporale della corrente  $i$ , per  $0 \leq t \leq t_0$ , è calcolabile risolvendo il seguente sistema, con il valore iniziale di corrente nulla (supponendo che  $k \neq R_1 + R_2$ ).

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + R_1 i = E \\ i(0) = 0 \\ E + R_2 (i - i_E) - ki = 0 \end{cases} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R_1} \left( 1 - e^{-\frac{R_1}{L} t} \right) \quad (42)$$

L'andamento temporale della corrente  $i$ , per  $t \geq t_0$ , è calcolabile risolvendo il seguente sistema, con il valore iniziale di corrente  $i_0 = i(t = t_0)$ .

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + (R_1 + R_2 - k)i = 0 \\ i(t_0) = i_0 \end{cases} \Rightarrow i(t) = i_0 e^{\frac{k - R_1 - R_2}{L} (t - t_0)} \quad (43)$$

La (43) mostra che il circuito è stabile solo se  $k \leq R_1 + R_2$ . Nel caso contrario la corrente  $i$  cresce esponenzialmente. Pertanto, se il circuito di figura 27 rappresenta il modello un dispositivo fisico, al crescere della

i si raggiungeranno i limiti tecnologici del dispositivo (che si guasterà); oppure, se il circuito di figura 27 rappresenta il modello un dispositivo fisico solo in un certo regime di funzionamento, al crescere della  $i$  si raggiungeranno i limiti del modello e sarà necessario modificare la struttura del circuito.

Come caso limite di stabilità, si consideri il circuito illustrato in figura 28. Per  $t < 0$ , si ha:  $i = i_L = E/R$ ,  $i_C = 0$ ,  $v_L = v_C = 0$ . Dopo l'apertura dell'interruttore T, per  $t > 0$ , il circuito è costituito dal parallelo dell'induttore con il condensatore. Pertanto, il sistema risolvibile è dato da:

$$\begin{aligned} \frac{dv_C}{dt} &= \frac{i_C}{C} = \frac{i_L}{C} \\ \frac{di_L}{dt} &= \frac{v_L}{L} = -\frac{v_C}{L} \end{aligned} \quad (44)$$

con le condizioni iniziali  $v_C(0) = 0$ ,  $i_L(0) = E/R$ .

Sostituendo la prima delle (44) nella seconda e cercando una soluzione nella forma di un esponenziale reale o immaginario ( $e^{\lambda t}$ ) si ottiene la relazione  $\lambda^2 + 1/LC = 0$ . Posto  $\omega_0^2 = 1/LC$ , si ottengono le due radici, puramente immaginarie,  $\lambda = \pm j \omega_0$ .<sup>(6)</sup> Si noti quindi che  $\Re(\lambda) = 0$  e le soluzioni del problema non tendono a zero, nè divergono, ma sono oscillanti:

$$i_L(t) = \frac{E}{R} \cos(\omega_0 t) \quad , \quad v_C(t) = \frac{E}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \sin(\omega_0 t)$$

Nel circuito si instaurerà quindi un regime sinusoidale permanente.

### Regime di corrente alternata

Si può dimostrare che sotto alcune deboli ipotesi di stabilità del circuito, se il circuito è lineare e le eccitazioni presenti sono funzioni sinusoidali isofrequenziali del tempo, dopo un transitorio di durata dipendente dai parametri del circuito stesso, si raggiunge una soluzione di regime in cui tutte le grandezze del circuito sono funzioni sinusoidali isofrequenziali, con frequenza pari a quella dei generatori. Per calcolare la soluzione di regime, si può applicare il metodo simbolico che considera le grandezze e le equazioni del circuito trasformate mediante la trasformata di Steinmetz e perviene ad un sistema risolutivo algebrico nello spazio dei numeri complessi. Il sistema risolvibile si può ottenere sostituendo i condensatori e gli induttori con dei "resistori" con resistenza complessa (impedenza). Per la descrizione dettagliata del metodo si rimanda ai capitoli successivi. Per la soluzione del circuito simbolico sopramenzionato si applicano tutti i metodi precedentemente visti per i circuiti privi di memoria.

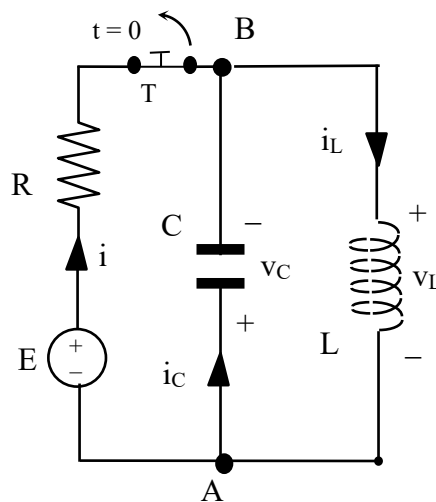


Figura 28

<sup>(6)</sup> Al fine di evitare possibili fraintendimenti, a differenza di quanto accade usualmente, è consuetudine in elettrotecnica indicare con la lettera "j" l'unità immaginaria ( $j^2 = -1$ ), riservando il simbolo "i" per le correnti.

## GRANDEZZE PERIODICHE

### INTRODUZIONE

Una grandezza tempodipendente  $a(t)$  si definisce **periodica** quando ad uguali intervalli  $T$  assume valori uguali, cioè quando vale la relazione (con  $n$  intero qualsiasi):

$$a(t) = a(t + nT) \quad (1)$$

- Il tempo  $T$  si definisce **periodo**;

- La grandezza  $f = 1/T$ , che rappresenta il numero di periodi contenuti nell'unità di tempo, si definisce **frequenza**. La frequenza si misura in Hertz [Hz] (periodi/secondo);

- Si definisce **valore medio** di  $a(t)$  la media di  $a(t)$  eseguita sul periodo  $T$ :

$$A_m = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a(t) dt \quad (2)$$

- Si definisce **valore efficace** di  $a(t)$  la radice quadrata della media dei quadrati dei valori istantanei di  $a(t)$  eseguita su un periodo  $T$ :

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a^2(t) dt} \quad (3)$$

- Una grandezza periodica si definisce **alternata** quando il suo valore medio è nullo;

### GRANDEZZE SINUSOIDALI

Una grandezza alternata del tipo:

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha) \quad (4)$$

si dice **sinusoidale**.

- La grandezza  $A_M$  che compare nella (4) è detta **ampiezza**, ed è pari al valore massimo di  $a(t)$ ;

- La grandezza  $\omega$  è detta **pulsazione**, ha le dimensioni di una velocità angolare (radianti/secondo) ed è pari a  $2\pi/T$ ;

- La grandezza  $\alpha$  è detta **fase**. La fase dipende dal valore che  $a(t)$  assume all'istante  $t = 0$ .

Il valore medio di una grandezza sinusoidale è pari a zero (per ogni valore di  $A_M$  e  $\alpha$ ).

Il valore efficace di una grandezza sinusoidale è pari a:

$$A = \sqrt{\frac{A_M^2}{T} \int_t^{t+T} \cos^2(\omega t) dt} = \frac{A_M}{\sqrt{2}} \cong 0.707 A_M \quad (5)$$

Una grandezza sinusoidale è quindi completamente definita da tre parametri:

- 1) L'ampiezza  $A_M$ , o il valore efficace,  $A$ .
- 2) La pulsazione  $\omega$ , o la frequenza  $f$ , o il periodo  $T$ .
- 3) La fase  $\alpha$ , o la differenza di fase con un'altra grandezza sinusoidale nota di uguale pulsazione.

Siano  $a(t)$  e  $b(t)$  due grandezze sinusoidali isofrequenziali (vedi figura 1):

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha_a)$$

$$b(t) = B_M \cos(\omega t + \alpha_b)$$

Si definisce **differenza di fase** tra  $a$  e  $b$  l'angolo

$$\phi = \alpha_a - \alpha_b$$

L'angolo  $\phi$  è chiaramente indipendente dall'istante iniziale di riferimento.

- Se  $\phi = 0$ ,  $a(t)$  e  $b(t)$  si dicono in **fase** (vedi figura 2.a);
- Se  $\phi > 0$ ,  $a(t)$  è in **anticipo di fase** rispetto a  $b(t)$ , che è a sua volta in **ritardo di fase** rispetto ad  $a(t)$ . Se  $\phi < 0$  la situazione si inverte;
- Se  $\phi = \pm \pi$ ,  $a(t)$  e  $b(t)$  si dicono in **opposizione** (vedi figura 2.b);
- Se  $\phi = \pm \pi/2$ ,  $a(t)$  e  $b(t)$  si dicono in **quadratura** (vedi figura 2.c).

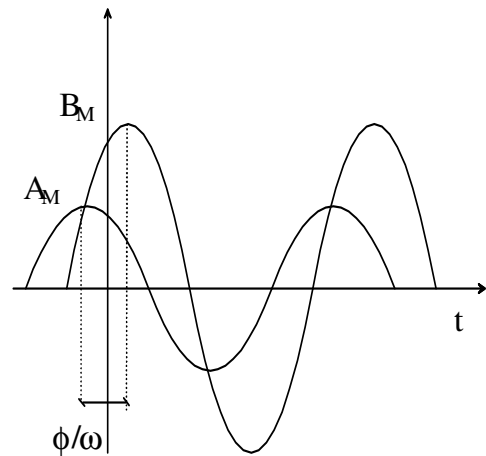


Figura 1. -  $a(t)$  è in anticipo rispetto a  $b(t)$ .

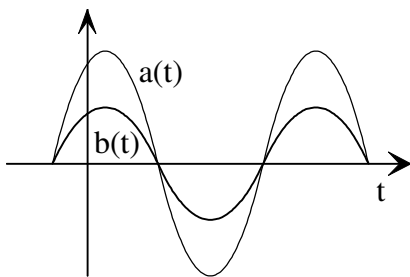


Figura 2.a -  $a(t)$  e  $b(t)$  sono in fase.

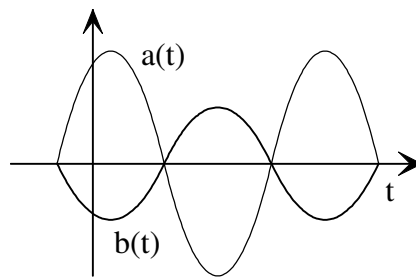


Figura 2.b -  $a(t)$  e  $b(t)$  sono in opposizione.

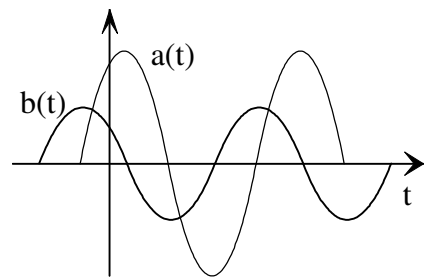


Figura 2.c -  $a(t)$  e  $b(t)$  sono in quadratura.

### OPERAZIONI SU GRANDEZZE SINUSOIDALI

Il **prodotto** di una grandezza sinusoidale

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha)$$

per uno scalare  $m$  è una grandezza sinusoidale  $c(t)$  con ampiezza pari a  $mA_M$ , con pulsazione  $\omega$ , e con fase pari a  $\alpha$  ( $c(t)$  e  $a(t)$  in fase) se  $m > 0$ , o a  $\alpha + \pi$  ( $c(t)$  e  $a(t)$  in opposizione) se  $m < 0$ .

La **somma di due grandezze sinusoidali** isofrequenziali è ancora una grandezza isofrequenziale. Si ha infatti:

$$A_M \cos(\omega t + \alpha_a) + B_M \cos(\omega t + \alpha_b) = C_M \cos(\omega t + \alpha_c) \quad (6)$$

dove:

$$C_M = \sqrt{A_M^2 + B_M^2 + 2A_M B_M \cos(\alpha_a - \alpha_b)}; \quad \alpha_c = \arctg\left(\frac{A_M \sin \alpha_a + B_M \sin \alpha_b}{A_M \cos \alpha_a + B_M \cos \alpha_b}\right)$$



La **derivata** di una grandezza sinusoidale  $a(t)$  è pari a:

$$\frac{d}{dt} [A_M \cos(\omega t + \alpha)] = -\omega A_M \sin(\omega t + \alpha) = \omega A_M \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad (7)$$

La derivata di  $a(t)$  è quindi una grandezza sinusoidale di pulsazione  $\omega$  con ampiezza pari a  $\omega A_M$  e con un anticipo di fase pari a  $\pi/2$  (quindi in quadratura anticipo).

### **RAPPRESENTAZIONE DI GRANDEZZE SINUSOIDALI CON I NUMERI COMPLESSI (TRASFORMATA DI STEINMETZ)**

Si riporta la formula di Eulero:

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x) \quad (8)$$

da cui:

$$\cos(x) = \Re [e^{jx}] \quad (9)$$

dove con  $\Re$  si indica l'operatore "parte reale". La grandezza sinusoidale:

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha) = \Re [A_M e^{j(\omega t + \alpha)}] = \Re [\sqrt{2} A e^{j\omega t} e^{j\alpha}] \quad (10)$$

può essere quindi interpretata come componente reale di un opportuno numero complesso. Ponendo:

$$\underline{A} = A e^{j\alpha} = \frac{A_M}{\sqrt{2}} e^{j\alpha} \quad (11)$$

Il numero complesso  $\underline{A}$ , detto **fasore**, individua univocamente la grandezza sinusoidale  $a(t)$ . La (10) definisce quindi una corrispondenza biunivoca tra grandezze sinusoidali e numeri complessi (trasformata di Steinmetz). Il numero complesso  $\underline{A}$  può essere scritto nella forma:

$$\underline{A} = M + j N$$

dove  $M$  ed  $N$  sono la componente reale ed immaginaria di  $\underline{A}$  (vedi figura 3); modulo e fase sono dunque:

$$|\underline{A}| = \sqrt{M^2 + N^2}$$

$$\alpha = \begin{cases} \arctg\left(\frac{N}{M}\right), & \text{se } M > 0 \\ \pi + \arctg\left(\frac{N}{M}\right), & \text{se } M < 0 \end{cases}$$

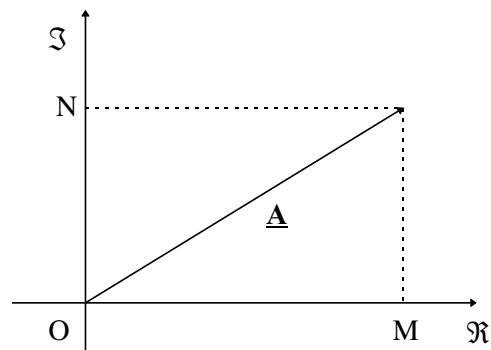


Figura 3.

#### • Operazioni con il metodo simbolico

- **SOMMA:** Date due grandezze sinusoidali rappresentate dai numeri complessi  $\underline{A}e^{j\omega t} = (M_1 + j N_1)e^{j\omega t}$  e  $\underline{B}e^{j\omega t} = (M_2 + j N_2)e^{j\omega t}$  è facile verificare la grandezza sinusoidale  $a(t) + b(t)$  è rappresentata da un numero complesso  $\underline{C}e^{j\omega t}$ , dove:

$$\underline{C} = (M_1 + M_2) + j (N_1 + N_2)$$

$$\underline{C} = \underline{A} + \underline{B}$$

- **PRODOTTO PER UN NUMERO REALE:** Data una grandezza sinusoidale  $a(t)$  rappresentata dal numero complesso  $\underline{A}e^{j\omega t}$  ed un numero reale  $m$ , si verifica immediatamente che il numero complesso  $\underline{C}e^{j\omega t}$  che rappresenta il prodotto  $m a(t)$  è tale che:

$$\underline{C} = m \underline{A}$$

- Prodotto per il numero immaginario puro  $j$ :

Data una grandezza sinusoidale  $a(t)$  rappresentata dal numero complesso  $\underline{A} e^{j\omega t}$  e tenendo conto che  $j = e^{j\pi/2}$ , si ha che:

$$j \underline{A} e^{j\omega t} = A e^{j(\alpha + \pi/2)} e^{j\omega t}$$

Sul piano di Gauss,  $\underline{A} e^{j\omega t}$  moltiplicato per  $j$  viene ruotato di  $\pi/2$  nel senso positivo di rotazione come mostrato in figura 4.

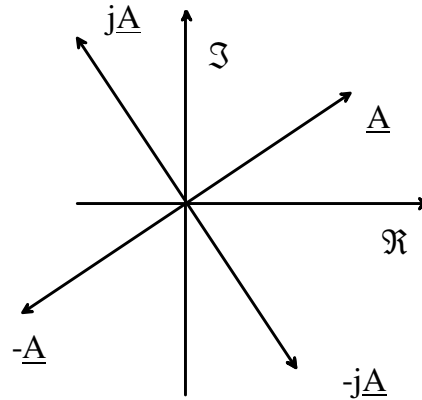


Figura 4.

- DERIVAZIONE: La derivata di  $\underline{A} e^{j\omega t}$  è pari a  $\underline{D} e^{j\omega t}$ . Infatti:

$$\frac{d}{dt}(\underline{A} e^{j\omega t}) = j\omega \underline{A} e^{j\omega t}, \text{ dove: } \underline{D} = j\omega \underline{A}$$

Sul piano complesso quindi la derivata di  $\underline{A} e^{j\omega t}$  è rappresentata da un vettore di modulo pari a  $\omega A$  e ruotato rispetto a  $\underline{A} e^{j\omega t}$  di un angolo pari a  $\pi/2$  in senso positivo.

### RAPPRESENTAZIONE SIMBOLICA DI GRANDEZZE SINUSOIDALI ISOFREQUENZIALI

In modo del tutto equivalente a quanto è stato fatto per i fasori, nella rappresentazione simbolica di più grandezze sinusoidali isofrequenziali è lecito omettere il fattore rotante  $e^{j\omega t}$ , poiché generalmente interessa conoscere la posizione reciproca dei vettori rappresentativi. Una qualsiasi grandezza sinusoidale:

$$a(t) = \sqrt{2}A \cos(\omega t + \alpha)$$

può quindi essere rappresentata dal numero complesso:

$$\underline{A} = A e^{j\alpha}$$

In ogni problema, si può assumere una grandezza sinusoidale arbitraria come riferimento di fase, ponendo il suo angolo di fase pari a 0. In tal modo, la grandezza assunta come riferimento di fase sarà rappresentata da un numero reale puro. Quanto detto finora ci permette di esprimere le seguenti corrispondenze:

$$\begin{array}{ll} a(t) \Leftrightarrow \underline{A} & a(t) + b(t) \Leftrightarrow \underline{A} + \underline{B} \\ \frac{da}{dt} \Leftrightarrow j\omega \underline{A} & m a(t) \Leftrightarrow m \underline{A} \\ \frac{d^2 a}{dt^2} \Leftrightarrow -\omega^2 \underline{A} & \int_{-\infty}^t a(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{\underline{A}}{j\omega} \end{array}$$

#### • Complesso coniugato

Dato un numero complesso  $\underline{A} = A e^{j\alpha}$ , si definisce “complesso coniugato di  $\underline{A}$ ” il numero  $\underline{A}^*$ , avente modulo uguale e fase opposta:

$$\underline{A}^* = A e^{-j\alpha} \quad (12)$$

Si verifica facilmente che il prodotto di un numero complesso per il suo coniugato è pari al quadrato del modulo:

$$\underline{A} \underline{A}^* = A^2 \quad (13)$$

# CIRCUITI IN REGIME SINUSOIDALE PERMANENTE

## METODO SIMBOLICO PER LA SOLUZIONE DI CIRCUITI LINEARI IN CORRENTE ALTERNATA

In figura 1 è illustrato lo schema generalmente utilizzato per determinare la soluzione di regime di circuiti lineari in corrente alternata (c.a.). Il metodo consiste nel trasformare il sistema di equazioni differenziali per i valori istantanei delle tensioni e delle correnti in un sistema algebrico di più agevole soluzione.

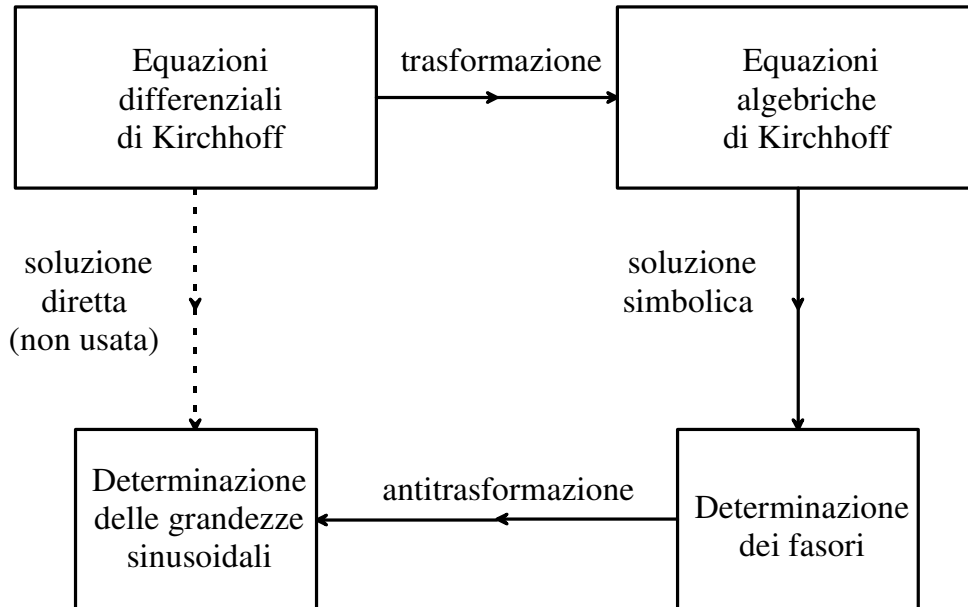


Figura 1. - Schema di risoluzione di circuiti in c.a.

Una volta scritte le equazioni di Kirchhoff ai valori istantanei, il metodo prevede tre passi:

- 1) Trasformazione delle equazioni di Kirchhoff differenziali in equazioni di Kirchhoff simboliche (algebriche). Come si vedrà tra breve, l'operazione di trasformazione permette di risolvere il circuito con i metodi visti per la soluzione dei circuiti in corrente continua.
- 2) Risoluzione delle equazioni simboliche e determinazione dei numeri complessi rappresentativi delle varie incognite.
- 3) Determinazione delle correnti e delle tensioni istantanee a partire dalle grandezze simboliche che le rappresentano. Quest'ultima fase è del tutto immediata, tanto che viene normalmente sottintesa.

### TRASFORMAZIONE DELLE EQUAZIONI DI KIRCHHOFF DIFFERENZIALI IN EQUAZIONI ALGEBRICHE (LEGGE DI OHM SIMBOLICA)

Si consideri un generico ramo di circuito, caratterizzato da una resistenza  $R$ , un'induttanza  $L$  e una capacità  $C$ . Il ramo è alimentato da una tensione  $v(t)$  sinusoidale (vedi figura 2):

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \alpha_v)$$

dove i valori  $V_M$  e  $\alpha_v$  sono da considerarsi noti. La legge di Ohm per i valori istantanei nel ramo considerato ha la forma:

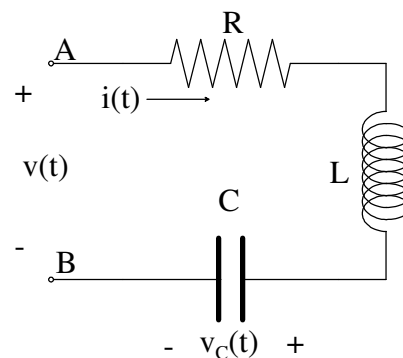


Figura 2.

$v(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt}(t) + v_c(t)$ . Derivando una volta rispetto al tempo e considerando che

$\frac{dv_c}{dt} = \frac{i(t)}{C}$ , si ottiene:

$$R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

La soluzione della (1) è costituita dalla somma dell'integrale dell'equazione omogenea associata e di un integrale particolare. E' possibile dimostrare che l'integrale dell'equazione omogenea associata costituisce una componente transitoria della corrente, che tende ad zero all'aumentare del tempo. L'integrale particolare rappresenta quindi la soluzione di regime. Per determinare la soluzione di regime che soddisfa la (1) si cerca una corrente  $i(t)$  che soddisfi la (1) e che abbia un andamento sinusoidale con la stessa pulsazione di  $v(t)$ :

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \alpha_1)$$

Ricordando quanto detto riguardo alla corrispondenza tra grandezze sinusoidali e numeri complessi, la (1) si può riscrivere come segue:

$$\Re \left[ -\omega^2 L \sqrt{2} \underline{I} e^{j\omega t} \right] + \Re \left[ j\omega R \sqrt{2} \underline{I} e^{j\omega t} \right] + \Re \left[ \frac{1}{C} \sqrt{2} \underline{I} e^{j\omega t} \right] = \Re \left[ j\omega \sqrt{2} \underline{V} e^{j\omega t} \right]$$

con:

$$\underline{I} = I e^{j\alpha_1}, \quad \underline{V} = V e^{j\alpha_v}$$

da cui:

$$\Re \left[ \left( -\omega^2 L + j\omega R + \frac{1}{C} \right) \sqrt{2} \underline{I} e^{j\omega t} \right] = \Re \left[ j\omega \sqrt{2} \underline{V} e^{j\omega t} \right] \quad (2)$$

La (2) può essere interpretata come una relazione di uguaglianza tra due grandezze sinusoidali con identica pulsazione. Per la già citata corrispondenza biunivoca esistente tra grandezze sinusoidali isofrequenziali e numeri complessi, devono risultare uguali i numeri complessi che rappresentano le due grandezze al primo e secondo membro della (2). Si ha quindi:

$$\left( -\omega^2 L + j\omega R + \frac{1}{C} \right) \underline{I} = j\omega \underline{V}$$

da cui:

$$\left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \underline{I} = \underline{V} \quad (3)$$

La grandezza:

$$\underline{Z} = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (4)$$

viene detta **impedenza** del ramo AB considerato. Si definisce quindi impedenza  $\underline{Z}$  un operatore complesso uguale al rapporto fra i numeri complessi associati alla tensione e alla corrente:  $\underline{Z} = \underline{V} / \underline{I}$ . Tenendo conto della (4) e della definizione data, la (3) diventa:

$$\underline{V} = \underline{Z} \underline{I} \quad (5)$$

La (5) viene detta **equazione di Ohm simbolica**.

La definizione di impedenza (4) può essere riscritta come:

$$\underline{Z} = R + j X \quad (6)$$

avendo posto:

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (7)$$

La grandezza  $X$  è detta **reattanza** del ramo, e costituisce la parte immaginaria dell'impedenza. La reattanza dipende dalla capacità e dall'induttanza del ramo, e dalla pulsazione  $\omega$  di alimentazione. La reattanza viene distinta in reattanza induttiva  $X_L$  e capacitiva  $X_C$  secondo il seguente schema:

$$X_L = \omega L \qquad X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

$$X = X_L + X_C$$

L'inverso dell'impedenza viene definito **ammettenza**:

$$\underline{Y} = 1/\underline{Z} \quad (8)$$

In base alla legge di Ohm simbolica, si ha:

$$\underline{I} = \underline{Y} \underline{V} \quad (9)$$

da cui si ricava che  $\underline{I}$  è un numero complesso di modulo:

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

L'argomento di  $\underline{Z}$  determina lo sfasamento ( $\varphi$ ) tra il fasore della tensione ed il fasore della corrente. Risulta infatti:

$$\varphi = \arg[\underline{V}] - \arg[\underline{I}] = \alpha_V - \alpha_I = \arg[\underline{Z}] = \text{Arctg} \frac{X}{R}$$

Lo sfasamento  $\varphi$  è positivo quando  $\alpha_V > \alpha_I$ , cioè quando la tensione è in anticipo rispetto alla corrente. Si noti che, essendo la resistenza  $R$  positiva o nulla, risulta  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ . Infine è possibile determinare  $i(t)$ :

$$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + X^2}} \cos\left(\omega t + \alpha_V - \text{Arctg} \frac{X}{R}\right)$$

### TRASFORMAZIONE SIMBOLICA DELLE EQUAZIONI DI KIRCHHOFF

Sia dato un circuito caratterizzato da  $R$  rami ed  $N$  nodi. Per ciascun ramo si assumano versi positivi per la tensione di ramo e la corrente di ramo associati secondo la scelta dell'utilizzatore. Preso arbitrariamente un nodo come nodo di riferimento del circuito, la LKT permette di scrivere  $R$  relazioni linearmente indipendenti tra tensioni di ramo e tensioni di nodo che, in forma matriciale, assumono la forma:

$$\mathbf{v} = \mathbf{M} \mathbf{e}$$

dove  $\mathbf{v}$  è il vettore delle tensioni di ramo,  $\mathbf{e}$  è il vettore delle tensioni di nodo ed  $\mathbf{M}$  è una matrice avente  $R$  righe ed  $(N - 1)$  colonne, il cui generico elemento  $M_{hk}$  risulta nullo se il ramo  $h$  non è collegato al nodo  $k$ , uguale a  $+1$  se la corrente del ramo  $h$  esce dal nodo  $k$ ,  $-1$  se la corrente del ramo  $h$  entra nel nodo  $k$ .

La LKC applicata a tutti i nodi tranne quello di riferimento permette di scrivere  $(N - 1)$  equazioni che in forma matriciale assumono la forma:

$$\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

dove  $\mathbf{i}$  è il vettore delle correnti di ramo ed  $\mathbf{A}$  è una matrice, chiamata matrice di incidenza ridotta, avente  $(N - 1)$  righe ed  $R$  colonne, il cui generico elemento  $A_{hk}$  risulta nullo se il ramo  $k$  non è col-

legato al nodo  $h$ , uguale a  $+1$  se la corrente del ramo  $k$  esce dal nodo  $h$ ,  $-1$  se la corrente del ramo  $k$  entra nel nodo  $h$ . Risulta quindi che  $\mathbf{M}$  è la trasposta di  $\mathbf{A}$ , cioè:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^T$$

È possibile trasformare le equazioni di Kirchhoff ai valori istantanei con un procedimento del tutto analogo a quello seguito per ricavare la legge di Ohm simbolica. Mediante tale trasformazione si perviene alle seguenti relazioni:

$$\underline{\mathbf{V}} = \mathbf{A}^T \underline{\mathbf{E}} \quad (10)$$

$$\mathbf{A} \underline{\mathbf{I}} = \mathbf{0} \quad (11)$$

dove  $\underline{\mathbf{V}}$  è il vettore dei numeri complessi associati alle tensioni di ramo,  $\underline{\mathbf{E}}$  è il vettore dei numeri complessi associati alle tensioni di nodo e  $\underline{\mathbf{I}}$  è il vettore dei numeri complessi associati alle correnti di ramo.

Le Leggi di Kirchhoff (delle Tensioni e delle Correnti) ci permettono di scrivere delle equazioni che descrivono la topologia del circuito, ovvero il modo in cui i componenti sono connessi tra loro:

- La Legge di Kirchhoff delle Correnti (*LKC*) afferma che la somma algebrica dei numeri complessi associati alle correnti in un nodo è nulla.

- Equazione simbolica per un nodo ( $LKC_n$ ): 
$$\sum_{r=1}^n \underline{I}_r = 0 \quad (12.a)$$

- La Legge di Kirchhoff delle Tensioni (*LKT*) può essere formulata in due modi equivalenti tra loro:

- La somma algebrica dei numeri complessi associati alle tensioni di ramo sui rami di una maglia è nulla;

- Equazione simbolica per una maglia ( $LKT_m$ ): 
$$\sum_{r=1}^m \underline{V}_r = 0 \quad (12.b)$$

- Ogni numero complesso associato ad una tensione di ramo è dato dalla differenza dei numeri complessi associati ai potenziali di nodo dei suoi terminali.

- Equazione simbolica per un ramo ( $LKT_r$ ): 
$$\underline{V}_{AB} = \underline{E}_A - \underline{E}_B \quad (12.c)$$

Le (12) sono formalmente identiche alle leggi di Kirchhoff per circuiti in regime di corrente continua salvo il fatto che in luogo delle grandezze effettive compaiono i numeri complessi che le rappresentano ed in luogo delle resistenze le impedenze. Questa constatazione permette di affermare che la tecnica risolutiva dei circuiti in regime sinusoidale resta la stessa vista per i circuiti in continua salvo l'impiego dei numeri complessi. Valgono, inoltre, tutti i teoremi sulle reti in continua (Teoremi di Thevenin, di Norton, di Millman, di Tellegen, etc.). Quanto detto mostra anche come non sia necessario, ogni volta che si risolve un circuito, procedere alla "trasformazione" delle equazioni differenziali in simboliche, potendosi scrivere direttamente queste ultime tramite le (12). In definitiva quindi l'operazione di trasformazione è di regola omessa. Anche l'operazione di antitrasformazione si può di solito sottintendere essendo del tutto ovvio il passaggio dai numeri complessi alle grandezze sinusoidali che essi rappresentano. Tale passaggio infatti implica semplicemente che si prendano modulo e argomento del numero complesso e si identifichino con l'ampiezza e la fase della grandezza sinusoidale.

È da notare che una qualsiasi delle correnti o tensioni incognite del problema può essere presa come grandezza di riferimento per gli angoli di fase, cioè è possibile porre uguale a zero la sua fase. Ciò equivale infatti a scegliere una opportuna origine dei tempi.

- **Esempio 1:** I circuiti costituiti da una sola maglia si risolvono tramite la (5), che può scriversi, separando il calcolo del modulo  $I$  e dell'argomento  $\alpha_i$ :

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} ;$$

$$\alpha_I = \alpha_V - \varphi \quad ; \quad \text{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

• **Esempio 2:** Tutti i metodi illustrati precedentemente sono generalmente applicabili. A titolo di esempio si consideri il circuito illustrato nella figura 3.a, in cui si intende calcolare la corrente circolante sul condensatore C. Sia D il nodo di riferimento. Non sono stati indicati i versi positivi delle tensioni di ramo, perché si suppone di considerare comunque versi di riferimento associati con la regola dell'utilizzatore per tensioni e correnti di ramo. Il circuito è costituito da  $R = 6$  rami e da  $N = 4$  nodi. La figura 3.b mostra lo stesso circuito nel dominio simbolico (i fasori rappresentativi dei generatori indipendenti sono  $\underline{E}_S = E_S/\sqrt{2}$  ed  $\underline{I}_S = (I_S/\sqrt{2}) e^{j\alpha_S}$ ). Uno dei possibili alberi è illustrato in figura 3.c (rami 4, 5 e 6). I rami tratteggiati sono quelli di coalbero (rami 1, 2 e 3).

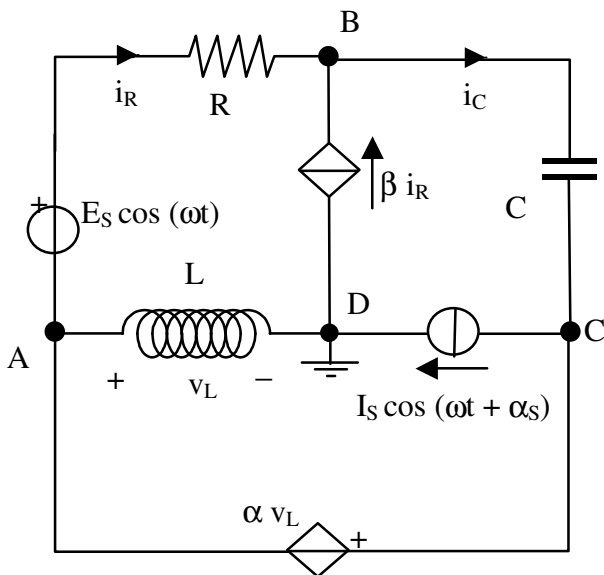


Figura 3a.

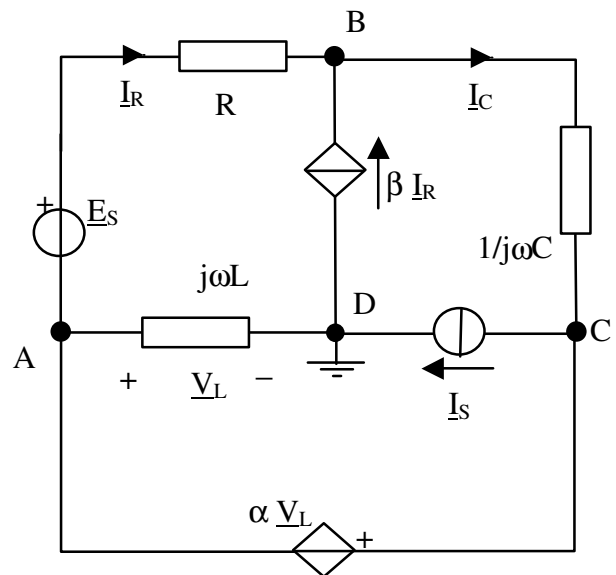


Figura 3b.

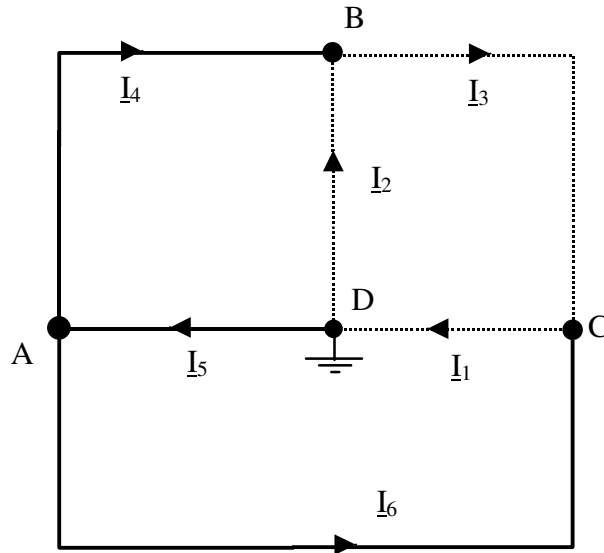


Figura 3c.

**Analisi di Tableau** (sistema di  $2R + N - 1 = 15$  equazioni)

( $R = 6$  equazioni LKT<sub>r</sub> in cui compaiono come incognite  $R = 6$  tensioni di ramo ed  $N - 1 = 3$  potenziali di nodo)

$$\begin{aligned}
 \underline{V}_1 &= \underline{E}_C \\
 \underline{V}_2 &= -\underline{E}_B \\
 \underline{V}_3 &= \underline{E}_B - \underline{E}_C \\
 \underline{V}_4 &= \underline{E}_A - \underline{E}_B \\
 \underline{V}_5 &= -\underline{E}_A \\
 \underline{V}_6 &= \underline{E}_A - \underline{E}_C
 \end{aligned} \tag{13.i}$$

( $N - 1 = 3$  equazioni LKC<sub>n</sub> in cui compaiono come incognite  $R = 6$  correnti di ramo)

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_5 - \underline{I}_4 - \underline{I}_6 &= 0 \\
 \underline{I}_3 - \underline{I}_4 - \underline{I}_2 &= 0 \\
 \underline{I}_1 - \underline{I}_3 - \underline{I}_6 &= 0
 \end{aligned} \tag{13.ii}$$

( $R = 6$  equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono come incognite  $R = 6$  tensioni di ramo ed  $R = 6$  correnti di ramo)

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_1 &= \underline{I}_S \\
 \underline{I}_2 &= \beta \underline{I}_4 \\
 \underline{V}_3 &= \underline{I}_3 / j\omega C \\
 \underline{V}_4 &= -\underline{E}_S + R \underline{I}_4 \\
 \underline{V}_5 &= j\omega L \underline{I}_5 \\
 \underline{V}_6 &= \alpha \underline{V}_5
 \end{aligned} \tag{13.iii}$$

La soluzione del sistema (13) consente di determinare  $\underline{I}_3$ : 
$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{E}_S + \alpha j\omega L \underline{I}_S}{\frac{1}{j\omega C} + \frac{R + \alpha\beta j\omega L}{1 + \beta}}$$

Supponendo che i dati siano:  $E_S = 10$  V,  $I_S = 5$  A,  $\alpha_S = 50^\circ$ ,  $R = 2$   $\Omega$ ,  $L = 0.5$  mH,  $C = 4$   $\mu$ F,  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 20$ ,  $f = 50$  Hz si ottiene  $\underline{I}_3 = 6.203 - j 18.07$  e quindi  $i_3(t) = 27.02 \cos(\omega t - 1.240)$  [A].



**Eliminazione delle tensioni di nodo** (sistema di  $R + (\text{Numero di componenti non controllati né in tensione né in corrente}) = 8$  equazioni)

$$\begin{aligned} & \underline{V}_1 + j\omega L \underline{I}_5 + \underline{V}_6 = 0 \\ (R - N + 1 = 3 \text{ equazioni LKT}_m) & \underline{V}_2 - R \underline{I}_4 + \underline{E}_S - j\omega L \underline{I}_5 = 0 \\ & -\frac{\underline{I}_3}{j\omega C} - \underline{V}_6 - \underline{E}_S + R \underline{I}_4 = 0 \end{aligned} \quad (14.i)$$

$$\begin{aligned} (N - 1 = 3 \text{ equazioni LKC}_n) & \underline{I}_5 - \underline{I}_4 - \underline{I}_6 = 0 \\ & \underline{I}_3 - \underline{I}_4 - \underline{I}_2 = 0 \\ & \underline{I}_S - \underline{I}_3 - \underline{I}_6 = 0 \end{aligned} \quad (14.ii)$$

(equazione costitutive dei componenti non controllati né in tensione né in corrente)

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \beta \underline{I}_4 \\ \underline{V}_6 &= \alpha j\omega L \underline{I}_5 \end{aligned} \quad (14.iii)$$

**Metodo dei Tagli Fondamentali** (sistema di  $R - N + 1 + (\text{Numero di componenti non controllati in corrente}) = 5$  equazioni)

$$\begin{aligned} & \underline{V}_1 + j\omega L (\underline{I}_S - \underline{I}_2) + \underline{V}_6 = 0 \\ (R - N + 1 = 3 \text{ equazioni LKT}_m) & \underline{V}_2 - R (\underline{I}_3 - \underline{I}_2) + \underline{E}_S - j\omega L (\underline{I}_S - \underline{I}_2) = 0 \\ & -\frac{\underline{I}_3}{j\omega C} - \underline{V}_6 - \underline{E}_S + R (\underline{I}_3 - \underline{I}_2) = 0 \end{aligned} \quad (15.i)$$

(equazione costitutive dei componenti non controllati in corrente)

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \beta (\underline{I}_3 - \underline{I}_2) \\ \underline{V}_6 &= \alpha j\omega L (\underline{I}_S - \underline{I}_2) \end{aligned} \quad (15.ii)$$

**Metodo dei potenziali di nodo** (sistema di  $N - 1 + (\text{Numero di componenti non controllati in tensione}) = 5$  equazioni)

$$\begin{aligned} (N - 1 = 3 \text{ equazioni LKC}_n) & \frac{-\underline{E}_A}{j\omega L} - \frac{\underline{E}_A - \underline{E}_B + \underline{E}_S}{R} - \underline{I}_6 = 0 \\ & j\omega C (\underline{E}_B - \underline{E}_C) - \frac{\underline{E}_A - \underline{E}_B + \underline{E}_S}{R} - \underline{I}_2 = 0 \\ & \underline{I}_S - j\omega C (\underline{E}_B - \underline{E}_C) - \underline{I}_6 = 0 \end{aligned} \quad (16.i)$$

(equazioni costitutive dei componenti non controllati in tensione)

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \beta \frac{\underline{E}_A - \underline{E}_B + \underline{E}_S}{R} \\ \underline{E}_A - \underline{E}_C &= -\alpha \underline{E}_A \end{aligned} \quad (16.ii)$$

In questo caso, non essendo  $\underline{I}_3$  tra le incognite del sistema, è necessario scrivere separatamente la relazione che la lega ai potenziali di nodo:  $\underline{I}_3 = j\omega C (\underline{E}_B - \underline{E}_C)$ .

### Teorema di Thevenin

Si può applicare il teorema di Thevenin alla soluzione del circuito di figura 3.b considerando come bipolo N il condensatore C e quindi come bipolo L l'insieme di tutti gli altri componenti del circuito (vedi figura 3.d). Il bipolo L' è quello indicato nella figura 3.e, mentre il valore della tensione  $\underline{E}_0$  viene calcolato risolvendo il circuito riportato nella figura 3.f ed è dato dalla relazione (19). Infine il valore della corrente  $\underline{I}_3$  viene ottenuto risolvendo il circuito illustrato nella figura 3.g, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo circuito equivalente di Thevenin.

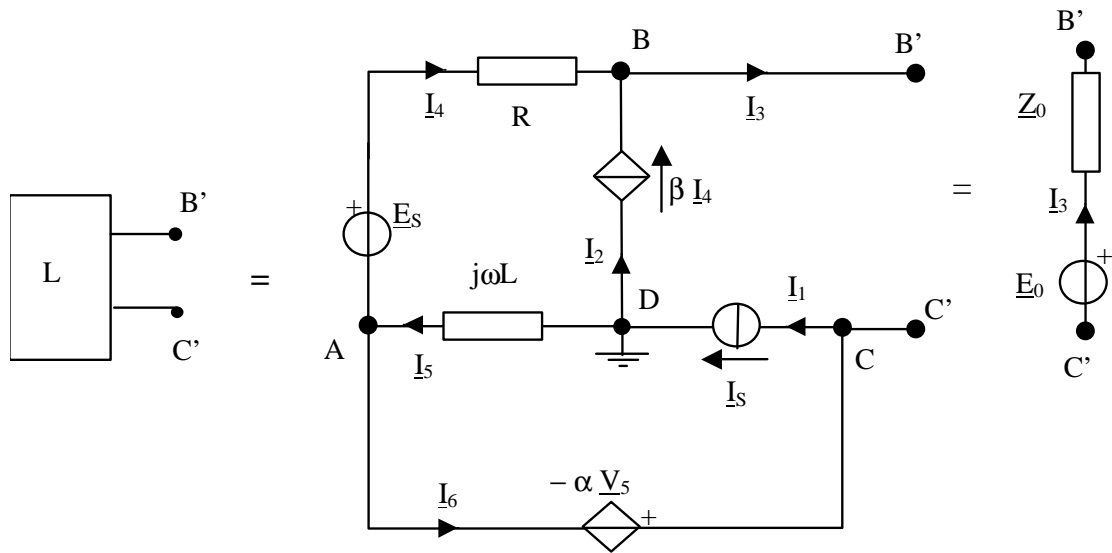
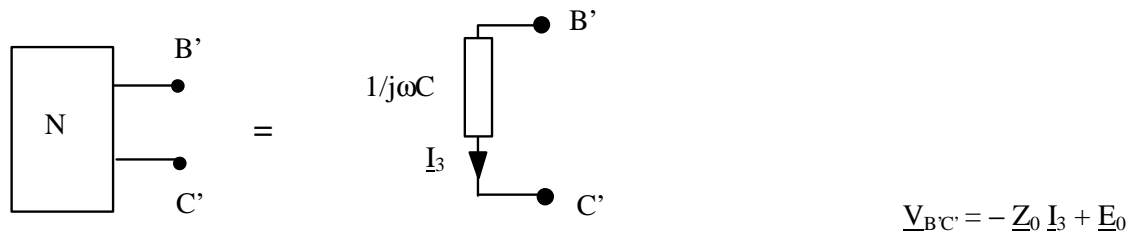


Figura 3.d

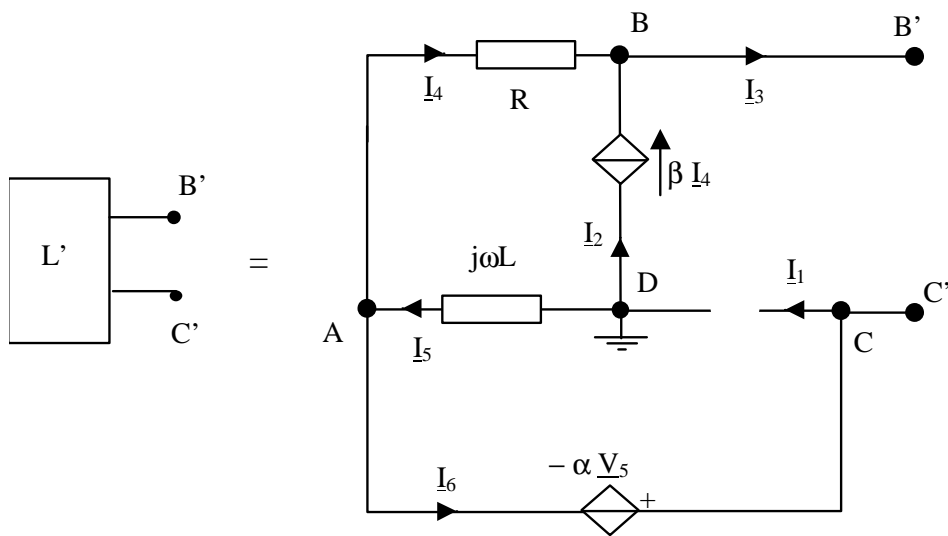


Figura 3.e

La soluzione del circuito di figura 3.e, finalizzata alla determinazione della caratteristica tensione-corrente del bipolo B'C' (cioè della tensione  $\underline{V}_{BC}$  in funzione della corrente  $\underline{I}_3$ ) si può effettuare con uno qualsiasi dei metodi precedentemente illustrati. Ad esempio, utilizzando il metodo dei potenziali di nodo si ottiene il seguente sistema di  $N-1+(\text{Numero di componenti non controllati in tensione}) = 5$  equazioni. Supponendo nota  $\underline{I}_3$ , è possibile calcolare  $\underline{E}_A$ ,  $\underline{E}_B$ ,  $\underline{E}_C$ ,  $\underline{I}_2$  ed  $\underline{I}_6$ , che risultano pari a  $\underline{E}_A = \beta j\omega L \underline{I}_3 / (\beta + 1)$ ,  $\underline{E}_B = (\beta j\omega L - R) \underline{I}_3 / (\beta + 1)$ ,  $\underline{E}_C = (\alpha + 1) \beta j\omega L \underline{I}_3 / (\beta + 1)$ ,  $\underline{I}_2 = \beta \underline{I}_3 / (\beta + 1)$  ed  $\underline{I}_6 = -\underline{I}_3$ .

Pertanto  $\underline{V}_{BC} = \underline{E}_B - \underline{E}_C = -(\alpha\beta j\omega L + R)\underline{I}_3/(\beta + 1)$  ed il circuito equivalente del bipolo L' è una impedenza pari a

$$\underline{Z}_0 = \frac{R + \alpha\beta j\omega L}{1 + \beta}$$

(N - 1 = 3 equazioni LKC<sub>n</sub>)

$$\frac{-\underline{E}_A}{j\omega L} - \frac{\underline{E}_A - \underline{E}_B}{R} - \underline{I}_6 = 0$$

$$\underline{I}_3 - \frac{\underline{E}_A - \underline{E}_B}{R} - \underline{I}_2 = 0$$

$$-\underline{I}_3 - \underline{I}_6 = 0$$

(17.i)

(equazioni costitutive dei componenti non controllati in tensione)

$$\underline{I}_2 = \beta \frac{\underline{E}_A - \underline{E}_B}{R}$$

$$\underline{E}_A - \underline{E}_C = -\alpha \underline{E}_A$$

(17.ii)

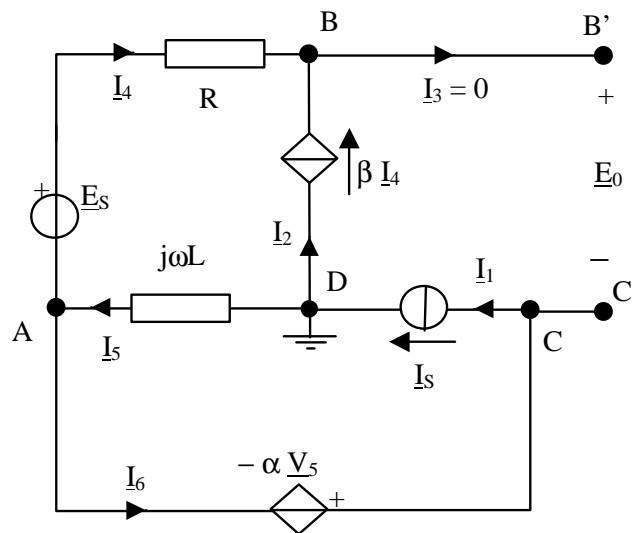


Figura 3.f

La soluzione del circuito di figura 3.f, finalizzata alla determinazione della tensione  $\underline{E}_0$  tra i terminali B' e C' si può effettuare con uno qualsiasi dei metodi precedentemente illustrati. Ad esempio, utilizzando il metodo dei Tagli Fondamentali si ottiene il seguente sistema di  $R - N + 1 + (\text{Numero di componenti non controllati in corrente}) = 5$  equazioni.

(R - N + 1 = 3 equazioni LKT<sub>m</sub>)

$$\underline{V}_1 + j\omega L(\underline{I}_S - \underline{I}_2) + \underline{V}_6 = 0$$

$$\underline{V}_2 - R(-\underline{I}_2) + \underline{E}_S - j\omega L(\underline{I}_S - \underline{I}_2) = 0$$

$$\underline{E}_0 - \underline{V}_6 - \underline{E}_S + R(-\underline{I}_2) = 0$$

(18.i)

(equazione costitutive dei componenti non controllati in corrente)

$$\underline{I}_2 = \beta(-\underline{I}_2)$$

$$\underline{V}_6 = \alpha j\omega L(\underline{I}_S - \underline{I}_2)$$

(18.ii)

Risolvendo le (18) il valore della tensione  $\underline{E}_0$  risulta essere:

$$\underline{E}_0 = \underline{E}_S + \alpha j\omega L \underline{I}_S$$

(19)

Infine il valore della corrente  $I_3$  viene ottenuto risolvendo il circuito illustrato nella figura 3.g, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo circuito equivalente di Thevenin. In questo caso, la corrente  $I_3$  risulta essere:

$$I_3 = \frac{\underline{E}_0}{\frac{1}{j\omega C} + Z_0} = \frac{\underline{E}_S + \alpha j\omega L I_S}{\frac{1}{j\omega C} + \frac{R + \alpha\beta j\omega L}{1 + \beta}}$$

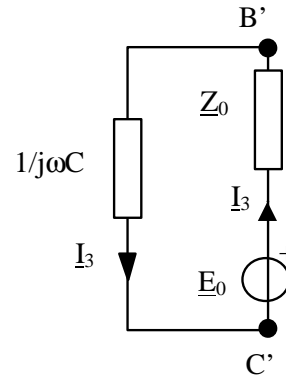


Figura 3.g

### Teorema di Norton

Si può applicare il teorema di Norton alla soluzione del circuito di figura 3.b considerando come bipolo N il condensatore C e quindi come bipolo L l'insieme di tutti gli altri componenti del circuito (vedi figura 3.h). Il bipolo L' è quello indicato nella figura 3.e, mentre il valore della corrente  $I_0$  viene calcolato risolvendo il circuito riportato nella figura 3.i ed è dato dalla relazione (21). Infine il valore della corrente  $I_3$  viene ottenuto risolvendo il circuito illustrato nella figura 3.j, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo circuito equivalente di Norton.

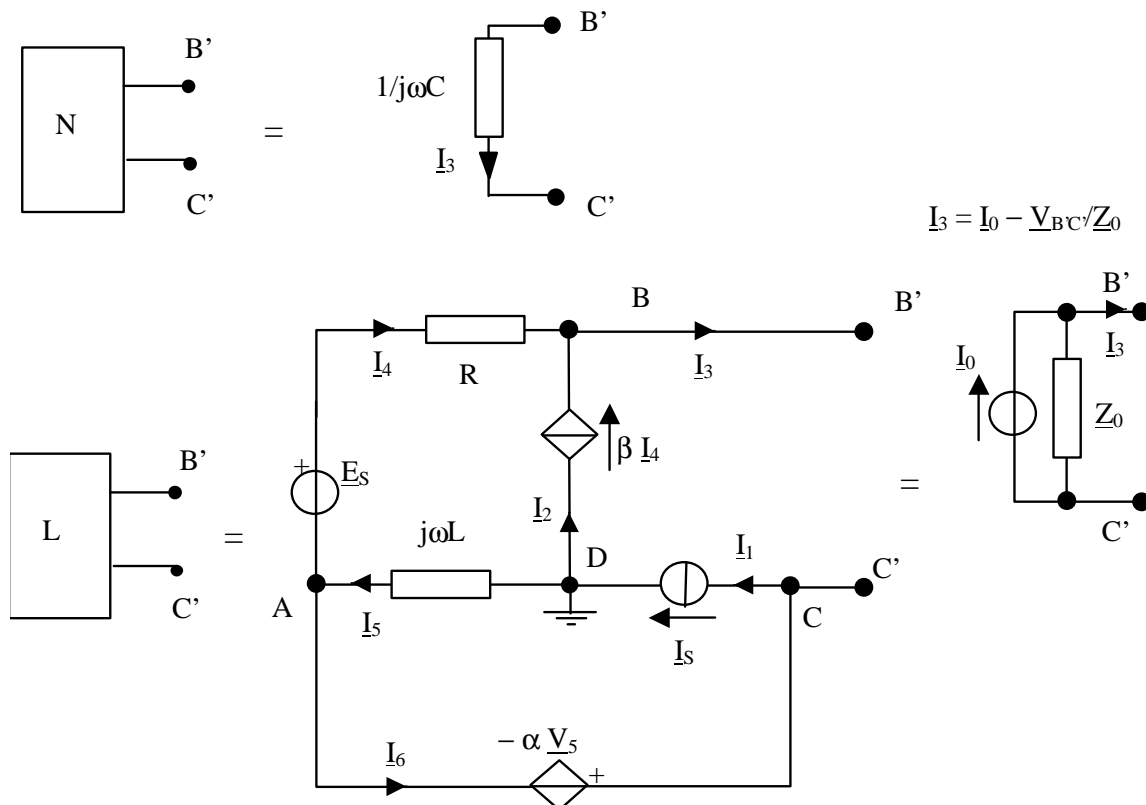


Figura 3.h

La soluzione del circuito di figura 3.e, finalizzata alla determinazione della impedenza equivalente del bipolo B'C', è già stata ottenuta:

$$Z_0 = \frac{R + \alpha\beta j\omega L}{1 + \beta}$$

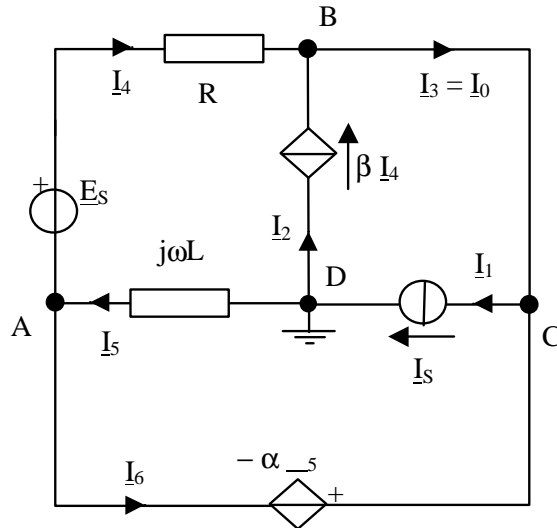


Figura 3.i

La soluzione del circuito di figura 3.i, finalizzata alla determinazione della corrente  $I_0$  tra i terminali B' e C' si può effettuare con uno qualsiasi dei metodi precedentemente illustrati. Ad esempio, utilizzando il metodo dei Tagli Fondamentali si ottiene il seguente sistema di  $R - N + 1 + (\text{Numero di componenti non controllati in corrente}) = 5$  equazioni.

$$\begin{aligned}
 & \underline{V}_1 + j\omega L(\underline{I}_S - \underline{I}_2) + \underline{V}_6 = 0 \\
 (R - N + 1 = 3 \text{ equazioni LKT}_m) & \quad \underline{V}_2 - R(\underline{I}_0 - \underline{I}_2) + \underline{E}_S - j\omega L(\underline{I}_S - \underline{I}_2) = 0 \\
 & \quad -\underline{V}_6 - \underline{E}_S + R(\underline{I}_0 - \underline{I}_2) = 0
 \end{aligned} \tag{20.i}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{equazione costitutive dei componenti non controllati in corrente}) & \quad \underline{I}_2 = \beta(\underline{I}_0 - \underline{I}_2) \\
 & \quad \underline{V}_6 = \alpha j\omega L(\underline{I}_S - \underline{I}_2)
 \end{aligned} \tag{20.ii}$$

Risolvendo le (20) il valore della corrente  $I_0$  risulta essere:

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{E}_S + \alpha j\omega L \underline{I}_S}{\frac{R + \alpha \beta j\omega L}{1 + \beta}} = \frac{\underline{E}_S + \alpha j\omega L \underline{I}_S}{\underline{Z}_0} \tag{21}$$

Infine il valore della corrente  $I_3$  viene ottenuto risolvendo il circuito illustrato nella figura 3.j, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo circuito equivalente di Norton. In questo caso, la corrente  $I_3$  risulta essere:

$$\underline{I}_3 = j\omega C \frac{\underline{I}_0}{j\omega C + \frac{1}{\underline{Z}_0}} = \frac{\underline{Z}_0 \underline{I}_0}{\underline{Z}_0 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\underline{E}_S + \alpha j\omega L \underline{I}_S}{\frac{1}{j\omega C} + \frac{R + \alpha \beta j\omega L}{1 + \beta}}$$

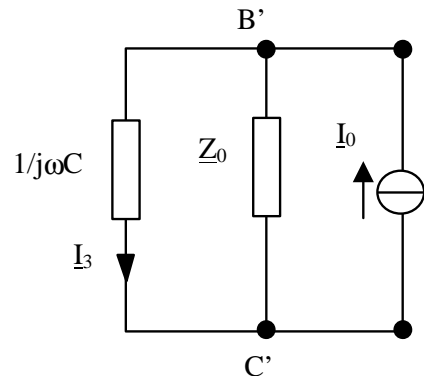
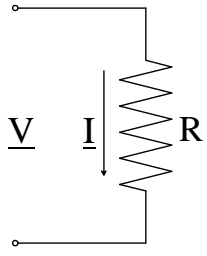
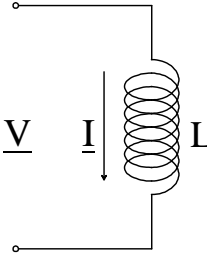
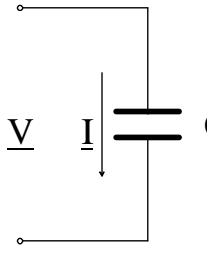
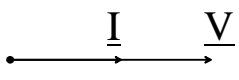


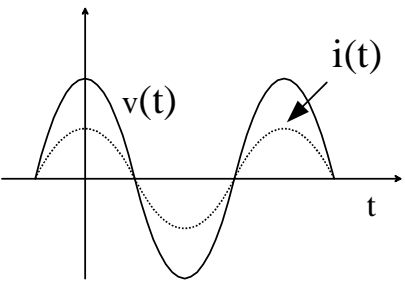
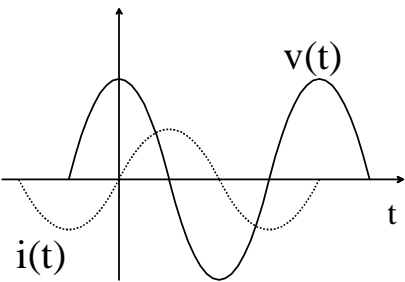
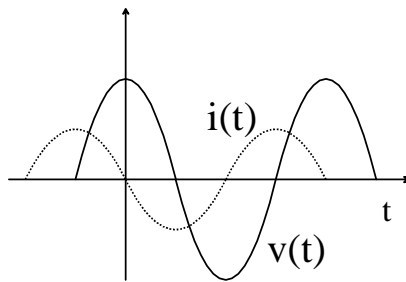


Figura 3.j

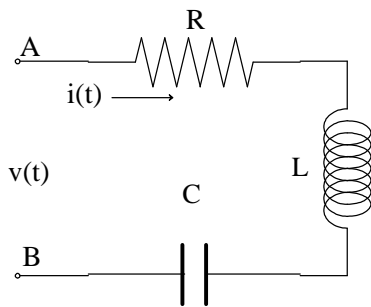
## STUDIO DI CIRCUITI ELEMENTARI

Si considerino i tre semplici circuiti raffigurati in figura 4. Per la soluzione di tali circuiti è sufficiente l'applicazione della legge di Ohm simbolica (5). La tabella riassume i risultati ottenuti. La tensione è stata scelta come riferimento di fase, cosicché  $\alpha_V = 0$ ; lo sfasamento è quindi  $\varphi = -\alpha_I$ . Gli sfasamenti tra fasori sono illustrati in figura 5. L'andamento delle corrispondenti grandezze sinusoidali è mostrato in figura 6.

		
<i>Figura 4.a</i>	<i>Figura 4.b</i>	<i>Figura 4.c</i>
$Z = R$	$Z = j\omega L$	$Z = -j/\omega C$
$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{R} = \frac{V}{R}$	$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{j\omega L} = \frac{V}{\omega L} e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{-j/\omega C} = V\omega C e^{j\frac{\pi}{2}}$
La corrente simbolica $\underline{I}$ è un numero reale in fase con $\underline{V}$ :	La corrente simbolica $\underline{I}$ è un numero immaginario in quadratura in ritardo rispetto a $\underline{V}$ :	La corrente simbolica $\underline{I}$ è un numero immaginario in quadratura in anticipo rispetto a $\underline{V}$ :
$I = \frac{V}{R}, \varphi = 0$	$I = \frac{V}{\omega L}, \varphi = \pi/2$	$I = V\omega C, \varphi = -\pi/2$
		
<i>Figura 5.a</i>	<i>Figura 5.b</i>	<i>Figura 5.c</i>
		
<i>Figura 6.a</i>	<i>Figura 6.b</i>	<i>Figura 6.c</i>

## RISONANZA

Si consideri il circuito mostrato in figura 7. Vengono riportate inoltre le espressioni già viste per il modulo della corrente e per lo sfasamento, mettendo in evidenza la dipendenza di tali grandezze dalla pulsazione  $\omega$ :



$$I(\omega) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Figura 7.

Si riconosce che, per  $R, L, C$  e  $V$  fissate, esiste una pulsazione  $\omega_0$  per cui la reattanza si annulla:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (22)$$

La pulsazione  $\omega_0$  è detta **pulsazione di risonanza**. Ad essa corrisponde la corrente massima in modulo e con sfasamento nullo. In condizioni di risonanza il comportamento del circuito è resistivo, poiché le cadute reattive si compensano a vicenda (vedi diagramma vettoriale).

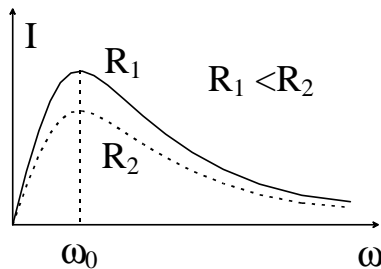


Figura 8.

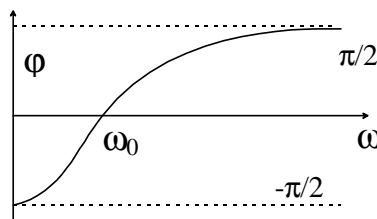


Figura 9.

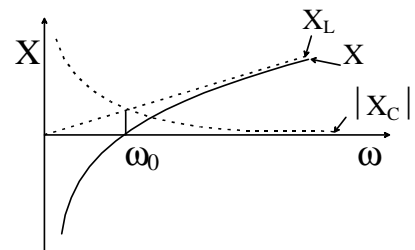


Figura 10.

In figura 8 è rappresentato l'andamento del modulo della corrente in funzione della pulsazione per due diversi valori della resistenza. Nell'ipotetico caso in cui la resistenza del ramo fosse nulla, il modulo della corrente avrebbe un asintoto per  $\omega = \omega_0$ . Per  $\omega \rightarrow 0$ , la reattanza capacitiva  $X_C \rightarrow \infty$ : la corrente continua è bloccata dal condensatore. Per  $\omega \rightarrow \infty$ , la reattanza induttiva  $X_L \rightarrow \infty$ : gli effetti induttivi tendono a bloccare la corrente ad alte frequenze. Nelle figure 9 e 10 sono rappresentati rispettivamente lo sfasamento e la reattanza in funzione della pulsazione. Per  $\omega < \omega_0$ , la reattanza capacitiva prevale su quella induttiva, e lo sfasamento  $\varphi < 0$ ; viceversa, per  $\omega > \omega_0$  la reattanza induttiva prevale su quella capacitiva e  $\varphi > 0$  (vedi diagrammi vettoriali). In figura 11 sono illustrati i diagrammi delle tensioni sul piano di Gauss. Nel caso considerato, la legge di Ohm simbolica si può scrivere:

$$\underline{V} = R\underline{I} + jX_L\underline{I} + jX_C\underline{I}$$

dove sono state evidenziate le cadute di tensione dovute rispettivamente alla resistenza  $R$ , alla reattanza induttiva  $X_L = \omega L$  ed alla reattanza capacitiva  $X_C = -1/\omega C$ .

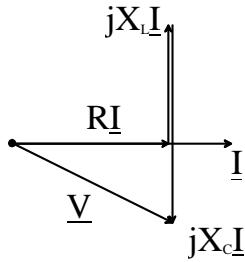


Figura 11.a - Per  $\omega < \omega_0$  la reattanza capacitiva prevale su quella induttiva.

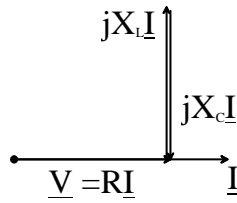


Figura 11.b. - Per  $\omega = \omega_0$ , la reattanza capacitiva e quella induttiva si compensano.

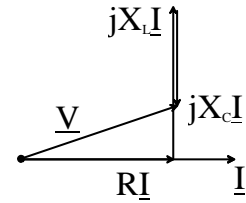


Figura 11.c. - Per  $\omega > \omega_0$ , la reattanza induttiva prevale su quella capacitiva.

### ANTIRISONANZA

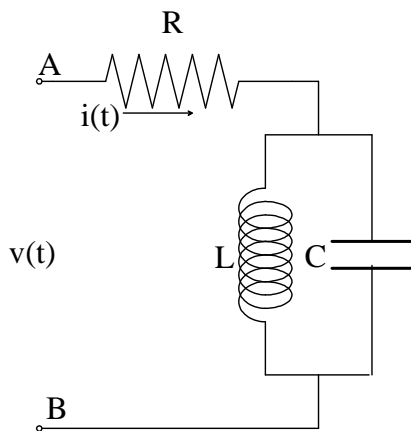


Figura 12.

Si consideri ora il circuito mostrato in figura 12, in cui figurano un'induttanza ed una capacità in parallelo. In base all'equivalenza formale tra equazioni di Kirchhoff in c.c. ed in c.a., le regole di composizione per resistenze in parallelo possono essere estese anche al parallelo di impedenze. E' quindi possibile esprimere l'impedenza  $\underline{Z}_{LC}$  equivalente al parallelo tra le due impedenze  $\underline{Z}_L$  e  $\underline{Z}_C$  nella forma:

$$\underline{Z}_{LC} = \frac{\underline{Z}_L \underline{Z}_C}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = -j \frac{L/C}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} \quad (23)$$

La corrente che passa attraverso la resistenza R è quindi pari a:

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{R + \underline{Z}_{LC}} \quad (24)$$

Da cui possiamo dedurre le espressioni per il modulo della corrente e per lo sfasamento, mettendo in evidenza la dipendenza di tali grandezze dalla pulsazione  $\omega$

$$I(\omega) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \frac{L^2/C^2}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}}$$

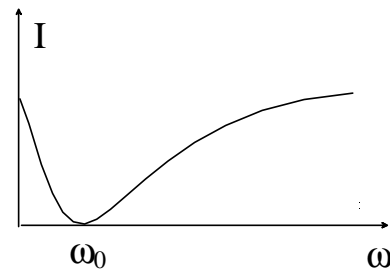


Figura 13.a

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{L/C}{R \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

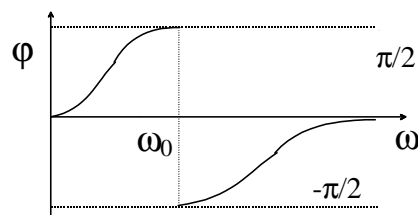


Figura 13.b



Le correnti del ramo induttivo e capacitivo sono pari a:

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{V} - R\underline{I}}{j\omega L} \quad (25) \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{V} - R\underline{I}}{-j/\omega C} \quad (26)$$

Esiste una pulsazione  $\omega_0$ , detta **pulsazione di antirisonanza**, che rende infinita l'impedenza equivalente  $\underline{Z}_{LC}$  e, conseguentemente, annulla la corrente  $\underline{I}$ :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (27)$$

Mentre la corrente di alimentazione  $\underline{I}$  è nulla le correnti  $\underline{I}_L$  e  $\underline{I}_C$  risultano diverse da zero:

$$\underline{I}_L = -j\sqrt{\frac{C}{L}}\underline{V} = -\underline{I}_C$$

Si instaura cioè un regime periodico di scambio energetico tra il condensatore e l'induttanza. In assenza di dispersioni e di resistenze, la circolazione nella maglia costituita dall'induttanza e dal condensatore continua indefinitamente.

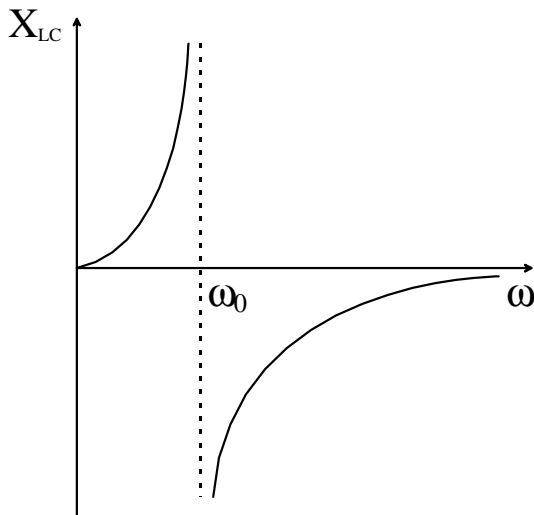


Figura 13.c

In figura 13.c è raffigurato l'andamento della reattanza equivalente del parallelo induttanza - condensatore.

Per  $\omega < \omega_0$  la reattanza è positiva, ed il circuito ha un comportamento prevalentemente ohmico - induttivo con uno sfasamento positivo. Per basse frequenze la corrente fluisce prevalentemente nel ramo induttivo, che quindi caratterizza maggiormente il comportamento del circuito. Al limite, per  $\omega = 0$ , la corrente  $\underline{I}_C$  e la reattanza induttiva  $X_L$  si annullano, mentre  $X_C$  va all'infinito.

Per  $\omega > \omega_0$  la reattanza è negativa, ed il circuito ha prevalentemente una caratteristica ohmico - capacitiva, con sfasamento negativo. Per alte frequenze la corrente fluisce maggiormente per il ramo capacitivo. Quando  $\omega \rightarrow \infty$  la corrente  $\underline{I}_L$  e la reattanza capacitiva  $X_C$  si annullano, mentre  $X_L$  tende all'infinito.

## POTENZE IN CORRENTE ALTERNATA

### POTENZA ISTANTANEA

Si faccia riferimento all'utilizzatore  $U$  in figura 14, alimentato tramite la coppia di morsetti AB da una tensione sinusoidale:

$$v(t) = V_M \cos(\omega t)$$

associata ad una corrente d'alimentazione:

$$i(t) = I_M \cos(\omega t - \phi)$$

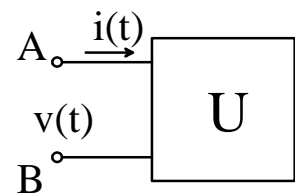


Figura 14.

Si definisce potenza istantanea il prodotto:

$$p(t) = v(t)i(t) \quad (28)$$

La corrente  $i(t)$  può essere scomposta nelle due componenti  $i_a$  e  $i_r$ , dette rispettivamente corrente **attiva** e **reattiva**. La corrente attiva è quindi la componente della corrente in fase con la tensione, mentre la corrente reattiva è la componente in quadratura. Si può dunque scrivere:

$$i_a(t) = I_M \cos(\omega t) \cos \varphi \quad (29) \quad i_r(t) = I_M \sin(\omega t) \sin \varphi \quad (30) \quad i = i_a + i_r \quad (31)$$

La potenza istantanea diventa quindi:

$$p(t) = v(t)i_a(t) + v(t)i_r(t) = p_a(t) + p_r(t) \quad (32)$$

dove<sup>(o)</sup>:

$$p_a(t) = v(t)i_a(t) = V_M I_M \cos \varphi \cos^2(\omega t) = \frac{V_M I_M}{2} \cos \varphi [1 + \cos(2\omega t)] \quad (33)$$

$$p_r(t) = v(t)i_r(t) = V_M I_M \sin \varphi \sin(\omega t) \cos(\omega t) = \frac{V_M I_M}{2} \sin \varphi \sin(2\omega t) \quad (34)$$

Gli andamenti delle grandezze  $p_a$  e  $p_r$ , dette rispettivamente **potenza istantanea attiva** e **potenza istantanea reattiva**, sono mostrati nelle figure 15 e 16.

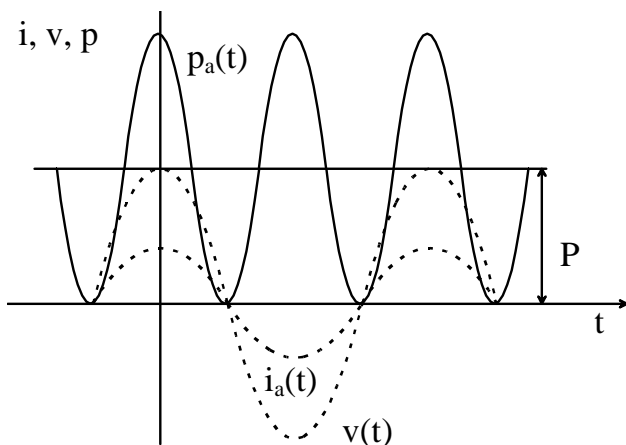


Figura 15. - Potenza istantanea attiva.

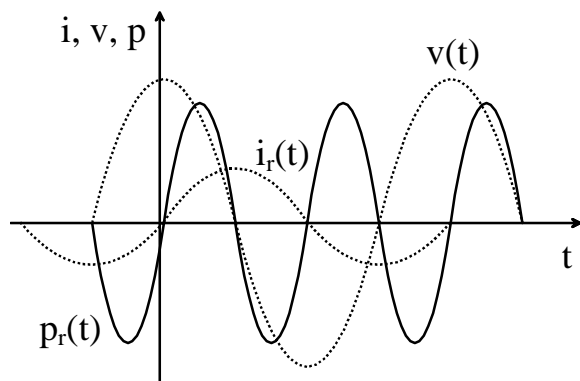


Figura 16. - Potenza istantanea reattiva.

### POTENZA ATTIVA

Si riconosce che la potenza istantanea attiva non cambia mai segno, e rappresenta quindi un flusso unidirezionale di energia. Il suo integrale su un periodo  $T$  è quindi, di norma, diverso da zero. Si definisce **potenza attiva**  $P$  il valore medio in un periodo dalla potenza istantanea:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (35)$$

È immediato verificare che il valore medio della potenza istantanea coincide col valore medio della potenza attiva istantanea: infatti, la potenza reattiva istantanea è una grandezza sinusoidale e, di conseguenza ha valore medio nullo. Si ha quindi:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_a(t) dt = \frac{V_M I_M}{T} \cos \varphi \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{V_M I_M}{2} \cos \varphi$$

E, introducendo i valori efficaci di corrente e tensione:

$$P = VI \cos \varphi \quad (36)$$

<sup>(o)</sup> Si ricordi che  $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ ;  $\cos(2x) = \cos^2(x) - 1$ .

La potenza attiva è quindi valutabile come il prodotto del valore efficace della tensione, il valore efficace della corrente e del **fattore di potenza**  $\cos\varphi$ .

### POTENZA COMPLESSA

La potenza complessa  $\underline{N}$  è definita dalla seguente relazione:

$$\underline{N} = \underline{V} \underline{I}^* \quad (37)$$

dove  $\underline{I}^*$  è il complesso coniugato di  $\underline{I}$ . Si ha quindi:

$$\underline{N} = V e^{j\alpha_v} I e^{-j\alpha_i} = V I e^{j\varphi}$$

e, ricordando la formula di Eulero:

$$\underline{N} = V I \cos \varphi + j V I \sin \varphi \quad (38)$$

Risulta così provato, ricordando la (36), che la parte reale della potenza complessa risulta essere pari alla potenza attiva:

$$\Re(\underline{N}) = P = V I \cos \varphi \quad (39)$$

La parte immaginaria della potenza complessa viene chiamata **potenza reattiva** e nel caso di un bipolo ha la seguente espressione:

$$Q = \Im(\underline{N}) = V I \sin \varphi \quad (40)$$

Dalla (40) si può notare che un bipolo assorbe potenza reattiva solo quando la corrente è sfasata rispetto alla tensione ( $\varphi \neq 0$ ), ed è quindi presente una componente reattiva della corrente stessa (vedi eq. 30). Ciò avviene quando il componente è in grado di immagazzinare energia senza dissiparla, come, ad esempio in un induttore od in un condensatore; la potenza reattiva è quindi un indicatore di uno scambio di energia di tipo conservativo, che in alcuni casi, che saranno esposti nel paragrafo relativo al problema del rifasamento, è necessario limitare il più possibile.

Il modulo  $N$  della potenza complessa è detto **potenza apparente**:

$$N = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (41)$$

Si consideri ora un generico ramo di circuito caratterizzato da un'impedenza  $\underline{Z}$ . Tenendo conto della legge di Ohm simbolica (5), la (37) può essere riscritta come segue:

$$\underline{N} = \underline{Z} \underline{I} \underline{I}^* = \underline{Z} I^2 = R I^2 + j X I^2 \quad (42)$$

Confrontando la (42) con la (39) e la (40) si ottiene:

$$P = R I^2 \quad (43)$$

$$Q = X I^2 \quad (44)$$

In base alla definizione di corrente efficace  $I$  si ricava subito che la potenza attiva è pari alla media su un periodo della potenza dissipata per effetto Joule sulla resistenza  $R$ , unico componente in grado di assorbire energia senza restituirla. La potenza reattiva dipende invece esclusivamente dalla reattanza, cioè dai componenti in grado di immagazzinare energia conservativa (elettrostatica nei condensatori, magnetica nelle induttanze) e di restituirla.

Si noti che, mentre la potenza attiva assorbita dall'impedenza  $\underline{Z}$  è sempre positiva, il segno della potenza reattiva dipende dalla reattanza prevalente nel ramo.  $Q$  è quindi positiva per reattanze prevalentemente induttive ( $Q = \omega L I^2$  per una reattanza puramente induttiva), e negativa per reattanze prevalentemente capacitive ( $Q = -I^2/\omega C$  per una reattanza puramente capacitiva).

### ADDITIVITÀ DELLE POTENZE

Dalle equazioni (10) ed (11) segue, come corollario del Teorema di Tellegen, l'additività delle potenze in regime sinusoidale. Infatti, per un dato circuito, preso un qualsiasi vettore di numeri complessi rappresentativi di tensioni di ramo  $\underline{\mathbf{V}}_1$ , che soddisfi le LKT per quel circuito, ed un vettore di numeri complessi rappresentativi di correnti di ramo  $\underline{\mathbf{I}}_2$ , che soddisfi le LKC per quel circuito, vale la seguente relazione:

$$\underline{\mathbf{V}}_1^T \underline{\mathbf{I}}_2^* = 0 \quad (45)$$

Infatti, si ha

$$\underline{\mathbf{V}}_1^T \underline{\mathbf{I}}_2^* = (\mathbf{A}^T \underline{\mathbf{E}}_1)^T \underline{\mathbf{I}}_2^* = \underline{\mathbf{E}}_1^T \mathbf{A} \underline{\mathbf{I}}_2^* = \underline{\mathbf{E}}_1^T (\mathbf{A} \underline{\mathbf{I}}_2)^* = \underline{\mathbf{E}}_1^T \mathbf{0} = 0$$

Se si applica la (45) considerando i vettori di numeri complessi rappresentativi delle tensioni e delle correnti che effettivamente sono presenti nel circuito, si ottiene la relazione (46) che, sulla base della definizione (37), mostra come la potenza complessa assorbita da tutti i componenti del circuito risulti in ogni istante nulla.

$$\underline{\mathbf{V}}^T \underline{\mathbf{I}}^* = \underline{\mathbf{V}}_1^T \underline{\mathbf{I}}_1^* + \underline{\mathbf{V}}_2^T \underline{\mathbf{I}}_2^* + \dots = \underline{\mathbf{N}}_1 + \underline{\mathbf{N}}_2 + \dots = 0 \quad (46)$$

Si consideri ora il circuito schematizzato in figura 17, alimentato tramite la coppia di morsetti AB da una tensione sinusoidale  $v(t)$  rappresentata dal numero complesso  $\underline{\mathbf{V}}$ . Il circuito è composto da  $m$  rami che si incontrano in  $n$  nodi. Assumendo che in ogni ramo i versi positivi di riferimento della tensione e della corrente di ramo siano associati, indicando con  $\underline{\mathbf{N}}_h$  la potenza reattiva assorbita dal generico ramo  $h$  e con  $\underline{\mathbf{V}}_h$  ed  $\underline{\mathbf{I}}_h$  i fasori rappresentativi della tensione e della corrente di ramo, risulta (dato che  $\underline{\mathbf{V}}_1^T \underline{\mathbf{I}}_1^* + \underline{\mathbf{V}}_2^T \underline{\mathbf{I}}_2^* + \dots + \underline{\mathbf{V}}_{BA}^T \underline{\mathbf{I}}^* = 0$ ):

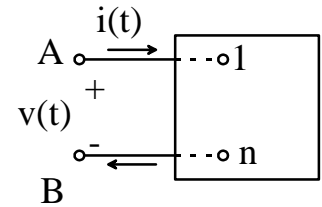


Figura 17.

$$\sum_{h=1}^m \underline{\mathbf{N}}_h = \sum_{h=1}^m \underline{\mathbf{V}}_h \underline{\mathbf{I}}_h^* = -\underline{\mathbf{V}}_{BA} \underline{\mathbf{I}}^* = \underline{\mathbf{V}}_{AB} \underline{\mathbf{I}}^* = \underline{\mathbf{N}}$$

Si può quindi affermare che: *la potenza complessa  $\underline{\mathbf{N}}$  fornita al circuito attraverso la coppia di morsetti AB è pari alla somma delle potenze complesse  $\underline{\mathbf{N}}_h$  assorbite da tutti i rami del circuito.* Nel caso in cui ciascun ramo sia costituito da una impedenza in serie con un generatore di tensione, avendo indicato con  $\underline{\mathbf{N}}_{g,i}$  la potenza complessa erogata dal generatore presente sul ramo  $i$ , e con  $\underline{\mathbf{Z}}_i$  l'impedenza in serie a tale generatore, segue:

$$\underline{\mathbf{N}} + \sum_{i=1}^m \underline{\mathbf{N}}_{g,i} = \sum_{i=1}^m \underline{\mathbf{Z}}_i \underline{\mathbf{I}}_i^2 \quad (47)$$

Eguagliando le parti reali e le parti immaginarie della relazione (47) si ottiene:

$$P + \sum_{i=1}^m P_{g,i} = \sum_{i=1}^m R_i \underline{\mathbf{I}}_i^2, \quad (48)$$

$$Q + \sum_{i=1}^m Q_{g,i} = \sum_{i=1}^m X_i \underline{\mathbf{I}}_i^2. \quad (49)$$

La (48) esprime il fatto che la potenza attiva fornita dalla coppia di morsetti AB ( $P = VI \cos\phi$ ) più la somma delle potenze attive fornite dai generatori è pari alla somma delle potenze attive assorbite dalle impedenze dei rami del circuito e dissipate per effetto Joule. Analogamente, la potenza reattiva fornita dalla coppia di morsetti AB ( $Q = VI \sin\phi$ ) più la somma delle potenze reattive fornite dai generatori è pari alla somma delle potenze reattive assorbite dalle impedenze dei rami del circuito.

## TEOREMA DEL MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA

Nella figura 18 è rappresentato schematicamente un bipolo che alimenta un carico  $\underline{Z}_L$ . Si faccia l'ipotesi che il circuito sia in regime sinusoidale isofrequenziale. Si vuole determinare l'impedenza di carico  $\underline{Z}_L$  che rende massima la potenza attiva ricevuta dal carico. Questo problema si presenta nel progetto di ogni amplificatore: si deve scegliere l'impedenza di ingresso che rende massima la potenza ricevuta.

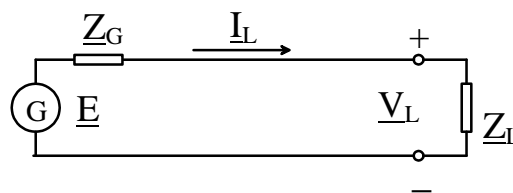


Figura 18.

La potenza attiva assorbita dal carico si calcola immediatamente, avendo posto:

$$\underline{Z}_G = R_G + j X_G \qquad \underline{Z}_L = R_L + j X_L$$

Risulta infatti:

$$P_L = R_L |\underline{I}_L|^2 = R_L \frac{E^2}{|\underline{Z}_L + \underline{Z}_G|^2} = R_L \frac{E^2}{(R_L + R_G)^2 + (X_L + X_G)^2}$$

Poiché  $E$ ,  $R_G$  e  $X_G$  sono assegnati, si tratta di determinare quali valori di  $R_L$  e  $X_L$  rendono massima la  $P_L$ . Una prima osservazione è che, relativamente ad  $X_L$ , il denominatore è certamente minimo quando  $X_L = -X_G$ . Per quanto riguarda la  $R_L$ , è sufficiente annullare la derivata della  $P_L$  rispetto ad  $R_L$ :

$$\frac{dP_L}{dR_L} = E^2 \left[ \frac{1}{(R_L + R_G)^2} - \frac{2R_L}{(R_L + R_G)^3} \right] = \frac{(R_L - R_G)E^2}{(R_L + R_G)^3} = 0 \Rightarrow R_L = R_G$$

Si è ricavato quindi il seguente **Teorema del massimo trasferimento di potenza**: *Sia assegnato un bipolo funzionante in regime sinusoidale isofrequenziale, specificato dal suo circuito equivalente di Thevenin, che alimenti una impedenza di carico  $\underline{Z}_L$ . Tale impedenza riceve dal bipolo la massima potenza attiva se, e solo se:*

$$\underline{Z}_L = \underline{Z}_G^*$$

In tal caso si dice che il carico è adattato al bipolo e la potenza attiva (massima) fornita al carico è  $P_{L,MAX} = E^2/4R_G$ . Si noti che anche se il carico è adattato al bipolo, solo il 50% dell'energia del generatore fluisce nel carico e quindi il rendimento è pari a 0.5. Infatti, introducendo il rendimento si ha:

$$\eta = \frac{P_u}{P_u + P_d} = \frac{R_L I_L^2}{R_L I_L^2 + R_G I_L^2} = \frac{R_L}{R_L + R_G} = \frac{1}{1 + (R_G/R_L)}$$

dove  $P_u$  è la potenza utile e  $P_d$  la potenza dissipata. Si noti che il rendimento può essere reso arbitrariamente vicino ad uno facendo aumentare la  $R_L$ . In tal caso però la potenza assorbita dal carico tende a zero.

## RIFASAMENTO

Nella figura 19 è rappresentato schematicamente un generatore di tensione in c.a.  $G$  che alimenta, tramite una linea di lunghezza  $L$ , un utilizzatore  $U$ . La lunghezza della linea è tale che è possibile schematizzarla mediante una impedenza di linea  $\underline{Z}_L$  ( $\underline{Z}_L = R_L + j X_L$ ) Conseguentemente la tensione  $\underline{V}$  di ingresso dell'utilizzatore  $U$  è pari a:

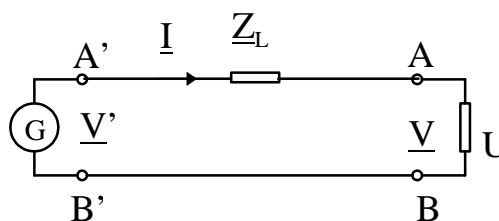


Figura 19.

$$\underline{V} = \underline{V}' - \underline{Z}_L \underline{I}$$

A causa della caduta di tensione  $\underline{Z}_L \underline{I}$  la tensione  $\underline{V}$  non è uguale a  $\underline{V}'$ , e soprattutto varia a seconda dell'utilizzatore. Alla resistenza di linea è inoltre associata una potenza dissipata per effetto Joule:

$$P_d = R_L I^2$$

Tali effetti possono essere limitati riducendo la corrente di linea quando questo è possibile.

Esistono degli utilizzatori che, essendo caratterizzati da un fattore di potenza ( $\cos\phi$ ) basso necessitano di elevati valori di corrente per assorbire la potenza nominale per cui sono stati progettati. Infatti, dalla (27) si ha:

$$I = \frac{P}{V \cos\phi}$$

Tanto più basso è il fattore di potenza, tanto maggiore è, a parità di tensione e potenza assorbita, la corrente di alimentazione. Un rimedio a tale situazione si può ottenere **rifasando** l'utilizzatore, cioè disponendo in parallelo ad esso un opportuna reattanza. Il tipo di reattanza dipende dallo sfasamento dell'utilizzatore: occorre un condensatore se  $\phi > 0$ , un induttore se  $\phi < 0$ .

Si faccia riferimento al caso più frequente in cui  $\phi > 0$  (vedi figura 20). Il diagramma delle correnti si ricava facilmente tenendo conto che:

$$\underline{I}_L = \underline{I} + \underline{I}_C$$

e che  $\underline{I}_C$  è in quadratura in anticipo rispetto a  $\underline{V}$ . Da tale diagramma (vedi figura 21) si vede come sia possibile ridurre in maniera considerevole la corrente di linea. La presenza del condensatore in parallelo ad U rende in teoria possibile annullare lo sfasamento  $\phi'$  del blocco condensatore - utilizzatore (rifasamento completo). In realtà il rifasamento completo è raramente necessario, è sufficiente che l'angolo  $\phi'$  assuma un valore prefissato convenientemente piccolo. Dalla (39) e dalla (40) si ottiene:

$$Q = P \tan\phi \quad (50) \quad Q + Q_c = P \tan\phi' \quad (51)$$

dove P, Q,  $Q_c$  sono rispettivamente la potenza attiva assorbita dal utilizzatore, la potenza reattiva assorbita dall'utilizzatore e la potenza reattiva assorbita dalla capacità. La (51) è stata ottenuta tenendo conto che la potenza attiva assorbita dal condensatore è nulla. Sottraendo membro a membro la (51) dalla (50) si ottiene:

$$Q_c = P (\tan\phi' - \tan\phi) \quad (52)$$

Tenendo conto che:  $Q_c = X_c I_c^2 = -I_c^2/\omega C = -(\omega C V)^2/\omega C = -\omega C V^2$ , dalla (52) si ricava:

$$C = \frac{P}{\omega V^2} (\tan\phi - \tan\phi') \quad (53)$$

che consente di calcolare la capacità C del condensatore fissato l'angolo  $\phi'$ .

La funzione del condensatore di rifasamento può essere spiegata intuitivamente: esso rappresenta un componente in grado di scambiare alternativamente energia con l'utilizzatore. La presenza del condensatore, diminuendo la potenza reattiva vista dal generatore, riduce quindi lo scambio alternativo di energia lungo la linea.

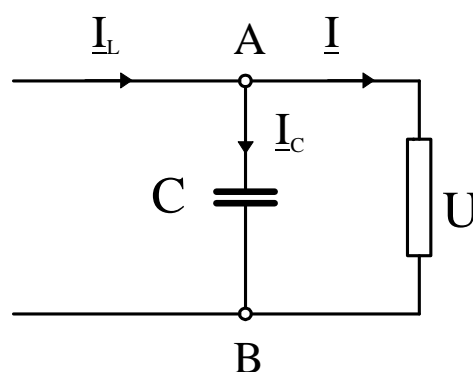


Figura 20.

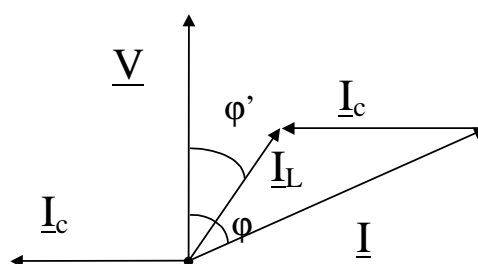
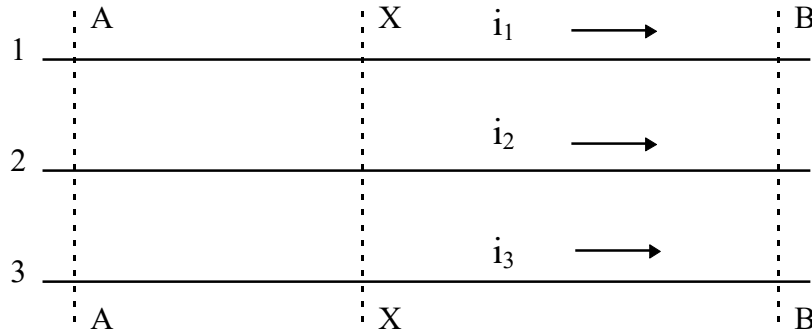


Figura 21.

## SISTEMI TRIFASE

I sistemi trifase sono schematizzabili come nella figura 1. Non si fa nessuna ipotesi né sul generatore di alimentazione situato prima della sezione A-A, né sull'utilizzatore situato dopo la sezione B-B.



*Figura 1. - Schema di linea trifase*

Per una generica sezione X-X valgono le seguenti relazioni:

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0 \quad (1)$$

$$v_{12}(t) + v_{23}(t) + v_{31}(t) = 0 \quad (2)$$

Le equazioni (1) e (2) sono relative ai valori istantanei delle **correnti di linea**  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$ ,  $i_3(t)$  e delle **tensioni concatenate**  $v_{12}(t)$ ,  $v_{23}(t)$ ,  $v_{31}(t)$  avendo posto  $v_{hk}$  = tensione tra il filo h ed il filo k. Utilizzando la notazione simbolica di Steinmetz le (1), (2) si scrivono come:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \quad (3)$$

$$\underline{V}_{12} + \underline{V}_{23} + \underline{V}_{31} = 0 \quad (4)$$

Casi particolari di notevole importanza sono i seguenti:

- **Sistemi trifase simmetrici:**  $|\underline{V}_{12}| = |\underline{V}_{23}| = |\underline{V}_{31}| = V$ .
- **Sistemi trifase equilibrati:**  $|\underline{I}_1| = |\underline{I}_2| = |\underline{I}_3| = I$ .

Nei sistemi trifase simmetrici le tensioni concatenate, rappresentate sul piano di Gauss, formano un triangolo equilatero e risultano sfasate, l'una rispetto alla precedente (nell'ordine  $\underline{V}_{12}$ ,  $\underline{V}_{23}$ ,  $\underline{V}_{31}$ ) di un angolo pari a  $2\pi/3$ . A seconda che lo sfasamento sia negativo (rotazione in senso orario) o positivo (rotazione in senso antiorario), si parla rispettivamente di sistema simmetrico diretto (vedi figura 2) oppure di sistema simmetrico inverso (vedi figura 3). Invertendo l'ordine dei fili 2 e 3 è possibile trasformare un sistema diretto in un sistema inverso e viceversa. Se si indica con  $\alpha$  il numero complesso  $e^{j2\pi/3}$  risulta:

- sistema di tensioni concatenate simmetrico e diretto:  $(\underline{V}_{12}, \alpha^2 \underline{V}_{12}, \alpha \underline{V}_{12})$
- sistema di tensioni concatenate simmetrico e inverso:  $(\underline{V}_{12}, \alpha \underline{V}_{12}, \alpha^2 \underline{V}_{12})$ .

Nel seguito, tranne precisazione contraria, supporremo sempre che:

1. - I sistemi trifase siano simmetrici e diretti;
2. - La linea di trasmissione tra generatore ed utilizzatore non dia luogo a cadute di tensione in modo da potere considerare in ogni sezione della linea la stessa terna di tensioni concatenate.

**Sistema trifase simmetrico diretto**

**Sistema trifase simmetrico inverso**

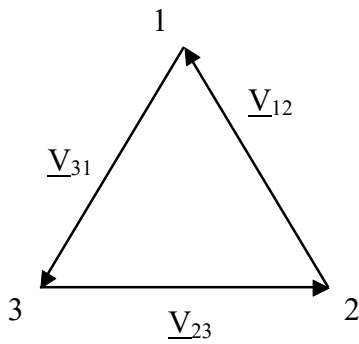


Figura 2

$$\underline{V}_{23} = \underline{V}_{12} e^{-j2\pi/3}$$

$$\underline{V}_{31} = \underline{V}_{12} e^{-j4\pi/3}$$

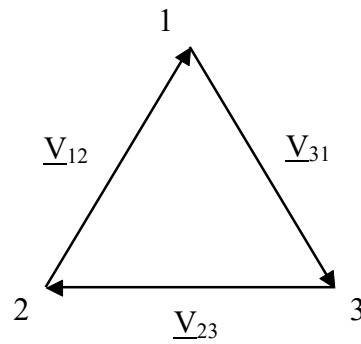


Figura 3

$$\underline{V}_{23} = \underline{V}_{12} e^{j2\pi/3}$$

$$\underline{V}_{31} = \underline{V}_{12} e^{j4\pi/3}$$

L'ipotesi 1 è dovuta al fatto che il generatore trifase può essere schematizzato come tre generatori di tensione monofase isofrequenziali con lo stesso valore efficace ma sfasati di  $2\pi/3$  (vedi figura 4). Se lo sfasamento è negativo, come indicato nella figura 4, le tensioni concatenate risultano essere una terna diretta.

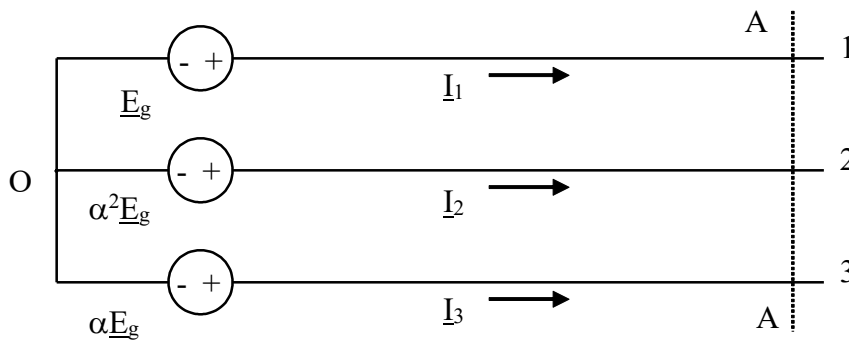


Figura 4. - Schema di generatore trifase

In generale, data una terna qualsiasi di tensioni concatenate  $\underline{V}_{12}$ ,  $\underline{V}_{23}$ ,  $\underline{V}_{31}$ , si definiscono le tensioni principali di fase, o tensioni stellate, le tensioni  $\underline{E}_{10}$ ,  $\underline{E}_{20}$ ,  $\underline{E}_{30}$  che soddisfano le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \underline{E}_{10} - \underline{E}_{20} &= \underline{V}_{12} \\ \underline{E}_{20} - \underline{E}_{30} &= \underline{V}_{23} \\ \underline{E}_{10} + \underline{E}_{20} + \underline{E}_{30} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

**Se la terna di tensioni concatenate è simmetrica e diretta anche la terna delle tensioni principali di fase risulta simmetrica e diretta** (vedi figura 5).

Il valore efficace  $E$  delle tensioni principali di fase risulta in questo caso ridotto di un fattore pari a  $\sqrt{3}$  rispetto al valore efficace  $V$  delle tensioni concatenate:

$$E = \frac{V}{\sqrt{3}} \quad (6)$$

Nel seguito si supporrà sempre il sistema delle tensioni concatenate simmetrico e diretto.

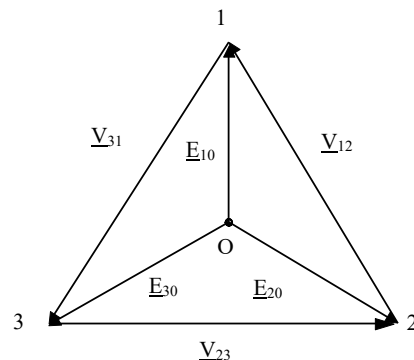


Figura 5 Tensioni principali di fase per un sistema simmetrico e diretto

## POTENZA NEI SISTEMI TRIFASE



La potenza istantanea assorbita da un utilizzatore trifase U qualsiasi (vedi figura 6) ha la seguente espressione:

$$p(t) = v_{10}(t)i_1(t) + v_{20}(t)i_2(t) + v_{30}(t)i_3(t) \quad (7)$$

dove  $v_{10}$ ,  $v_{20}$  e  $v_{30}$  sono rispettivamente le tensioni dei terminali 1, 2 e 3 rispetto ad un qualsiasi terminale O preso come riferimento. Si dimostra infatti che, dato che le correnti  $i_1$ ,  $i_2$  ed  $i_3$  soddisfanno la LKC ( $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ ) e le tensioni  $v_{10}$ ,  $v_{20}$  e  $v_{30}$  soddisfanno la LKT ( $v_{12} = v_{10} - v_{20}$ ,  $v_{23} = v_{20} - v_{30}$ ,  $v_{31} = v_{30} - v_{10}$ ), la potenza  $p(t)$  data dalla espressione (7) non dipende dal particolare terminale O preso come riferimento:

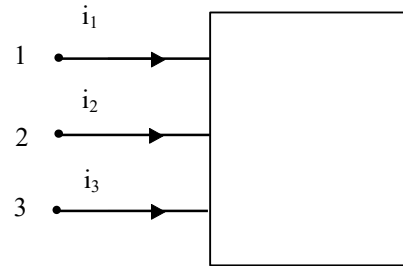


Figura 6

$$\begin{aligned} p(t) &= e_{10}(t) i_1(t) + e_{20}(t) i_2(t) + e_{30}(t) i_3(t) \\ p(t) &= v_{10}(t) i_1(t) + v_{20}(t) i_2(t) + v_{30}(t) (-i_1(t) - i_2(t)) = v_{13}(t) i_1(t) + v_{23}(t) i_2(t) \\ p(t) &= v_{10}(t) i_1(t) + v_{30}(t) i_3(t) + v_{20}(t) (-i_1(t) - i_3(t)) = v_{12}(t) i_1(t) + v_{32}(t) i_3(t) \\ p(t) &= v_{20}(t) i_2(t) + v_{30}(t) i_3(t) + v_{10}(t) (-i_2(t) - i_3(t)) = v_{21}(t) i_2(t) + v_{31}(t) i_3(t) \end{aligned} \quad (8)$$

Il valore medio in un periodo della potenza assorbita prende il nome di **potenza attiva** e viene indicato normalmente col simbolo P:

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt \quad (9)$$

La **potenza complessa** assorbita dal carico viene definita, con riferimento ad un terminale O arbitrario, dalla seguente relazione:

$$\underline{N} = \underline{V}_{10} \underline{I}_1^* + \underline{V}_{20} \underline{I}_2^* + \underline{V}_{30} \underline{I}_3^* \quad (10)$$

Analogamente a quanto precedentemente fatto, si dimostra che tale definizione non dipende dal terminale O assunto come riferimento, per cui risulta:

$$\underline{N} = \underline{E}_{10} \underline{I}_1^* + \underline{E}_{20} \underline{I}_2^* + \underline{E}_{30} \underline{I}_3^* = \underline{V}_{13} \underline{I}_1^* + \underline{V}_{23} \underline{I}_2^* = \underline{V}_{12} \underline{I}_1^* + \underline{V}_{32} \underline{I}_3^* = \underline{V}_{21} \underline{I}_2^* + \underline{V}_{31} \underline{I}_3^* \quad (11)$$

Si dimostra che la parte reale della potenza complessa coincide con la potenza attiva assorbita.

Si da invece il nome di **potenza reattiva** assorbita alla parte immaginaria della potenza complessa:

$$\underline{N} = P + j Q \quad (12)$$

Il modulo della potenza complessa assume il nome di **potenza apparente**:

$$N = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (13)$$

Il fattore di potenza  $\cos \Phi$  del carico è definito dalla seguente relazione:

$$\cos \Phi = \cos \left( \text{Arctan} \left( \frac{Q}{P} \right) \right) \quad (14)$$

Risulta perciò, tenendo conto della (13):  $P = N \cos \Phi$  ;  $Q = N \sin \Phi$  (15)

#### UTILIZZATORE EQUILIBRATO

Nel caso particolare, di notevole interesse tecnico, che l'utilizzatore U sia equilibrato, come già visto le correnti di linea hanno lo stesso valore efficace e risultano sfasate l'una rispetto all'altra di un angolo pari a  $2\pi/3$  (vedi figura 7).

Sia  $\varphi$  lo sfasamento tra tensione principale di fase e la corrispondente corrente di linea, dalla (11), risulta:

$$\begin{aligned} \underline{N} &= \underline{E}_{10}\underline{I}_1^* + \underline{E}_{20}\underline{I}_2^* + \underline{E}_{30}\underline{I}_3^* = 3\underline{E}_{10}\underline{I}_1^* = \\ &= 3EI \cos \varphi + j3EI \sin \varphi = \\ &= \sqrt{3}VI \cos \varphi + j\sqrt{3}VI \sin \varphi \end{aligned} \quad (16)$$

Tenendo conto delle (12-14) infine si ha:

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{3}VI \cos \varphi \\ Q &= \sqrt{3}VI \sin \varphi \\ N &= \sqrt{3}VI \\ \cos \Phi &= \cos \varphi \end{aligned} \quad (17)$$

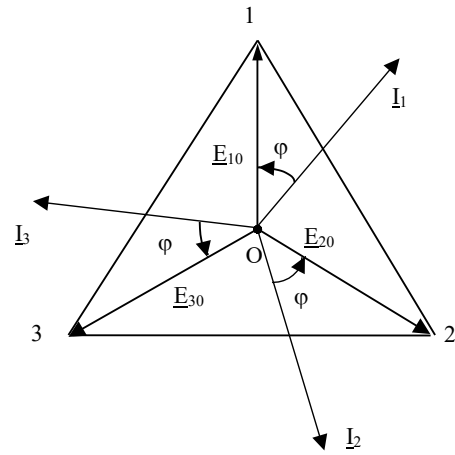


Figura 7

È rilevante osservare che **la potenza istantanea nei sistemi simmetrici ed equilibrati non è funzione del tempo**, contrariamente a quanto accade per i sistemi monofase o per il generico carico trifase non simmetrico o non equilibrato

#### MISURA DELLE POTENZE - INSERZIONE ARON

Si consideri il problema della misura della potenza attiva P assorbita da un generico utilizzatore trifase (considerazioni analoghe possono essere fatte per la misura della potenza reattiva). Sfruttando l'arbitrarietà del terminale O di riferimento è possibile misurare la potenza attiva del generico utilizzatore trifase facendo ricorso a due soli wattmetri, inseriti nel circuito come illustrato nella figura 8 (vedi eq. 11). La potenza attiva P assorbita dal carico risulta essere pari (a meno delle correzioni da apportare per tenere conto della dispersione degli strumenti) alla somma delle due letture degli strumenti:  $P = W_a + W_b$ .

Se il carico è equilibrato allora è possibile, dalla lettura dei due strumenti, ottenere anche il valore della potenza reattiva assorbita. Risulta infatti:

$$\begin{aligned} W_b + W_a &= \sqrt{3}VI \cos(\varphi) = P \\ W_b - W_a &= VI \sin(\varphi) = \frac{Q}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

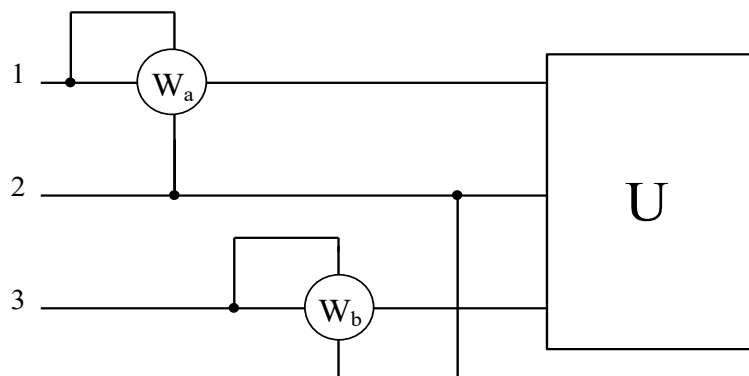


Figura 8. - Misura della potenza attiva - inserzione Aron

### STELLA DI IMPEDENZE

Il calcolo delle correnti nei rami di una stella di impedenze (vedi figura 9) si può eseguire con vari metodi. Si tratta di risolvere il seguente sistema nelle incognite  $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$ :

$$\begin{cases} \underline{V}_{12} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{Z}_2 \underline{I}_2 \\ \underline{V}_{23} = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 - \underline{Z}_3 \underline{I}_3 \\ \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Per la soluzione del sistema (18) si può utilizzare il teorema di Millman, con riferimento allo schema circuitale illustrato nella figura 10.

Risulta:

$$\underline{V}_{OC} = \frac{\underline{Y}_1 \underline{E}_{10} + \underline{Y}_2 \underline{E}_{20} + \underline{Y}_3 \underline{E}_{30}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_1 (\underline{E}_{10} - \underline{V}_{OC}) \\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_2 (\underline{E}_{20} - \underline{V}_{OC}) \\ \underline{I}_3 = \underline{Y}_3 (\underline{E}_{30} - \underline{V}_{OC}) \end{cases} \quad (20)$$

dove le  $\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \underline{Y}_3$  sono le ammettenze dei tre rami della stella.

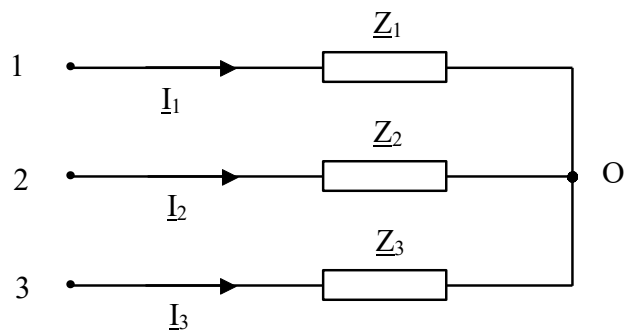


Figura 9.

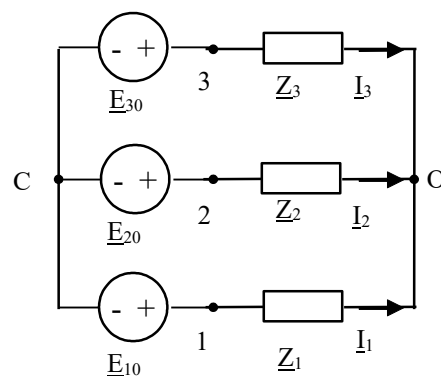


Figura 10.

### STELLA EQUILIBRATA

Le stelle equilibrate sono formate da tre impedenze uguali  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}$  (e quindi  $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \underline{Y}_3 = \underline{Y}$ ). In questo caso la (19) fornisce  $\underline{V}_{OC}=0$  e quindi dalle (20) si ottiene:

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1 \underline{E}_{10} \quad ; \quad \underline{I}_2 = \underline{Y}_2 \underline{E}_{20} \quad ; \quad \underline{I}_3 = \underline{Y}_3 \underline{E}_{30} \quad (21)$$

da cui si deduce che il sistema è anche equilibrato ( $|\underline{I}_1| = |\underline{I}_2| = |\underline{I}_3| = I$ ). Dal teorema di additività delle potenze, avendo indicato con  $\varphi$  l'angolo di sfasamento fra tensione e corrente in ogni singola fase, segue:

$$\underline{N} = \underline{N}_1 + \underline{N}_2 + \underline{N}_3 = 3 E I (\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)) \quad (22)$$

Dalla (22) segue inoltre che il fattore di potenza di una stella equilibrata di impedenze coincide con il fattore di potenza di ciascuna impedenza.

### TRIANGOLO DI IMPEDENZE

Il calcolo delle correnti nei rami di un triangolo di impedenze (vedi figura 11) si esegue direttamente se sono note le impedenze dei rami e le tensioni concatenate. Dalle correnti  $I_{12}$ ,  $I_{23}$ ,  $I_{31}$  (correnti di fase) si deducono immediatamente le correnti assorbite dalla linea  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ , vedi eq. (23)

$$\begin{cases} I_{12} = \frac{V_{12}}{Z_{12}} \\ I_{23} = \frac{V_{23}}{Z_{23}} \\ I_{31} = \frac{V_{31}}{Z_{31}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = I_{12} - I_{31} \\ I_2 = I_{23} - I_{12} \\ I_3 = I_{31} - I_{23} \end{cases} \quad (23)$$

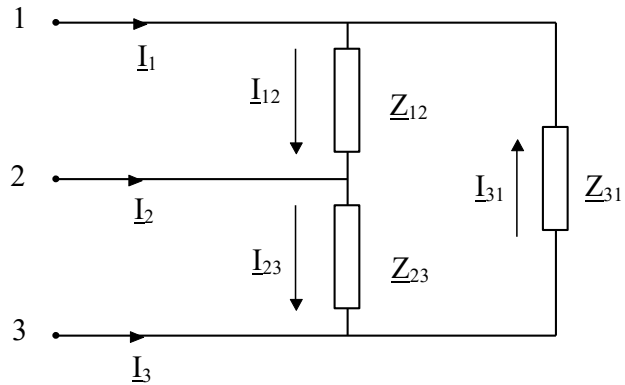


Figura 11.

### TRIANGOLO EQUILIBRATO

Il triangolo di impedenze è equilibrato quando le tre impedenze che lo costituiscono sono tutte uguali:  $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z$ . In questo caso, dalle (23) si ottiene:

$$\begin{cases} I_1 = \frac{V_{12} - V_{31}}{Z} = \frac{E_{10} - E_{20} - (E_{30} - E_{10})}{Z} = \frac{3E_{10} - (E_{10} + E_{20} + E_{30})}{Z} = \frac{3E_{10}}{Z} \\ I_2 = \frac{3E_{20}}{Z} = I_1 e^{-j\frac{2}{3}\pi}, \quad I_3 = \frac{3E_{20}}{Z} = I_2 e^{-j\frac{2}{3}\pi} \end{cases} \quad (24)$$

da cui si deduce che il sistema è anche equilibrato ( $|I_1| = |I_2| = |I_3| = I$ ). Inoltre le correnti di fase  $I_{12}$ ,  $I_{23}$ ,  $I_{31}$ , risultano ridotte di un fattore  $\sqrt{3}$  rispetto alle tensioni di linea, come si può vedere dalla figura 12, ed in modulo uguali fra loro ( $|I_{12}| = |I_{23}| = |I_{31}| = I_{\text{fase}}$ ).

Dal teorema di additività delle potenze, avendo indicato con  $\varphi$  l'angolo di sfasamento fra tensione e corrente in ogni singola fase, segue:

$$\begin{aligned} \underline{N} &= \underline{N}_1 + \underline{N}_2 + \underline{N}_3 = \\ &= 3VI_{\text{fase}}(\cos\varphi + j\sin\varphi) \end{aligned} \quad (25)$$

Dalla (25) segue inoltre che il fattore di potenza di un triangolo equilibrato di impedenze coincide con il fattore di potenza di ciascuna impedenza.

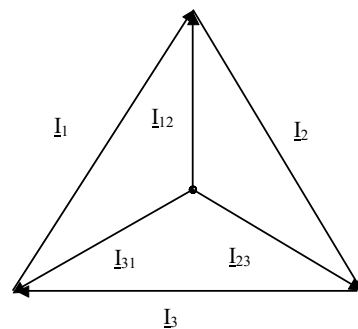


Figura 12. Rappresentazione delle correnti di fase e delle correnti di linea nel caso di un triangolo di impedenze equilibrato

### SISTEMI A QUATTRO FILI (TRIFASE CON NEUTRO)

La presenza di un quarto filo  $n$  (**neutro**), porta a considerare sistemi del tipo indicato nella figura 13. Se si alimenta il sistema con tre generatori disposti a stella aventi f.e.m. simmetriche disposte in terna diretta ( $\underline{E}_g, \alpha^2 \underline{E}_g, \alpha \underline{E}_g$ ) si stabilisce fra i fili 1, 2, 3 una terna di tensioni concatenate simmetrica (a meno delle eventuali cadute), le cui tensioni principali di fase sono le f.e.m. suddette. Oltre a ciò si rende disponibile fra ciascuna fase ed il neutro una tensione di modulo  $E$ . In nessun caso ci sono particolari problemi di calcolo in quanto, trascurando le cadute di tensione sulla linea, è sempre nota a priori la tensione applicata a ciascuna impedenza.

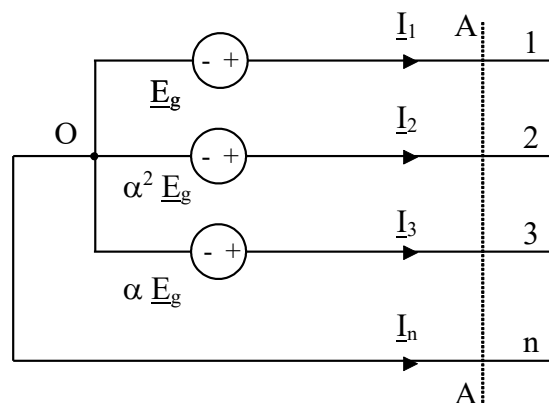


Figura 13. - Schema del generatore per sistemi trifase con neutro

Il collegamento è adatto per carichi aventi una certa probabilità di squilibrio: in tal modo si assicurano tensioni con lo stesso valore efficace su tutte le impedenze di carico a stella, anche se sono diverse tra loro. Infatti, trascurando le cadute di tensione sul neutro, la tensione tra i centri stella è nulla e le correnti assorbite dalla linea sono calcolabili come  $\underline{I}_k = \underline{E}_{k0} / \underline{Z}_k$ ,  $k=1,2,3$ . La corrente nel neutro sarà tanto maggiore quanto più è pronunciato lo squilibrio dei carichi, come risulta dalla seguente formula:

$$\underline{I}_n = -(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3) = -\left(\frac{\underline{E}_{10}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{E}_{20}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{E}_{30}}{\underline{Z}_3}\right) \quad (26)$$

### RIFASAMENTO DI UN UTILIZZATORE TRIFASE

Si consideri un utilizzatore  $U$  di tipo induttivo che assorba dalla linea la potenza reattiva  $Q$  e la potenza attiva  $P$  e sia caratterizzato da un fattore di potenza  $\cos \varphi$ . Analogamente al caso dei sistemi monofase, aumentare il fattore di potenza del carico, a parità di potenza attiva assorbita, permette di ridurre le correnti di linea assorbite, a cui seguono una riduzione delle cadute di tensione sulla linea e della potenza dissipata per effetto Joule sulla linea stessa. Se il fattore di potenza dell'utilizzatore è troppo basso, è quindi necessario rifasare tale utilizzatore, ponendo in parallelo ad esso un banco di condensatori, collegati a stella (vedi figura 14) od a triangolo (vedi figura 15). Sia  $\cos \varphi'$  il fattore di potenza che si vuole ottenere per il carico costituito dall'utilizzatore  $U$  con in parallelo il banco di condensatori. Facendo riferimento alla figura 14, la potenza reattiva assorbita dalla linea a destra della sezione  $B'B'$  è data da:

$$Q_t = Q + Q_c = P \tan(\varphi) + Q_c$$

avendo indicato con  $Q_c$  la potenza reattiva assorbita dai condensatori. Si ha quindi:

$$\tan(\varphi') = \frac{Q_t}{P} = \tan(\varphi) + \frac{Q_c}{P} \Rightarrow Q_c = P (\tan(\varphi') - \tan(\varphi)) \quad (28)$$

L'ultima relazione esprime la potenza reattiva che deve essere assorbita dalla batteria di condensatori per portare il fattore di potenza da  $\cos \varphi$  a  $\cos \varphi'$ .

### ◆ Condensatori a stella

Se, come nel caso di figura 14, i condensatori sono disposti a stella, si ha:

$$Q_c = 3 \frac{E^2}{X_c} = -\omega C_y V^2$$

da cui:

$$C_y = \frac{P(\tan(\varphi) - \tan(\varphi'))}{\omega V^2} \quad (29)$$

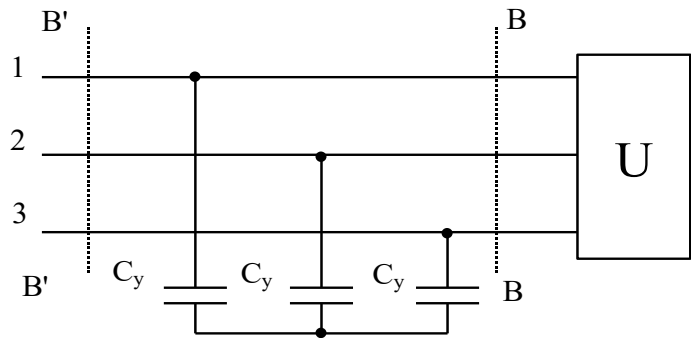


Figura 14.

### ◆ Condensatori a triangolo

Se, come nel caso della figura 15, i condensatori sono collegati a triangolo, risulta:

$$Q_c = 3 \frac{V^2}{X_c} = -3\omega C_\Delta V^2$$

da cui:

$$C_\Delta = \frac{P(\tan(\varphi) - \tan(\varphi'))}{3\omega V^2} \quad (30)$$

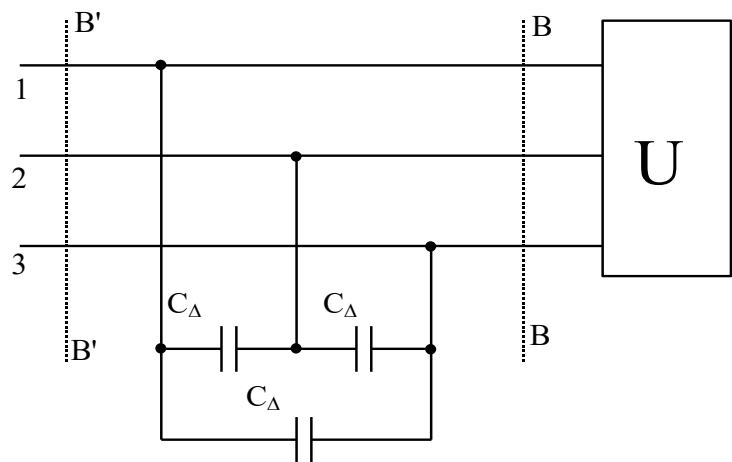


Figura 15.

Quindi se i condensatori sono disposti a triangolo si richiede che essi abbiano capacità tre volte inferiori di quelle di un collegamento a stella. Tuttavia con un collegamento a triangolo ciascun condensatore è sottoposto alla tensione di linea  $V$ , mentre con un collegamento a stella ciascun condensatore è sottoposto alla tensione di fase  $E = V/\sqrt{3}$ .

I morsetti dei condensatori sono fra loro collegati a due a due mediante resistenze di valore molto elevato, le quali, quando i condensatori sono in esercizio, dissipano una potenza molto piccola, in relazione al loro valore elevato, ma consentono ai condensatori di scaricarsi non appena venga interrotto il collegamento con la linea.

## TRASMISSIONE E DISTRIBUZIONE DELL'ENERGIA ELETTRICA

In generale il trasferimento di energia elettrica tra due punti, nei sistemi elettrici di potenza (escludendo quindi il campo delle telecomunicazioni), può avvenire nei seguenti tre modi:

- corrente continua;
- corrente alternata monofase a frequenza industriale (50 Hz per l'Europa, 60 Hz per gli USA);
- corrente alternata trifase a frequenza industriale.

Il confronto tra i pesi di materiale conduttore è uno dei criteri che determina la convenienza economica della linea. Infatti, il peso del conduttore incide sia sul costo proprio dei conduttori che su

quello dei sostegni, della posa in opera della linea, etc. Il confronto tra i tre sistemi di trasmissione deve essere effettuato rispettando le seguenti ipotesi:

- parità della potenza trasmessa  $P$  [W];
- parità della tensione di trasmissione  $V$  [V];
- parità della lunghezza della linea  $L$  [m];
- parità della potenza dissipata sulla linea  $\Delta p$  [W];
- parità di conduttore (quindi stesso peso specifico  $\gamma$  e stessa resistività  $\rho$ ).

1) **corrente continua:** Indicando con  $R_l$  la resistenza di linea relativa ad un conduttore e con  $I$  la corrente di linea, la potenza persa nei due conduttori è data da:  $\Delta p = 2 R_l I^2$

$$\text{Sostituendo le espressioni } R_l = \rho L/S \text{ e } I = P/V \text{ si ottiene: } \Delta p = \frac{2\rho L P^2}{S V^2} \Rightarrow S = \frac{2\rho L P^2}{\Delta p V^2}$$

Essendo  $S$  e  $2LS$  rispettivamente la sezione ed il volume dei conduttori di linea, il peso totale dei conduttori di linea è dato da:

$$G_{cc} = 2LS\gamma = \frac{4\gamma\rho L^2 P^2}{\Delta p V^2} = 4k \quad (31)$$

dove si è definito il fattore costante  $k = \gamma\rho L^2 P^2 / (V^2 \Delta p)$ .

2) **corrente alternata monofase:** rispetto al caso precedente cambia solo l'espressione della corrente che è  $I = P / (V \cos\varphi)$  e pertanto, nella formula del peso comparirà a denominatore il termine  $\cos^2\varphi$ , ottenendo:

$$G_{cam} = 2LS\gamma = \frac{4\gamma\rho L^2 P^2}{\Delta p V^2 \cos^2(\varphi)} = \frac{4k}{\cos^2(\varphi)} \quad (32)$$

3) **corrente alternata trifase:** essendo tre i conduttori si ha  $\Delta p = 3 R_l I^2$ , dove  $R_l = \frac{\rho L}{S}$  e

$$I = \frac{P}{\sqrt{3}V \cos(\varphi)}; \text{ Sostituendo si ottiene: } \Delta p = \frac{\rho L P^2}{S V^2 \cos^2(\varphi)} \Rightarrow S = \frac{\rho L P^2}{\Delta p V^2 \cos^2(\varphi)}$$

Il peso dei tre conduttori di linea è dato da:

$$G_{cat} = 3LS\gamma = \frac{3\gamma\rho L^2 P^2}{\Delta p V^2 \cos^2(\varphi)} = \frac{3k}{\cos^2(\varphi)} \quad (33)$$

Confrontando le espressioni (31), (32) e (33) e tenendo presente che  $\cos^2\varphi \leq 1$ , si possono trarre le seguenti conclusioni:

- i pesi in corrente alternata monofase e trifase dipendono dal fattore di potenza, tendendo all'infinito per  $\cos\varphi$  tendente a zero e assumendo i valori minimi per  $\cos\varphi = 1$ , valori che sono rispettivamente:  $(G_{cam})_{min} = 4k$ ,  $(G_{cat})_{min} = 3k$ ;
- per qualsiasi valore di  $\cos\varphi$ , essendo  $G_{cat} < G_{cam}$ , il peso della linea in corrente alternata trifase è sempre minore di quello in corrente alternata monofase;
- per qualsiasi valore di  $\cos\varphi$ , essendo  $G_{cc} < G_{cam}$ , il peso dei conduttori in corrente continua è sempre inferiore a quello in corrente alternata monofase, salvo che per  $\cos\varphi = 1$ , caso in cui i due pesi sono uguali;
- risolvendo la disequazione  $G_{cc} < G_{cat}$  si ottiene  $\cos^2(\varphi) \leq 3/4$  e quindi, considerando solo il valore positivo,  $\cos(\varphi) \leq \sqrt{3}/2 = 0.866$ . Quanto sopra porta alla conclusione che, per valori di  $\cos(\varphi)$

$\cos(\varphi) < 0.866$ , il peso in corrente alternata trifase è maggiore di quello in corrente continua e viceversa; per  $\cos(\varphi) = 0.866$  i due pesi sono uguali.

In definitiva, per fattori di potenza maggiori di 0.866, il sistema di trasmissione più conveniente, per quanto concerne il peso dei conduttori, è quello in corrente alternata trifase, mentre per  $\cos(\varphi) < 0.866$  diventa più conveniente quello in corrente continua. Risulta anche evidente, nei casi di impiego della corrente alternata, la convenienza di un elevato valore del  $\cos \varphi$ , essendo il peso dei conduttori proporzionale al suo quadrato. Le considerazioni fatte possono essere sintetizzate nel grafico di figura 16.

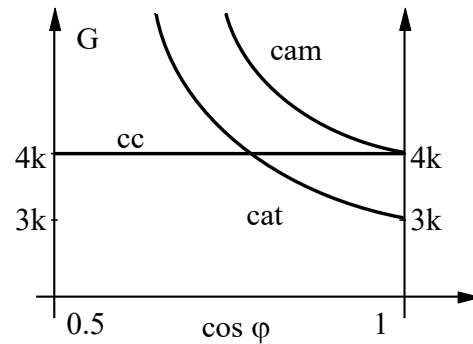


Figura 16.

Oltre al criterio precedente occorre considerare anche altri elementi di valutazione.

- La generazione di energia elettrica avviene quasi totalmente sotto forma di corrente alternata trifase, in quanto i relativi generatori (alternatori trifase) sono costruttivamente più semplici e robusti dei generatori in corrente continua; anche l'utilizzazione avviene prevalentemente in corrente alternata. Volendo effettuare la trasmissione in corrente continua occorre una stazione di conversione a monte ed una a valle della linea. Attualmente la conversione avviene mediante raddrizzatori statici.
- La trasmissione in corrente continua presenta il vantaggio, rispetto alle linee trifase, di un minore costo degli isolatori e dei sostegni, sia per il fatto di impiegare due conduttori (o anche uno se il ritorno è effettuato a terra) anziché tre, sia perché, a parità di valore efficace della tensione  $V$ , la linea a corrente alternata va costruita con un livello di isolamento proporzionato al valore massimo  $V_M = \sqrt{2} V$ , mentre quella a corrente continua deve essere isolata solo per la tensione  $V$ ; questi vantaggi risultano particolarmente importanti per le linee lunghe ad altissima tensione;
- In corrente continua c'è una minore caduta di tensione di linea perché manca la caduta di tensione dovuta alla reattanza induttiva. Altro vantaggio, particolarmente sensibile nelle linee in cavo, è l'assenza di effetti capacitivi.

Attualmente la trasmissione di energia elettrica a tensione 220kV - 380kV si effettua con linee aeree trifasi; la corrente continua è stata adottata, per esempio, per l'attraversamento di tratti di mare con cavo sottomarino (Toscana - Corsica - Sardegna a 200kV, Inghilterra - Francia, fiordi norvegesi, etc.).



# TRASFORMATORI

## 1. PRINCIPIO DI FUNZIONAMENTO

Il trasformatore è costituito da un anello (nucleo) di materiale ferromagnetico (tipicamente lamine sottili di acciaio al silicio) su cui sono avvolti due avvolgimenti: il “primario”, costituito da  $n_1$  spire ed il “secondario” costituito da  $n_2$  spire. Si tratta quindi di un doppio bipolo. Se il primario è alimentato da un generatore di tensione  $v_1$  (“tensione primaria”), in modo tale che il primario sia percorso da una corrente  $i_1$  (“corrente primaria”), e si lascia aperto il secondario, cosicché la corrente  $i_2$  (“corrente secondaria”) sia nulla, nell’anello si stabilirà un campo di induzione magnetica (a cui corrisponde il flusso “principale”  $\phi$  indicato in figura 1.1.a)<sup>(#)</sup>. Si noti che le linee del campo di induzione si concatenano anche con l’avvolgimento secondario, cosicché, se  $i_1$  varia nel tempo, dalla legge di Faraday (o dell’induzione elettromagnetica), sarà indotta ai terminali del secondario una tensione  $v_2$  (“tensione secondaria”). Se il secondario è connesso ad un carico (ad esempio un resistore), circolerà pertanto corrente su di esso. Mediante il trasformatore è quindi possibile trasferire potenza elettrica dall’avvolgimento primario a quello secondario, senza fare ricorso ad alcun collegamento elettrico tra i due avvolgimenti; il trasferimento di potenza avviene invece attraverso il campo magnetico che è presente principalmente nel nucleo del trasformatore e che è in grado di scambiare energia con entrambi i circuiti.

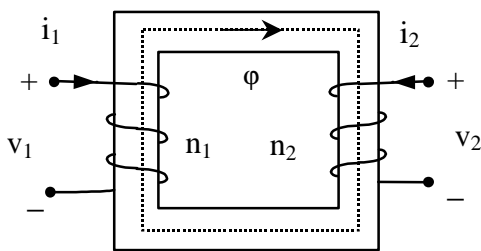


Figura 1.1.a - Schema di principio di un trasformatore monofase.

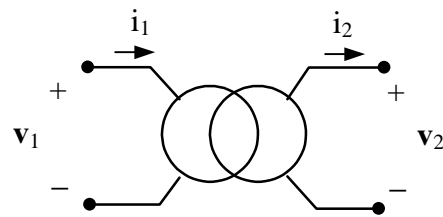


Figura 1.1.b – Simbolo del trasformatore.

Il nucleo magnetico del trasformatore consiste normalmente in un pacco di lamierini di acciaio al silicio, che presenta due forme costruttive comuni mostrate nelle figure 1.2.a e 1.2.b.

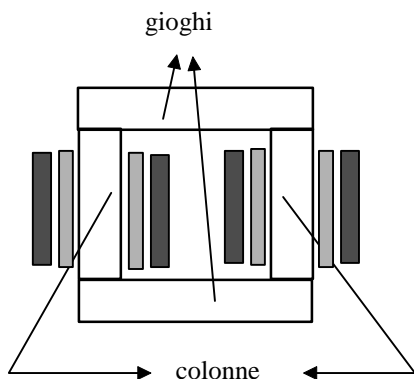


Figura 1.2.a.  
Trasformatore con nucleo a colonne

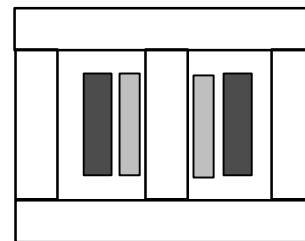


Figura 1.2.b  
Trasformatore con nucleo a mantello

<sup>(#)</sup> Si dice flusso principale il flusso del campo di induzione magnetica attraverso una sezione normale alla linea d’asse del nucleo di materiale ferromagnetico.

Nel tipo con nucleo a colonne ciascun avvolgimento è costituito da due bobine in serie, ciascuna avvolta su di una colonna del trasformatore. Nel tipo con nucleo a mantello, entrambi gli avvolgimenti sono avvolti sulla colonna centrale del nucleo. La configurazione a mantello minimizza il flusso disperso, quella a colonne minimizza la quantità di lamierini utilizzati. Gli avvolgimenti primario e secondario possono essere:

- *concentrici* (figura 1.3.a): le colonne sono rivestite di materiale isolante; sul materiale isolante viene quindi posto l'avvolgimento a bassa tensione, che viene a sua volta rivestito di materiale isolante. Sul secondo strato di materiale isolante viene posto l'avvolgimento ad alta tensione. In un trasformatore monofase, ognuna delle due colonne porta metà delle spire. In un trasformatore trifase, ogni colonna porta una fase a bassa tensione e la fase ad alta tensione corrispondente.
- *a bobine alternate* (figura 1.3.b): sono ottenuti alternando gli avvolgimenti a bassa e ad alta tensione, che vengono separate mediante corone di materiale isolante.

Gli avvolgimenti a bobine alternate presentano un miglior accoppiamento magnetico; gli avvolgimenti concentrici consentono un miglior isolamento.

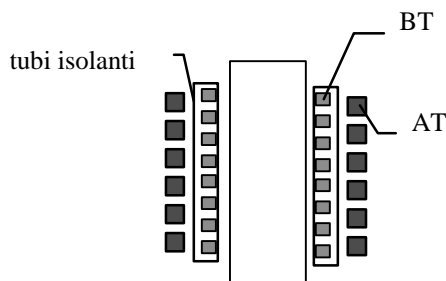


Figura 1.3.a. - Avvolgimenti concentrici

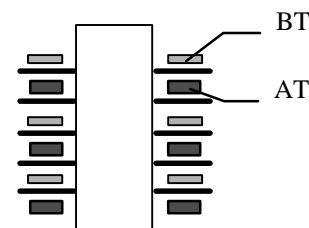


Figura 1.3.b. - Avvolgimenti a bobine alternate

La laminazione del nucleo magnetico si rende necessaria al fine di ridurre le perdite per correnti parassite. I gioghi sono normalmente a sezione rettangolare, mentre per le colonne si preferisce una sezione a "gradini" in modo da ridurre la lunghezza degli avvolgimenti (figura 1.4).

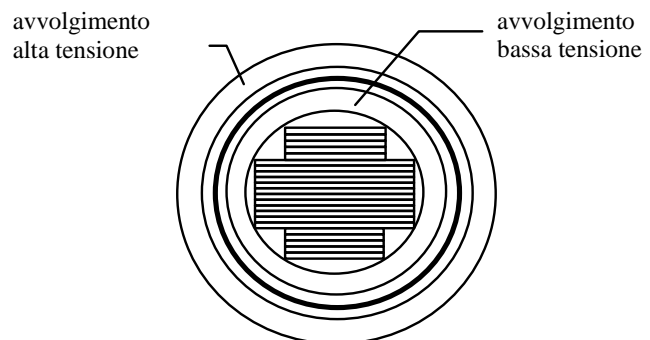


Figura 1.4 - sezione di una colonna del nucleo magnetico

## 2. IL TRASFORMATORE IDEALE

Se si suppone che

- 1) non vi siano perdite negli avvolgimenti (dette "perdite nel rame"),
- 2) non vi siano perdite nel nucleo ferromagnetico (dette "perdite nel ferro"),
- 3) tutte le linee del campo di induzione magnetica si concatenino ad entrambi gli avvolgimenti (equivalente ad assumere che non vi siano flussi dispersi) e che il materiale ferromagnetico abbia "permeabilità magnetica infinita",

è possibile dedurre il modello del "trasformatore ideale" come segue. Dalla legge di Faraday possiamo determinare le tensioni ai capi degli avvolgimenti primario e secondario come derivate temporali dei flussi concatenati agli avvolgimenti stessi ( $v_1 = d\phi_{c1}/dt$ ,  $v_2 = d\phi_{c2}/dt$ ). Inoltre, grazie all'ipotesi 3) i flussi concatenati sono ottenibili semplicemente moltiplicando i numeri di spire per il flusso principale ( $\phi_{c1} = n_1 \phi$ ,  $\phi_{c2} = n_2 \phi$ ). Si ottengono quindi le relazioni  $v_1 = n_1 d\phi/dt$ ,  $v_2 = n_2$

$d\phi/dt$ , da cui, effettuando il rapporto membro a membro, otteniamo la relazione tra le tensioni a primario e secondario:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (1)$$

Una equazione di accoppiamento magnetico tra primario e secondario si ottiene mediante la legge della circuitazione magnetica (o di Ampère-Maxwell) applicata alla linea d'asse dell'anello di materiale ferromagnetico. Grazie all'ipotesi 3) il campo magnetico nel materiale è trascurabile. Pertanto; con riferimento ai versi positivi indicati nella figura 1 si ottiene che la somma delle correnti concatenate alla linea è nulla<sup>(o)</sup>:

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 = 0$$

Si ottiene quindi la relazione tra le correnti a primario e secondario:

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{n_2}{n_1} \quad (2)$$

Se si definisce il rapporto di trasformazione  $K = n_1/n_2$ , il trasformatore ideale, il cui simbolo è indicato nella figura 2, risulta definito dalle seguenti caratteristiche:

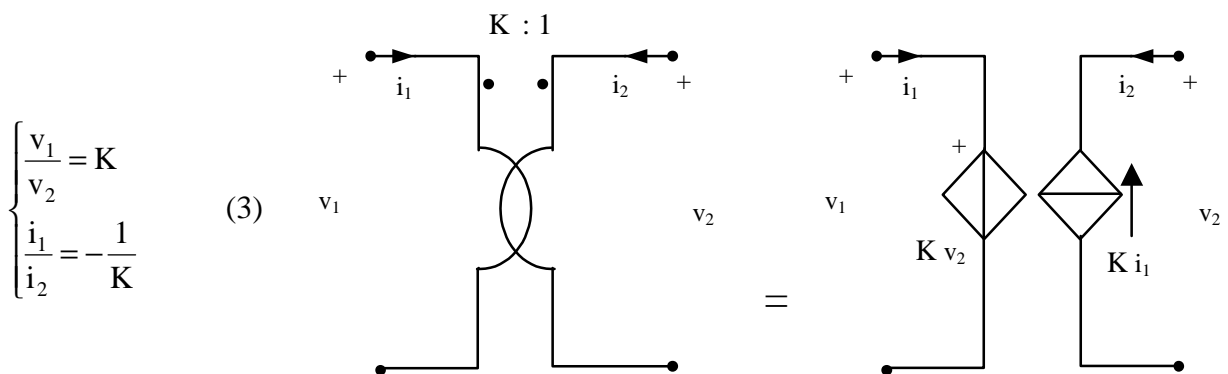


Figura 2 - Trasformatore ideale e circuito equivalente.

Si noti che in figura 2 una coppia di terminali è segnata con un punto, indicando quindi i versi di riferimento positivi delle tensioni e delle correnti per cui le equazioni costitutive (3) sono corrette. In figura 2 è mostrato inoltre uno dei possibili circuiti equivalenti del trasformatore ideale. Si noti anche che, poiché il trasformatore ideale è un componente ideale definito dalle (3), le relazioni tra tensioni e correnti a primario e secondario sono valide per tutte le forme d'onda e per tutte le frequenze (inclusa la continua).

Il trasformatore ideale gode delle due seguenti proprietà fondamentali:

1. Il trasformatore ideale non dissipa né accumula energia. Dalle (3) risulta evidente che la potenza assorbita dal trasformatore ideale è nulla; infatti, con riferimento ai versi di riferimento positivi delle tensioni e delle correnti definiti in figura 2, si ha

<sup>(o)</sup> Se la permeabilità del materiale ferromagnetico costituente il nucleo fosse finita e costante, si otterrebbe la Legge di Hopkinson:

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 = \mathcal{R}\phi$$

$$p(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = (Kv_2(t))\left(-\frac{i_2(t)}{K}\right) + v_2(t)i_2(t) = -v_2(t)i_2(t) + v_2(t)i_2(t) = 0$$

Quindi la somma delle potenze assorbite a primario e secondario è complessivamente nulla, ovvero la potenza assorbita a primario dal trasformatore ideale ( $p_1 = v_1 i_1$ ) risulta in ogni istante uguale a quella erogata al secondario ( $p_2 = -v_2 i_2$ ). In particolare, con riferimento al regime sinusoidale di frequenza  $f$  dalle (3) risulta  $\underline{V}_1 = K\underline{V}_2$ ,  $\underline{I}_2 = -K\underline{I}_1$  e quindi la potenza complessa assorbita a primario dal trasformatore ideale  $\underline{N}_1 = \underline{V}_1(\underline{I}_1)^*$  risulta uguale a quella erogata al secondario  $\underline{N}_2 = -\underline{V}_2(\underline{I}_2)^*$ . Il trasformatore ideale cioè non assorbe né potenza attiva né potenza reattiva; risultano però mutati i parametri (tensione e corrente) con cui la energia elettrica viene assorbita a primario ed erogata a secondario: la tensione viene ridotta (od aumentata) di un fattore pari al rapporto di trasformazione del trasformatore  $K$  mentre la corrente viene aumentata (o diminuita) dello stesso fattore.

2. Quando a secondario di un trasformatore ideale è collegato un resistore di resistenza  $R$ , il primario si comporta come un resistore di resistenza equivalente  $K^2R$ . Tale equivalenza è illustrata nella figura 3 e prende il nome di “riduzione da secondario a primario”. La dimostrazione è immediata:

$$v_1(t) = K v_2(t) = K [-R i_2(t)] = -KR [-K i_1(t)] = K^2 R i_1(t)$$

Analogamente, con riferimento al regime sinusoidale di frequenza  $f$  dalle (3) risulta anche che quando a secondario di un trasformatore ideale è collegato una impedenza  $\underline{Z}$ , il primario si comporta come una impedenza di valore  $K^2\underline{Z}$ .

$$\underline{V}_1(t) = K \underline{V}_2(t) = K [-\underline{Z} \underline{I}_2(t)] = -K\underline{Z} [-K \underline{I}_1(t)] = K^2 \underline{Z} \underline{I}_1(t)$$

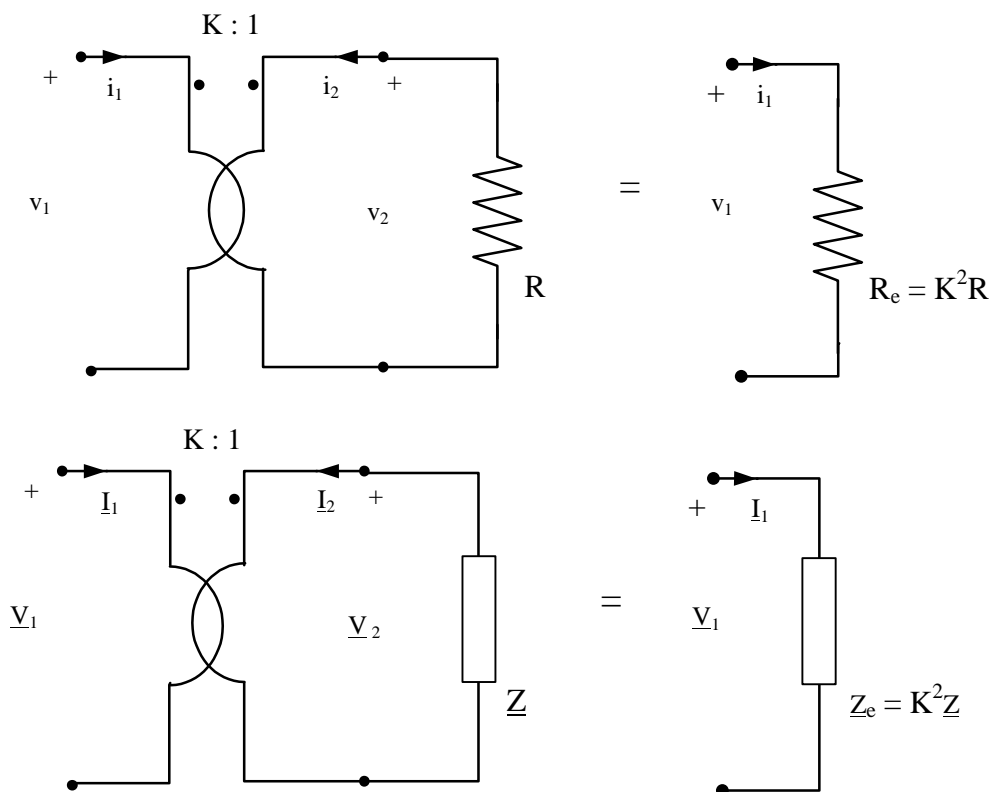


Figura 3 - Riduzione da secondario a primario.

### 3. INDUTTORI ACCOPPIATI LINEARI

Se si suppone che

- 1) non vi siano perdite negli avvolgimenti (dette “perdite nel rame”),
- 2) non si siano perdite nel nucleo ferromagnetico (dette “perdite nel ferro”),
- 3) il materiale ferromagnetico abbia permeabilità magnetica costante (materiale lineare),

è possibile dedurre il modello degli “induttori accoppiati lineari” come segue. Analogamente a quanto visto per il trasformatore ideale, dalla legge di Faraday possiamo determinare le tensioni ai capi degli avvolgimenti primario e secondario come derivate temporali dei flussi concatenati agli avvolgimenti stessi ( $v_1 = d\phi_{c1}/dt$ ,  $v_2 = d\phi_{c2}/dt$ ). Inoltre, grazie alla linearità del materiale, i flussi concatenati sono ottenibili semplicemente come combinazioni lineari delle correnti a primario e secondario (sorgenti del campo magnetico):

$$\begin{cases} \phi_{c1} = L_1 i_1 + M i_2 \\ \phi_{c2} = M i_1 + L_2 i_2 \end{cases}$$

dove  $L_1$  ed  $L_2$  (misurati in H [Henry]) sono, rispettivamente i **coefficienti di auto induzione** del primario e del secondario ed  $M$  (misurata in H) è il **coefficiente di mutua induzione** tra i due avvolgimenti. Si intende sottolineare che i coefficienti di auto e mutua induzione dipendono esclusivamente dalla geometria e dalle caratteristiche magnetiche del materiale del nucleo.

Il doppio bipolo lineare “induttori accoppiati” (illustrato in figura 4) risulta quindi descritto dalle seguenti relazioni tensione-corrente:

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases} \quad (4)$$

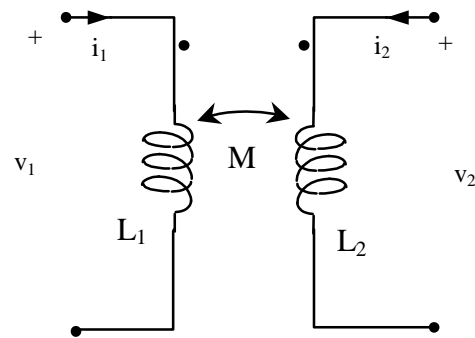


Figura 4 - Induttori accoppiati.

Si noti che in figura 4 una coppia di terminali è segnata con un punto, indicando quindi i versi di riferimento positivi delle tensioni e delle correnti per cui le equazioni costitutive (4) sono corrette. Si noti inoltre che, poiché gli induttori accoppiati sono un componente ideale definito dalle (4), le relazioni tra tensioni e correnti a primario e secondario sono valide per tutte le forme d’onda e per tutte le frequenze (inclusa la continua).

Con riferimento al regime sinusoidale di frequenza  $f$  le (4) possono essere scritte in termini di numeri complessi rappresentativi delle tensioni e delle correnti, come segue:

$$\begin{cases} \underline{V}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 \\ \underline{V}_2 = j\omega M \underline{I}_1 + j\omega L_2 \underline{I}_2 \end{cases}$$

Il doppio bipolo “induttori accoppiati” gode delle due seguenti proprietà fondamentali:

1. Il doppio bipolo “induttori accoppiati” è un componente con memoria in grado di immagazzinare energia magnetica. Dalle (4) risulta infatti che la potenza assorbita dagli induttori accoppiati, con riferimento ai versi di riferimento positivi delle tensioni e delle correnti definiti in figura 4, è data da:

$$\begin{aligned}
p(t) &= v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = \\
&= L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} = \\
&= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \right) + \frac{d}{dt} (M i_1 i_2) + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) = \\
&= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) = \frac{d}{dt} E_m
\end{aligned}$$

Tale relazione mostra come tutta la potenza elettrica assorbita dagli induttori accoppiati vada ad incrementare il termine  $E_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$  che assume quindi il significato di energia elettromagnetica accumulata negli induttori accoppiati (si noti che il primo ed il terzo termine coincidono con le energie magnetiche accumulate dagli induttori  $L_1$  ed  $L_2$  se fossero non accoppiati; il termine  $M i_1 i_2$ , che prende invece il nome di energia mutua, è quello che rende possibile trasferire potenza elettrica dall'avvolgimento primario a quello secondario, senza fare ricorso ad alcun collegamento elettrico tra i due avvolgimenti); tale energia, una volta immagazzinata, può essere interamente restituita ai componenti del circuito cui sono collegati gli induttori accoppiati durante un transitorio successivo. La potenza elettrica assorbita dagli induttori accoppiati può quindi assumere valori sia positivi che negativi.

Esiste una relazione notevole che lega i coefficienti di auto e mutua induzione:  $|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$ . Questa relazione è una conseguenza diretta del fatto che l'energia magnetica è sempre positiva. Infatti, con semplici passaggi si ottiene (ricordando che l'autoinduttanza è sempre positiva):

$$0 \leq E_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 = \frac{1}{2 L_2} \left[ (L_2 i_2 + M i_1)^2 + i_1^2 (L_1 L_2 - M^2) \right]$$

Quindi, dato che il primo termine della somma si può annullare per una opportuna scelta dei valori delle correnti, il secondo termine deve essere sempre positivo o nullo.

La mutua induttanza  $M$  è spesso espressa in funzione del coefficiente di accoppiamento  $k$  definito da:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

La relazione appena provata mostra quindi che  $|k| \leq 1$ , ovvero è impossibile ottenere un coefficiente di accoppiamento maggiore di uno. Quando  $k = 0$ , si ha  $M = 0$ , cioè non esiste accoppiamento magnetico fra gli induttori. Quando  $k = 1$ , si ha  $|M| = \sqrt{L_1 L_2}$ , cioè l'accoppiamento magnetico fra gli induttori è perfetto.

2. Il doppio bipolo "induttori accoppiati" è equivalente ad un doppio bipolo costituito da un trasformatore ideale e da tre induttori (disaccoppiati)  $L_0$ ,  $L_{d1}$  ed  $L_{d2}$ . Per dimostrare tale equivalenza, illustrata in figura 6, è sufficiente verificare che relazioni tensione-corrente sono le stesse. Si ha infatti:

- Applicando la LKT a primario:  $v_1 = L_{d1} \frac{di_1}{dt} + L_0 \frac{d}{dt} (i_1 - i_1')$

▪ Dalle caratteristiche (3) del Trasformatore ideale: 
$$\begin{cases} L_0 \frac{d}{dt}(i_1 - i'_1) = K \left( v_2 - L_{d2} \frac{di_2}{dt} \right) \\ i'_1 = -\frac{1}{K} i_2 \end{cases}$$

Sostituendo l'ultima relazione nelle precedenti si ottiene quindi: 
$$\begin{cases} v_1 = (L_0 + L_{d1}) \frac{di_1}{dt} + \frac{L_0}{K} \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = \frac{L_0}{K} \frac{di_1}{dt} + \left( \frac{L_0}{K^2} + L_{d2} \right) \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

Tali relazioni coincidono con le caratteristiche (4) degli induttori accoppiati se  $L_1 = L_0 + L_{d1}$ ,  $L_2 = L_{d2} + L_0/K^2$  ed  $M = L_0/K$ .

L'interpretazione fisica di tale equivalenza, è la seguente:  $L_{d1}$  ed  $L_{d2}$  sono le *induttanze di dispersione*, cioè le induttanze viste a primario ed a secondario dovute ai flussi di dispersione, ovvero alle linee di campo magnetico che non si concatenano ad entrambe le bobine. Infatti, per  $k \rightarrow 1$ , si ha  $M^2 \rightarrow L_1 L_2$ , e quindi  $L_{d1}, L_{d2} \rightarrow 0$ .  $L_0$  è detta *induttanza magnetizzante*: essa tiene conto del flusso principale, comune ad entrambi gli avvolgimenti.

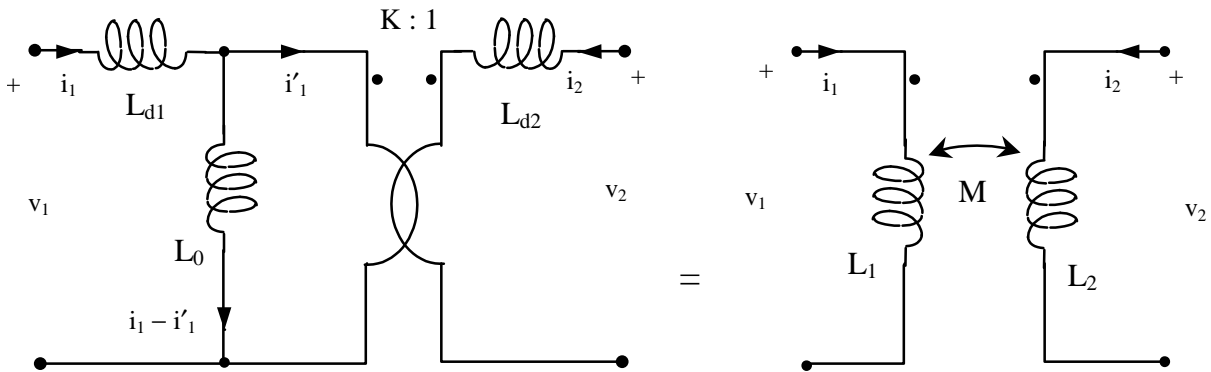


Figura 6

Si supponga di voler costruire un trasformatore di alta qualità. Si sceglie un anello di materiale magnetico con una elevatissima permeabilità magnetica  $\mu$  (per esempio, ferrite, permalloy, super-permalloy, ecc.), quindi si avvolgono strettamente sull'anello le due bobine, formando così un doppio bipolo del tipo di figura 1. Si supponga di essere capaci di trovare materiali a permeabilità  $\mu$  crescente; allora, al crescere di  $\mu$  si otterrebbero due effetti: i flussi dispersi diventerebbero sempre più piccoli (per cui  $L_{d1}$  ed  $L_{d2}$  si ridurrebbero) e il flusso comune crescerebbe (per cui  $L_0$  aumenterebbe). Pertanto, nel caso limite in cui  $\mu \rightarrow \infty$ , si avrebbe  $L_{d1}, L_{d2} \rightarrow 0$  ed  $L_0 \rightarrow \infty$ . Con riferimento alla figura 6 è possibile vedere che si otterrebbe dunque il trasformatore ideale.

#### 4. IL TRASFORMATORE REALE

Le perdite nel trasformatore reale possono classificarsi come segue:

- Le perdite per resistenza nei conduttori degli avvolgimenti, dette *perdite nel rame* ( $P_{cu}$ ), sono perdite ohmiche e pertanto risultano dipendere dal quadrato della corrente che scorre nei conduttori stessi. I conduttori devono essere di bassa resistenza elettrica per ridurre le perdite ohmiche e le cadute di tensione presentate dagli avvolgimenti. Il materiale di gran lunga più usato per i conduttori è il rame elettrolitico ricotto per le sue buone qualità meccaniche ed elettriche.

- Le *perdite nel ferro* ( $P_{fe}$ ) per isteresi e per correnti parassite nel nucleo ferromagnetico. Infatti, poiché il nucleo è percorso da un flusso variabile ed il materiale ferromagnetico è tipicamente conduttore, anche nel nucleo si generano forze elettromotrici indotte, che danno luogo a delle correnti, dette parassite (o di Foucault). Per ridurre le correnti parassite si costruisce il nucleo con lamierini, infatti il lamierino spezza il percorso delle correnti parassite e le riduce. Le perdite per isteresi sono causate da fenomeni di “attrito” nella struttura cristallina del materiale ferromagnetico sottoposto ad un campo di induzione variabile. Per loro natura le perdite nel ferro dipendono quindi dal campo di induzione e dalla sua variazione temporale all’interno del nucleo magnetico, e quindi fondamentalmente dalla tensione a primario o a secondario.

Si consideri il circuito elettrico rappresentato nella figura 7. Esso costituisce il circuito equivalente del trasformatore (alle basse frequenze), infatti, per passare dal circuito equivalente degli induttori accoppiati al circuito di figura 7 si è:

1. considerata una *induttanza di dispersione a primario* ( $L_{d1}$ ) e *a secondario* ( $L_{d2}$ ) dovuta ai flussi di dispersione a primario e a secondario, ovvero alle linee di campo magnetico che si concatenano al primo avvolgimento ma non al secondo, e viceversa;
2. aggiunta la resistenza degli avvolgimenti di primario ( $R_1$ ) e di secondario ( $R_2$ ), per tener conto delle *perdite nel rame* ( $P_{cu} = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$ );
3. aggiunta una resistenza ( $R_0$ ) in parallelo all’induttanza magnetizzante, per tener conto delle *perdite nel ferro* ( $P_{fe} = R_0 i_a^2$ );

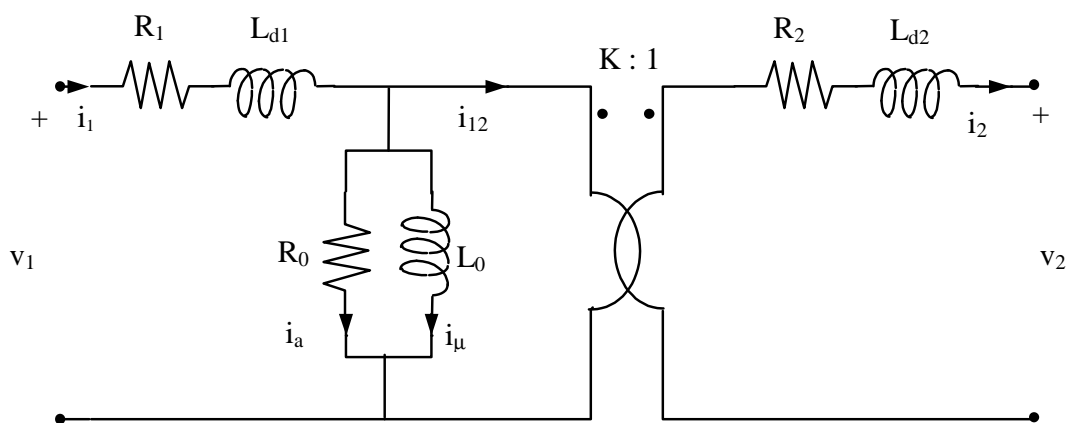


Figura 7. - Circuito equivalente del trasformatore reale.

Il circuito equivalente del trasformatore reale si riduce al solo trasformatore ideale quando vengono trascurati tutti i fenomeni di “perdita” presenti nel trasformatore “reale”. Tali fenomeni sono dovuti alla resistenza degli avvolgimenti ( $R_1$ ,  $R_2$ ), ai flussi dispersi ( $L_{d1}$ ,  $L_{d2}$ ), alle perdite nel ferro ( $R_0$ ) ed alla induttanza magnetizzante, grande ma non infinita, del nucleo del trasformatore ( $L_0$ ). Il trasformatore “reale” è in grado di modificare i parametri della energia elettrica che lo attraversa, ma, a differenza del trasformatore ideale, assorbe sia potenza attiva che potenza reattiva. La potenza attiva viene dissipata (trasformata in calore) in parte negli avvolgimenti (per effetto Joule) ed in parte nel nucleo ferromagnetico (per effetto Joule e per isteresi). La potenza reattiva assorbita serve per sostenere i flussi dispersi ed il flusso principale. La presenza di flussi dispersi introduce uno sfasamento tra la tensione primaria e la tensione secondaria, mentre l’induttanza magnetizzante finita comporta l’assorbimento a primario, anche nel funzionamento a vuoto (cioè col secondario aperto), di una corrente magnetizzante ( $I_\mu$ ).



Con riferimento al regime sinusoidale di frequenza  $f$  il circuito elettrico rappresentato nella figura 7 può essere descritto in termini di numeri complessi rappresentativi delle tensioni e delle correnti, come illustrato nella figura 8a. Rispetto al circuito di figura 7, si sono introdotte le reattanze di dispersione degli avvolgimenti ( $X_{d1} = \omega L_{d1}$ ,  $X_{d2} = \omega L_{d2}$ ) e la reattanza magnetizzante del nucleo del trasformatore ( $X_0 = \omega L_0$ ). In figura 8b si è illustrato lo stesso circuito di figura 8a in cui si sono evidenziate l'impedenza primaria  $Z_1 = R_1 + jX_{d1}$ , l'impedenza secondaria  $Z_2 = R_2 + jX_{d2}$  e l'impedenza  $Z_0 = (R_0)/(jX_0)$  ottenuta dal parallelo delle impedenze  $R_0$  e  $jX_0$ .

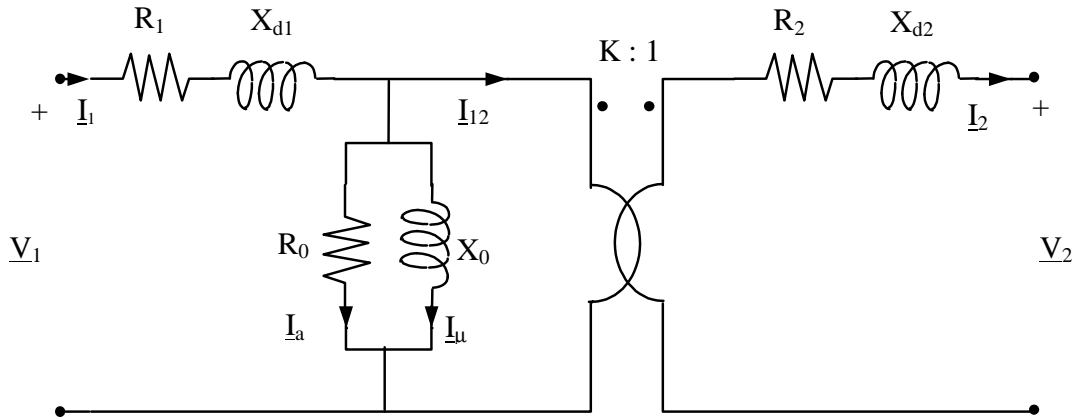


Figura 8.a - Circuito equivalente del trasformatore reale in regime sinusoidale.

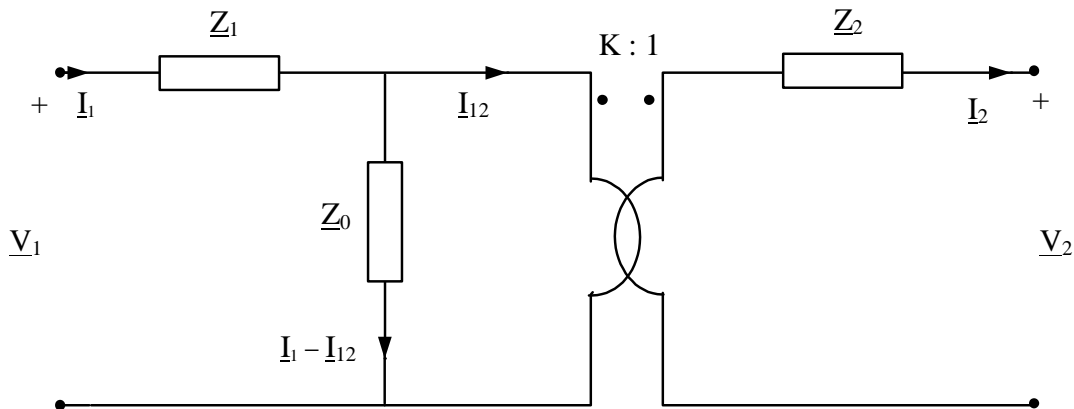


Figura 8.b - Circuito equivalente del trasformatore reale in regime sinusoidale.

Se è possibile considerare in prima approssimazione lineare il materiale ferromagnetico di cui è costituito il nucleo del trasformatore, la riluttanza  $R$  è una caratteristica del circuito magnetico indipendente dal valore del flusso presente nel circuito e quindi è costante nel tempo. In questo caso, supponendo che tutte le variabili ( $i_1$ ,  $i_2$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ) siano funzioni sinusoidali isofrequenziali e indicando sottolineati i fasori relativi alle grandezze indicate e con  $j$  l'unità immaginaria, si ottiene<sup>(o)</sup>:

<sup>(o)</sup> Si noti che le prime tre delle (4.1) sono LKT applicate al circuito di Figura 8.a. L'ultima delle (4.1) è interpretabile come LKC. Infatti  $L_0 = N_1^2/R$  ed  $j\omega L_0 I_\mu = j\omega N_1 \Phi$ , quindi  $I_\mu = R \Phi/N_1$ . sostituendo si ottiene quindi  $I_\mu = I_1 - I_a - (N_1/N_2)I_2$ . Si ha dunque

$$\underline{I}_\mu = \underline{I}_1 - \underline{I}_{12} - \underline{I}_a$$

$$\begin{aligned}
\underline{V}_1 &= j\omega N_1 \underline{\Phi} + j\omega L_{d1} \underline{I}_1 + R_1 \underline{I}_1 \\
\underline{V}_2 &= j\omega N_2 \underline{\Phi} - j\omega L_{d2} \underline{I}_2 - R_2 \underline{I}_2 \\
0 &= j\omega N_1 \underline{\Phi} - R_0 \underline{I}_a \\
R \underline{\Phi} &= N_1 (\underline{I}_1 - \underline{I}_a) - N_2 \underline{I}_2
\end{aligned}
\tag{4.1}$$

Le equazioni (4.1) costituiscono le **equazioni interne** del trasformatore mediante le quali è possibile descriverne il comportamento nella ipotesi di poter trascurare gli effetti dovuti alla non linearità del circuito magnetico. Quando ciò non sia possibile, le grandezze in gioco (tensioni, correnti e flusso) sono esprimibili mediante la loro serie di Fourier, caratterizzata da un'armonica fondamentale, relativa alla frequenza di alimentazione, e da armoniche superiori, relative a frequenze multiple intere della fondamentale.

Le (4.1) costituiscono un sistema di quattro equazioni complesse nelle sei incognite complesse  $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_a, \underline{\Phi}$ . Affinché il problema risulti chiuso e sia quindi possibile calcolare il valore delle incognite è necessario scrivere altre due equazioni complesse che descrivano l'accoppiamento elettrico del trasformatore col mondo esterno attraverso i morsetti del primario e del secondario. Nel caso in cui il primario sia alimentato da una rete a tensione assegnata ed il secondario sia chiuso su di una impedenza di carico ( $\underline{Z}_L$ ), tali **equazioni di connessione con l'esterno** hanno la seguente forma:

$$\begin{aligned}
\underline{V}_1 &= \underline{E} \\
\underline{V}_2 &= \underline{Z}_L \underline{I}_2
\end{aligned}
\tag{4.2}$$

È possibile spostare a sinistra del trasformatore ideale (verso il primario) l'impedenza secondaria  $\underline{Z}_2$  moltiplicandola per il quadrato del rapporto di trasformazione  $K$ ; si ottiene quindi il circuito equivalente del trasformatore ridotto a primario illustrato nella figura 9, in cui  $\underline{Z}_{12} = K^2 \underline{Z}_2$  (si ricordi che in tale schema anche l'impedenza di carico collegata al secondario va moltiplicata per il quadrato del rapporto di trasformazione  $K$ ). Analogamente è possibile considerare il circuito equivalente del trasformatore ridotto a secondario.

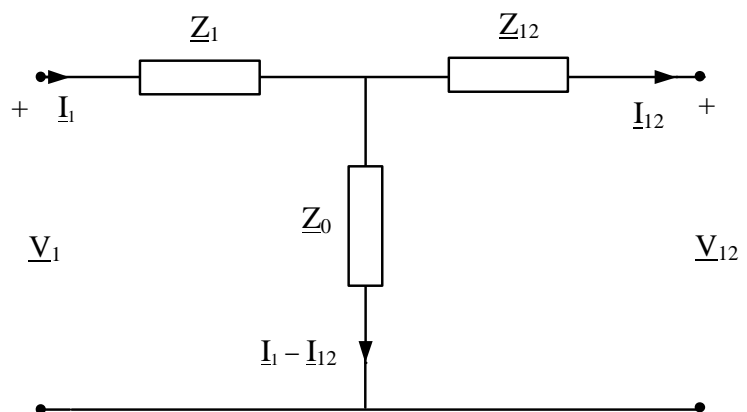


Figura 9. - circuito equivalente del trasformatore ridotto a primario.

I trasformatori sono costruiti in modo da ridurre il più possibile gli effetti di perdita; risulta quindi comprensibile come, normalmente, la caduta di tensioni ai capi della impedenza  $\underline{Z}_1$  risulti piccola (meno di qualche per mille) rispetto a quella ai capi della impedenza  $\underline{Z}_0$ . Di conseguenza è possibile approssimare notevolmente la rete equivalente del trasformatore, senza introdurre un errore rilevante, applicando la tensione di alimentazione direttamente ai capi della reattanza magnetizzante come mostrato nella figura 10.

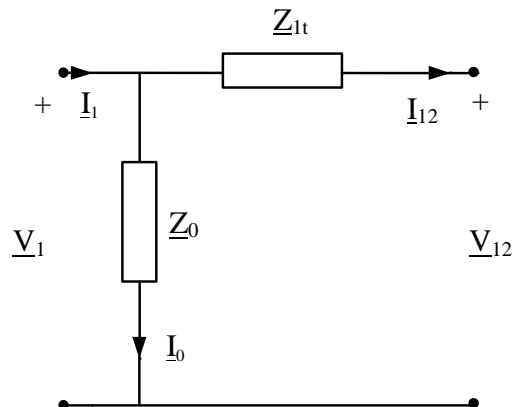


Figura 10. - circuito equivalente semplificato del trasformatore ridotto a primario.

In questo caso la corrente  $\underline{I}_0$  assorbita da  $\underline{Z}_0$  non dipende dal carico del trasformatore, ma unicamente dalla tensione di alimentazione primaria e coincide con la corrente assorbita a primario dal trasformatore nel funzionamento a vuoto, quando cioè il secondario è aperto ( $\underline{I}_2 = 0$ ). Nell'ambito di tale approssimazione non è più necessario distinguere l'impedenza primaria  $\underline{Z}_1$  da quella secondaria  $\underline{Z}_2$ . Trasportando una delle due impedenze, primaria o secondaria, dalla parte opposta del trasformatore ideale, avendo cura di effettuare la trasformazione corrispondente del suo valore, permette di considerare un'unica impedenza totale che può essere riferita a primario  $\underline{Z}_{1t} = R_{1t} + jX_{1t} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{12}$ . Analogamente è possibile considerare il circuito equivalente semplificato del trasformatore con un'unica impedenza totale riferita a secondario ( $\underline{Z}_{2t}$ ). I parametri che compaiono nel circuito equivalente semplificato ( $R_0$ ,  $X_0$ ,  $R_{1t}$  ed  $X_{1t}$ ) possono essere determinati sperimentalmente mediante una prova a vuoto ed una prova in corto circuito.

## 5. PROVA A VUOTO

La prova a vuoto viene eseguita alimentando il primario con la sua tensione nominale e mantenendo il secondario in circuito aperto. Facendo riferimento alla rete equivalente semplificata di figura 10 risulta nulla la corrente  $\underline{I}_{12}$ , di conseguenza risulta:

$$R_0 = \frac{V_{10}^2}{P_0} \quad , \quad X_0 = \frac{V_{10}^2}{\sqrt{(V_{10} I_{10})^2 - P_0^2}} \quad (5)$$

dove  $V_{10}$  è la tensione (valore efficace) primaria,  $I_{10}$  è la corrente (valore efficace) primaria e  $P_0$  è la potenza attiva assorbita a primario durante la prova; tali grandezze possono essere misurate mediante l'inserzione a primario di un voltmetro, un amperometro ed un wattmetro (cioè di strumenti per la misura di tensione, corrente e potenza attiva, rispettivamente).

## 6. PROVA IN CORTO CIRCUITO

La prova in cortocircuito viene effettuata alimentando il primario del trasformatore con il secondario chiuso su un amperometro. La bassa impedenza dell'amperometro permette di considerare il secondario chiuso in cortocircuito. La tensione primaria deve essere tale che la corrente erogata a secondario, che viene misurata dall'amperometro, sia pari alla corrente nominale (valore efficace). Tale valore della tensione viene chiamato tensione di cortocircuito ( $V_{1c}$ ) e risulta essere pari ad un frazione (< 10 %) della tensione nominale primaria. Per i valori tipici dei parametri del trasformatore risulta  $|\underline{Z}_0| \gg |\underline{Z}_{1t}|$  e quindi, nel funzionamento in cortocircuito, è possibile considerare la rete equivalente semplificata del trasformatore che viene mostrata nella figura 11 e che prende il nome di rete di Kapp.

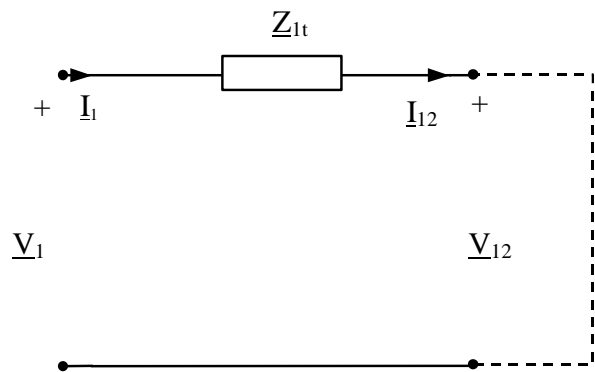


Figura 11. - Circuito equivalente semplificato del trasformatore, valido nel funzionamento in cortocircuito (rete di Kapp)

Con riferimento a tale semplificazione risulta quindi:

$$R_{lt} = \frac{P_c}{I_{1c}^2}, \quad X_{lt} = \frac{\sqrt{(V_{1c} I_{1c})^2 - P_c^2}}{I_{1c}^2} \quad (6)$$

dove  $V_{1c}$  è la tensione (valore efficace) primaria,  $I_{1c}$  è la corrente (valore efficace) primaria e  $P_c$  è la potenza attiva assorbita a primario durante la prova; tali grandezze possono essere misurate mediante l'inserzione a primario di un voltmetro, un amperometro ed un wattmetro.

## 7. RENDIMENTO CONVENZIONALE DEL TRASFORMATORE

Il trasformatore assorbe potenza elettrica dal primario ed eroga potenza elettrica al secondario; tale trasformazione avviene in presenza di perdite negli avvolgimenti, per effetto Joule, e nel nucleo magnetico, a causa delle correnti parassite e la conseguente dissipazione per effetto Joule e della isteresi magnetica. Il rendimento del trasformatore ( $\eta$ ) viene quindi definito come il rapporto tra la potenza attiva erogata a secondario ( $P_2$ ) e la potenza attiva assorbita a primario ( $P_1$ ); indicando con  $P_d$  la potenza dissipata (trasformata in calore) all'interno del trasformatore risulta:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_2 + P_d} \quad (7)$$

La determinazione sperimentale di tale grandezza risulta difficoltosa per varie ragioni. In primo luogo, sarebbe necessario che il trasformatore operasse nelle sue condizioni nominali e quindi si renderebbe necessario poter disporre in laboratorio di un carico in grado di assorbire la potenza nominale del trasformatore che può risultare anche di parecchi MW. In secondo luogo, non essendo presenti parti rotanti nel trasformatore, il rendimento dello stesso è molto elevato (può essere superiore al 99.5) e piccoli errori nella misura delle potenze assorbite ed erogate possono produrre un errore notevole nella determinazione del rendimento. Per ovviare a tali inconvenienti viene definito un rendimento convenzionale del trasformatore ( $\eta_{conv}$ ). Le norme stabiliscono dettagliatamente le modalità del calcolo del rendimento convenzionale a seconda del carico che il trasformatore deve alimentare; facendo riferimento ad un carico resistivo ( $\cos \varphi = 1$ ) che assorbe la potenza nominale del trasformatore si ottiene:

$$\eta_{conv} = \frac{A_n}{A_n + P_{Cu} + P_{Fe}} \quad (8)$$

Nella (8)  $A_n$  è la potenza apparente nominale del trasformatore, che è indicata sui dati di targa del trasformatore stesso,  $P_{Cu}$  sono le perdite nel rame, valutate mediante la prova in cortocircuito, e  $P_{Fe}$  sono le perdite nel ferro, valutate mediante la prova a vuoto. Nella prova in cortocircuito, come già detto, le perdite per effetto Joule negli avvolgimenti, sono largamente predominanti rispetto a quelle nel ferro e quindi la potenza attiva assorbita durante tale prova rappresenta la potenza che viene dissipata nel rame, a parità di correnti negli avvolgimenti, quindi  $P_{Cu} = P_c$ . In realtà è necessario tenere conto della variazione della resistenza degli avvolgimenti al variare della temperatura degli stessi e quindi le norme fissano le modalità del calcolo di  $P_{Cu}$  a partire dalla misura di  $P_c$ . Nella prova a vuoto risultano invece trascurabili le perdite negli avvolgimenti, visto che il secondario non è percorso da corrente ed il primario è percorso solo dalla corrente a vuoto che come detto risulta una frazione abbastanza piccola della corrente nominale, per cui la potenza attiva assorbita durante la prova, eseguita alla tensione nominale, rappresenta la potenza dissipata nel ferro durante il funzionamento nominale ( $P_{Fe} = P_0$ )

## 8. TRASFORMATORI TRIFASE

Per trasferire energia elettrica tra due reti trifase a differenti tensioni, si può ricorrere a tre trasformatori monofase opportunamente collegati tra loro. Nella figura 8.1 è mostrata una possibile disposizione dei tre trasformatori monofase. In questo caso, gli avvolgimenti primari sono collegati a stella, così come quelli secondari. I tre circuiti di figura 8.1 sono equivalenti ad un unico trasformatore ottenuto fondendo in un'unica colonna le tre colonne prive di avvolgimenti dei trasformatori monofase (figura 8.2).

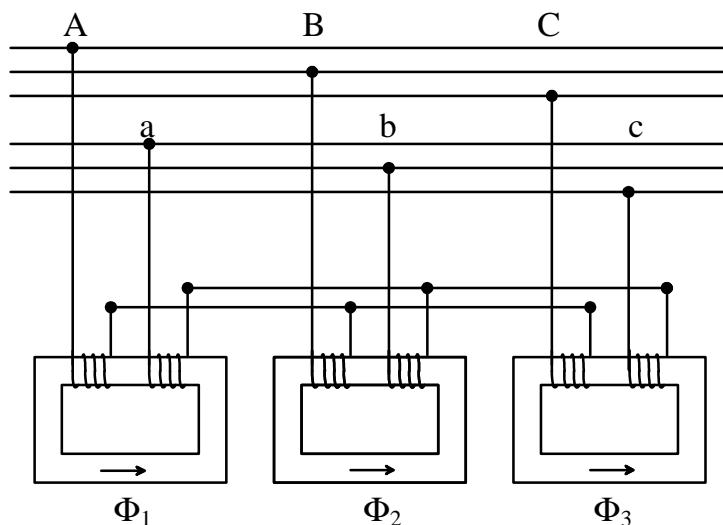


Figura 8.1. - Banco di tre trasformatori monofase.

La colonna centrale del circuito magnetico raffigurato in figura 8.2 è percorsa da un flusso di campo magnetico

$$\Phi' = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

dove  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  e  $\Phi_3$  sono i flussi relativi a ciascun trasformatore. Se poi tali flussi costituiscono una terna simmetrica ed equilibrata, la loro somma è nulla, e la colonna centrale può venire soppressa (figura 8.3).

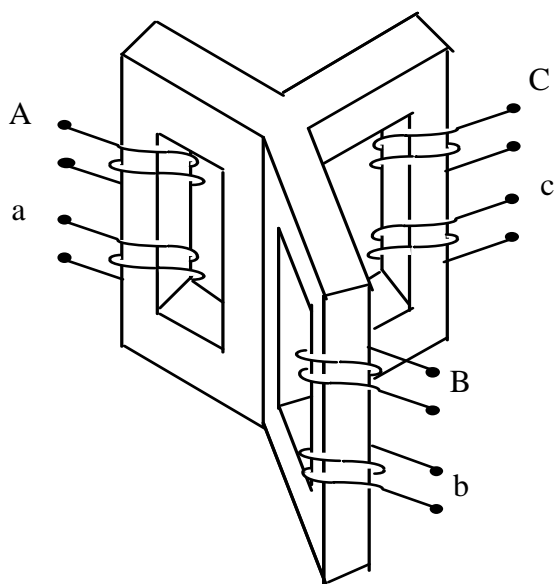


Figura 8.2. - Trasformatore trifase equivalente al banco di tre trasformatori monofase.

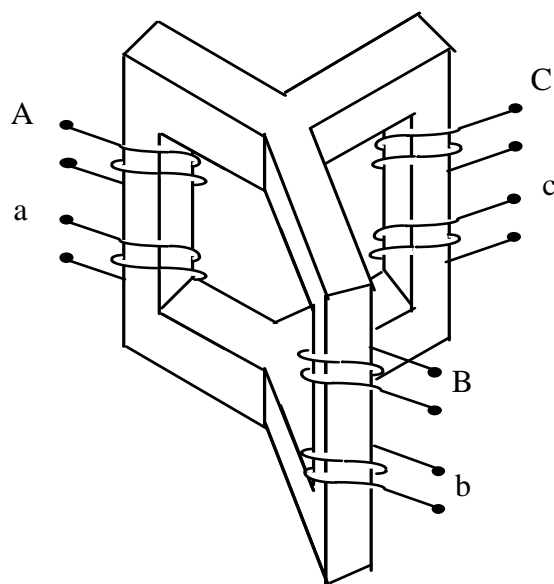


Figura 8.3. - Trasformatore trifase con nucleo simmetrico.

La configurazione illustrata nella figura 8.3 presenta delle difficoltà costruttive ed un ingombro tale che si preferisce adottare un nucleo complanare (figura 8.4). Utilizzando tale disposizione si introduce nella terna dei flussi magnetici una dissimmetria che peraltro risulta di norma trascurabile.

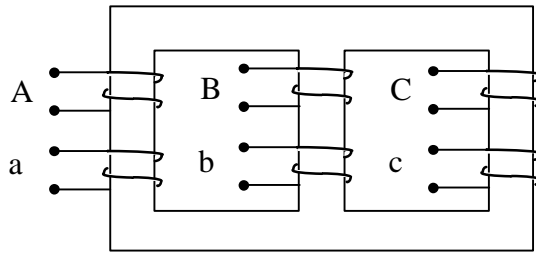


Figura 8.4. - Trasformatore trifase con nucleo complanare.

## 9. PARALLELO DI TRASFORMATORI

Quando si verifica la necessità di trasferire grosse potenze da un circuito all'altro, può risultare conveniente ricorrere al parallelo fra due o più trasformatori (figura 9.1). Affinché il parallelo tra due trasformatori funzioni correttamente, devono essere verificate le seguenti condizioni:

1. **I trasformatori devono avere le stesse tensioni nominali sia primaria che secondaria (la stessa tensione nominale primaria e lo stesso rapporto di trasformazione a vuoto).** Se così non fosse, si avrebbe infatti, nel funzionamento a vuoto, una circolazione di corrente nella maglia costituita dagli avvolgimenti secondari dei trasformatori collegati in parallelo (maglia  $a_a - b_a - b_b - a_b$  della figura 9.1).

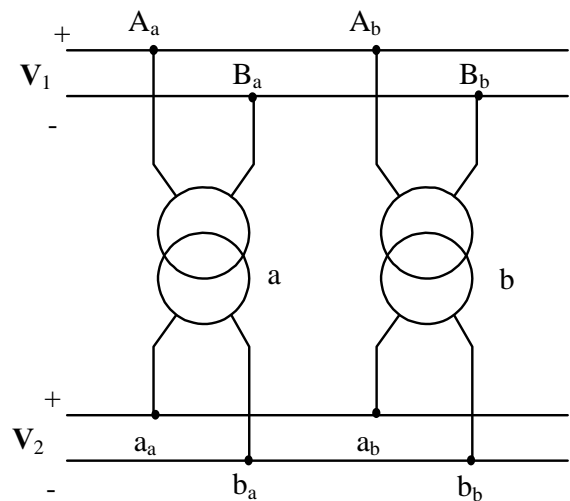


Figura 9.1. - Parallelo di due trasformatori

2. **Nel caso di trasformatori trifase, questi devono avere lo stesso gruppo di appartenenza.** Se i due trasformatori trifase, pur verificando la condizione di cui al punto 1, avessero diversi gruppi di appartenenza, sarebbe comunque presente, nel funzionamento a vuoto, una circolazione di corrente nei secondari dei trasformatori, dovuta alla differenza di fase delle f.e.m. indotte nei due avvolgimenti secondari in parallelo.

3. **I due trasformatori in parallelo devono avere la stessa tensione di corto circuito e lo stesso fattore di potenza di cortocircuito.** Questa condizione è richiesta affinché si abbia un corretto funzionamento del parallelo in presenza di un carico che richiede che:

- a. le correnti secondarie siano in fase tra di loro;
- b. la potenza erogata si ripartisca tra i due trasformatori in maniera direttamente proporzionale alle rispettive potenze apparenti nominali.

Se le due correnti secondarie non sono in fase tra di loro, a parità di corrente erogata al carico si hanno maggiori perdite nel parallelo, a causa del valore più elevato delle correnti secondarie, rispetto al caso in cui tali correnti risultano in fase.

Se la potenza non si ripartisce tra i due trasformatori in misura direttamente proporzionale alle rispettive potenze nominali, quando il carico è tale da assorbire da uno dei due trasformatori la sua potenza nominale, inevitabilmente il secondo trasformatore o assorbe una potenza inferiore a quella nominale, risultando così sottoutilizzato, oppure assorbe una potenza superiore a quella nominale, condizione quest'ultima assolutamente da evitare in quanto porta al guasto del trasformatore stesso.

La prima parte della figura 9.2 riporta il circuito equivalente riferito al secondario del parallelo di due trasformatori monofase (se si deve considerare il parallelo di due trasformatori trifase, lo stesso circuito si riferisce, nel caso di carico equilibrato, ad ogni fase del parallelo). Supponendo che i due trasformatori abbiano lo stesso rapporto di trasformazione a vuoto, come richiesto dal corretto funzionamento a vuoto del parallelo (vedi condizione 1), le due tensioni  $\underline{E}_{2,a}$  ed  $\underline{E}_{2,b}$  risultano uguali tra loro e quindi è possibile semplificare il circuito come mostrato nella seconda parte della stessa figura.

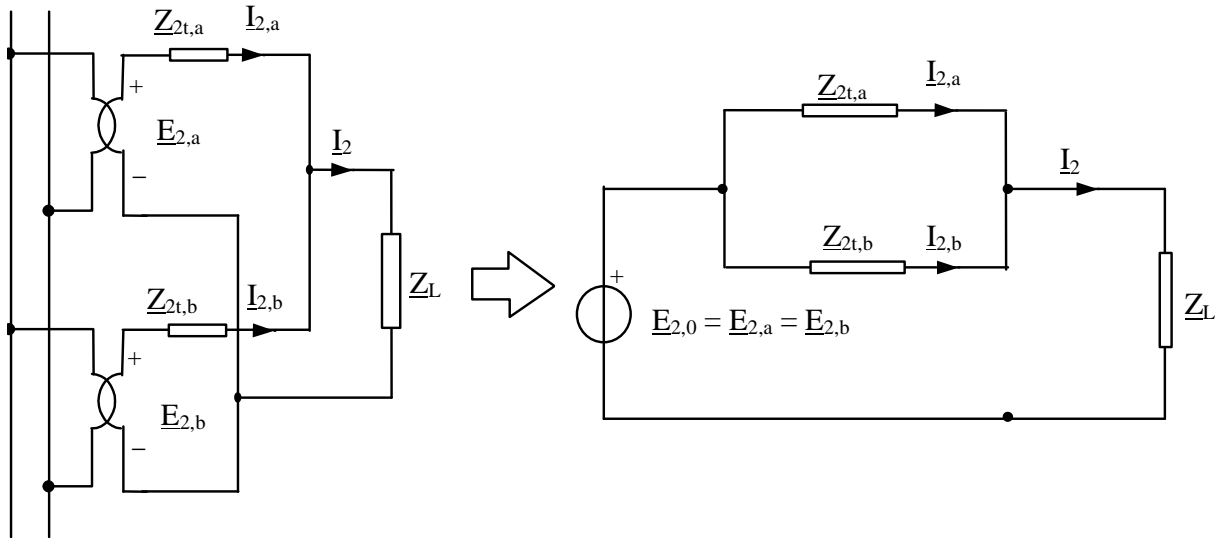


Figura 9.2. - Circuito equivalente riferito al secondario del parallelo di due trasformatori

Dall'analisi di tale circuito risulta evidente che, affinché le due correnti  $\underline{I}_{2,a}$  ed  $\underline{I}_{2,b}$  siano in fase tra di loro è necessario e sufficiente che il rapporto tra la reattanza e la resistenza delle due impedenze totali riferite al secondario  $\underline{Z}_{2t,a}$  e  $\underline{Z}_{2t,b}$  sia lo stesso. Dato che tale rapporto individua univocamente il fattore di potenza del trasformatore nelle prova in corto circuito ne segue che, affinché le due correnti siano in fase tra di loro è necessario che i due trasformatori abbiano lo stesso fattore di potenza di cortocircuito. Risulta inoltre:

$$\frac{I_{2,a}}{I_{2,b}} = \frac{Z_{2t,b}}{Z_{2t,a}} \quad (9.1)$$

Inoltre, dall'analisi della prova in cortocircuito, indicando con  $K$  il rapporto di trasformazione a vuoto di entrambi i trasformatori, si ottiene:

$$\begin{cases} V_{1c,a} = K Z_{2t,a} I_{2n,a} \\ V_{1c,b} = K Z_{2t,b} I_{2n,b} \end{cases} \Rightarrow \frac{Z_{2t,a}}{Z_{2t,b}} = \frac{V_{1c,a} I_{2n,b}}{V_{1c,b} I_{2n,a}} \quad (9.2)$$

Dalle (9.1) e (9.2) infine

$$\frac{I_{2,a}}{I_{2,b}} = \frac{V_{1c,b}}{V_{1c,a}} \frac{I_{2n,a}}{I_{2n,b}} \quad (9.3)$$

Dalle (9.3) si deduce quindi che affinché le correnti si ripartiscano proporzionalmente alle rispettive correnti nominali è necessario e sufficiente che i due trasformatori abbiano la stessa tensione di cortocircuito.

## CAMPO MAGNETICO ROTANTE

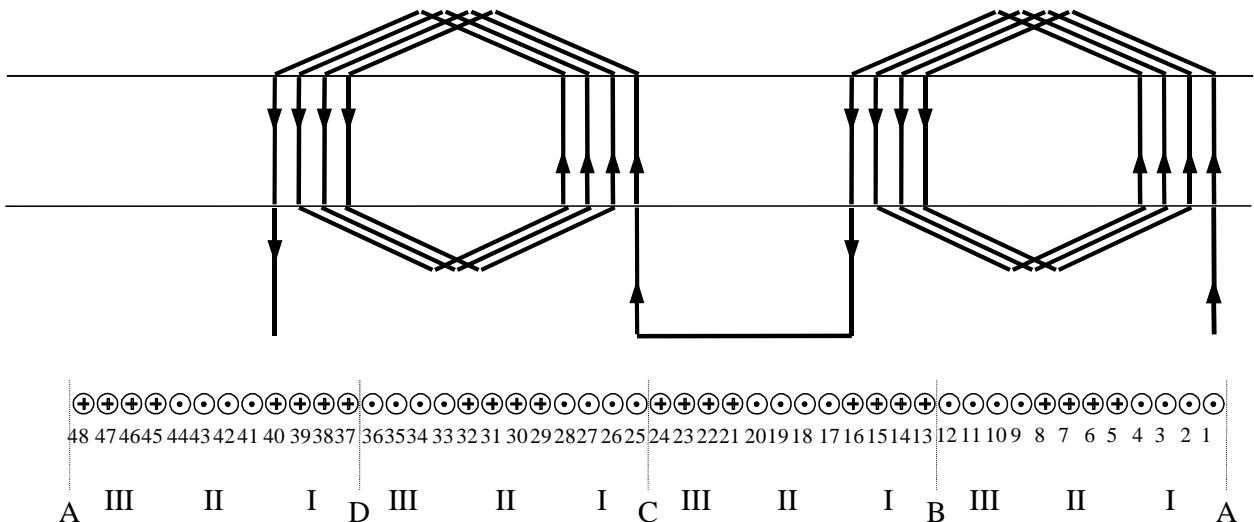
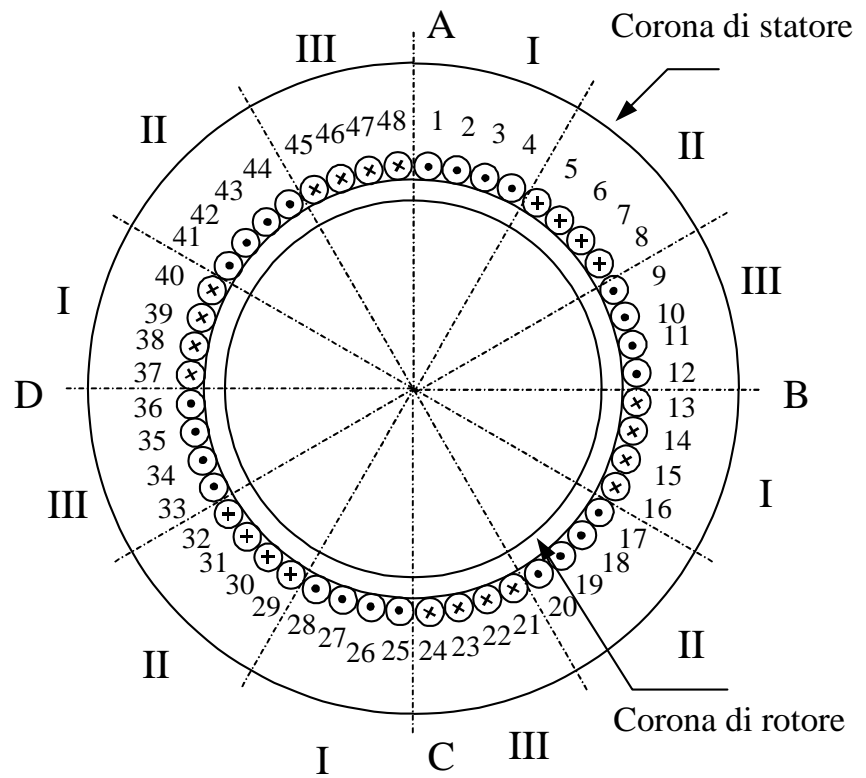
La teoria del campo magnetico rotante verrà utilizzata nel seguito per lo studio delle macchine asincrone e sincrone. Essa richiede la preliminare conoscenza di qualche nozione costruttiva che verrà esposta relativamente alle macchine asincrone, facendo riferimento alla figura.

In tale figura si considera una macchina a quattro "poli" [i settori AB-BC-CD-DA] ma la generalizzazione ad un numero qualsiasi di poli è immediata.

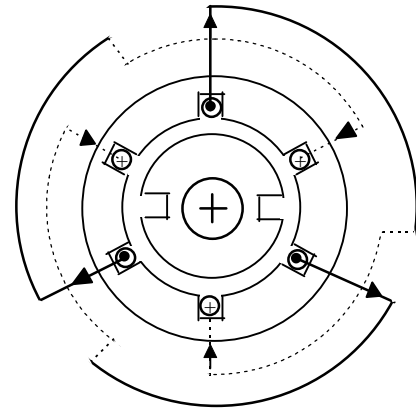
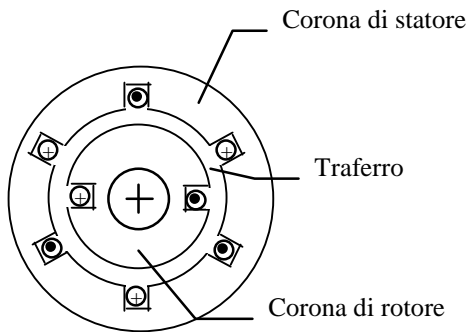
Statore e rotore sono costituiti da un cilindro cavo ed un cilindro pieno laminati (parallelamente al piano del foglio), coassiali e distanziati da un intervallo anulare d'aria [traferro]. Statore e rotore presentano delle "cave" affacciate al traferro, nelle quali hanno sede i conduttori attivi [disposti parallelamente all'asse di rotazione] che opportunamente collegati fra loro [tramite "testate"] costituiscono gli avvolgimenti di statore e rotore.

Considerando macchine trifase, ciascun polo è diviso in tre settori uguali (vedi figura) riservati a ciascuna fase. Nell'esempio di figura ogni fase occupa quattro cave sotto ogni polo [in figura è indicato solo l'avvolgimento della prima fase, le rimanenti sono identiche alla prima e si intendono alloggiare nei settori ed esse riservati].

La figura in basso mostra lo sviluppo in piano della superficie di statore affacciata al traferro. In essa è riportato lo schema dell'avvolgimento di una fase. Nell'esempio considerato tale avvolgimento risulta composto da due gruppi di matasse, ognuno costituito da quattro matasse.







Schema di principio della sezione mediana di una macchina elettrica a traferro costante

Collegamenti dei lati attivi dell'avvolgimento sulla testata della macchina

Lo studio del campo magnetico al traferro della macchina rappresentato nella figura, richiede la soluzione delle equazioni della elettrodinamica quasi-stazionaria, in presenza di un mezzo non uniforme e non lineare, in una geometria complessa. Tale studio viene notevolmente semplificato, mediante l'introduzione delle seguenti **ipotesi di campo**:

1. la permeabilità del ferro si suppone infinita;
2. l'andamento delle linee del campo magnetico al traferro si suppone radiale [superfici affacciate al traferro perfettamente lisce];
3. la distribuzione del campo magnetico si ritiene identica in tutti i piani perpendicolari all'asse della macchina;
4. traferro  $\delta$  di piccolo spessore e circa costante

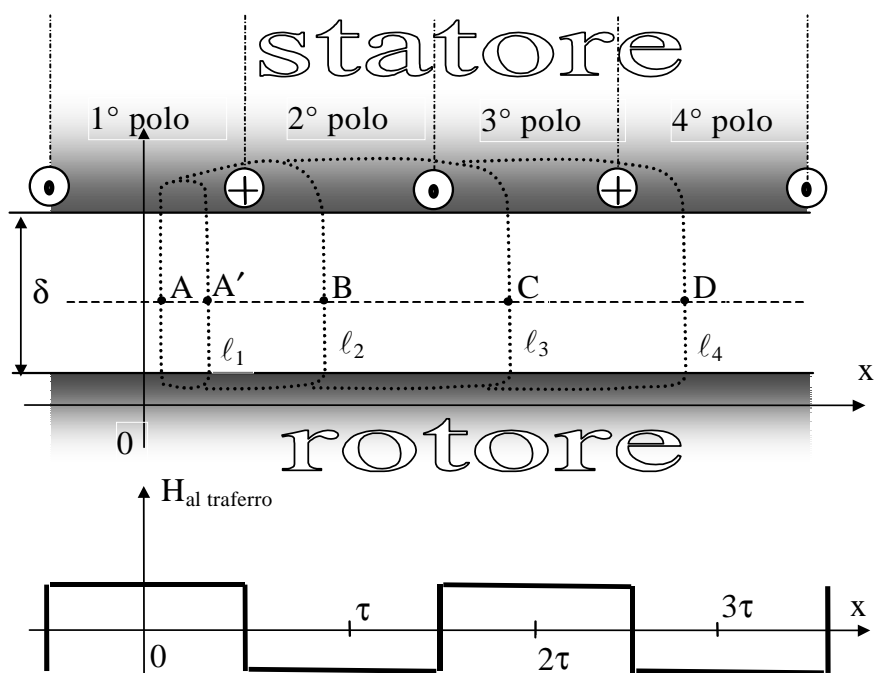
### Campo magnetico generato da una fase avente una sola cava per polo

Supponiamo per ora che la corrente della fase sia costante nel tempo (C.C.) e che in ogni cava vi siano  $n$  conduttori.

Per la prima ipotesi di campo, che poniamo alla base del calcolo di  $H$  al traferro si ha:

$$H_{\text{ferro}} = \frac{B_{\text{ferro}}}{\mu_{\text{ferro}}} = 0 \quad (1)$$

La seconda ipotesi di campo consiste nel trascurare l'“effetto di dentatura” e in particolare le componenti tangenziali del campo magnetico al traferro.



*“Lungo la periferia del traferro H è costante a tratti”*

Infatti si considerino due punti qualsiasi A e A', nell'intervallo compreso tra la prima e la seconda cava e applichiamo la legge della circuitazione magnetica alla linea chiusa  $\ell_1$ .

$$H_A \cdot \delta - H_{A'} \cdot \delta = 0 \quad (2) \Rightarrow H_A = H_{A'} \quad (3)$$

*“Nel passaggio da un polo al polo adiacente H subisce una discontinuità pari a  $ni/\delta$ ”*

[si chiama polo l'intervallo tra due cave di figura] Infatti applicando la legge della circuitazione magnetica a un generico percorso chiuso  $\ell_2$  che varca il traferro in corrispondenza dei punti A e B, risulta:

$$H_A \cdot \delta - H_B \cdot \delta = ni \quad (4) \Rightarrow H_A - H_B = \frac{ni}{\delta} \quad (5)$$

*“A poli alterni il campo H riprende lo stesso valore”*

Infatti applicando la legge della circuitazione magnetica lungo la linea chiusa  $\ell_3$  che varca il traferro in corrispondenza dei punti A e C, si ha:

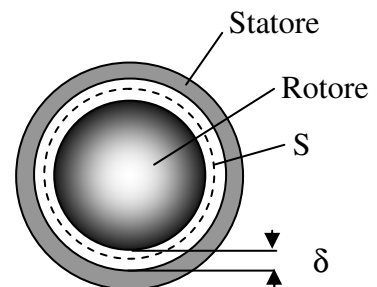
$$H_A \cdot \delta - H_C \cdot \delta = 0 \quad (6) \Rightarrow H_A = H_C \quad (7)$$

*“Il valore assoluto del campo magnetico H è costante al traferro e pari a  $ni/2\delta$ ”*

Ricordando che  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ , applichiamo il teorema della divergenza a una superficie cilindrica S situata tra statore e rotore e coassiale ad essi. Trascurando gli “effetti di bordo” alle estremità della macchina, risulta:

$$2[(\mu_0 H_A)(l\tau) + (\mu_0 H_B)(l\tau)] = 0 \quad (8)$$

$$\Rightarrow H_A = -H_B \quad (9)$$

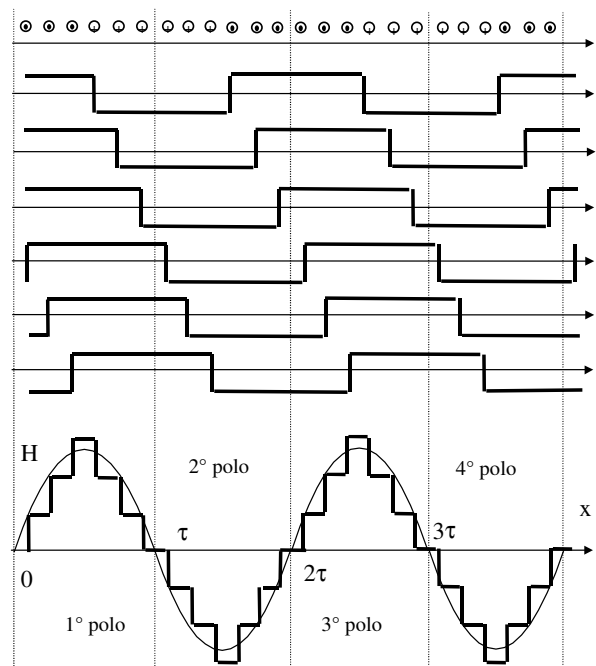


ove  $l$  è la lunghezza assiale della macchina. Facendo sistema tra la (5) e la (9), si ha quindi:

$$H_A = \frac{ni}{2\delta} \quad (10) \Rightarrow H_B = -\frac{ni}{2\delta} \quad (11)$$

A tale campo occorre sommare i contributi di tutti i conduttori giacenti sotto i vari poli; in totale si ottiene un diagramma a scalini. Preso un riferimento con l'origine nel centro della prima fase: rispetto ad esso il diagramma a scalini è una funzione periodica di periodo  $2\tau$  [ $\tau$  è detto “semipasso polare”] e può scomporsi in serie di Fourier (cioè una serie di seni e coseni di frequenza crescente), di cui considereremo solo la prima armonica. Vista la scelta dell'origine, si ha dunque:

$$H(x) = H_M \cos\left(\frac{\pi x}{\tau}\right)$$



Le (10), (11) determinano completamente il campo al traferro generato da una fase avente una sola cava per polo, il cui andamento è riportato in figura in funzione dell'ascissa corrente  $x$ . A tale campo sostituiremo, d'ora in poi, la prima armonica della serie di Fourier la cui ampiezza vale

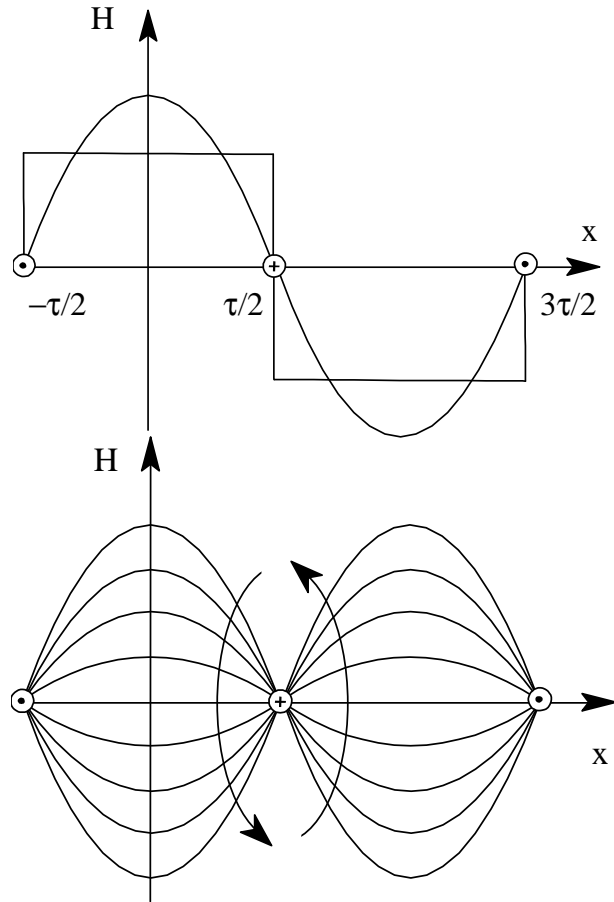
$$H_M = \frac{4 n i}{\pi 2 \delta} \quad (12)$$

Se, come è in effetti, la corrente della fase è alternata, tutto quanto si è detto vale in ogni istante e pertanto il campo magnetico varia nel tempo, avendo la configurazione di un'onda stazionaria i cui nodi si realizzano in corrispondenza delle cave.

L'ampiezza massima del campo magnetico si realizza in un "ventre", al centro del polo, e vale

$$H_M = \frac{2\sqrt{2} n I}{\pi \delta} \quad (13)$$

ove  $I$  è il valore efficace della corrente della fase.



Riferendo l'onda stazionaria di campo al sistema di riferimento con origine in un ventre, la sua equazione diventa:

$$H(x, t) = H_M \cos(\omega t) \cos\left(\frac{\pi x}{\tau}\right) \quad (14)$$

avendo supposto che  $i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t)$ . La (14) è l'equazione di un campo alternativo, cioè di un campo distribuito con legge sinusoidale lungo il traferro e che ha ampiezza variabile sinusoidalmente nel tempo. La (14) può anche scriversi nella forma:

$$H(x, t) = \frac{1}{2} H_M \cos\left(\omega t - \frac{\pi x}{\tau}\right) + \frac{1}{2} H_M \cos\left(\omega t + \frac{\pi x}{\tau}\right) \quad (15)$$

o anche

$$H(x, t) = \frac{1}{2} H_M \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \frac{1}{2} H_M \cos \omega \left( t + \frac{x}{v} \right) \quad (16)$$

avendo posto

$$v = \frac{\omega \tau}{\pi} \quad (17)$$

La (17) mostra un risultato già noto dalla Fisica: "Un'onda stazionaria si può sempre decomporre in due onde traslanti, una progressiva (velocità  $v$  diretta secondo  $x$ ) e una regressiva (velocità  $v$  diretta secondo  $-x$ )". [Si può cioè decomporre il campo alternativo in due campi di ampiezza costante, ma ruotanti a velocità costanti e opposte] Nel caso in esame tali onde sono indicate come campi rotanti

(diretto ed inverso). Essi sono campi di ampiezza costante rotanti al traferro con velocità angolare costante. A parte il differente verso di rotazione, i due campi hanno la stessa velocità angolare  $\omega_c$  in modulo:

$$\omega_c = \frac{v}{R} = \frac{\omega\tau}{\pi R} \quad (18)$$

Tenendo conto del fatto che  $2\pi R = 2p\tau$ , dove  $R$  è il raggio al traferro,  $p$  il numero di coppie polari, si ha inoltre:

$$\omega_c = \frac{\omega}{p} \quad (19) \quad \text{o anche} \quad n'_c = \frac{60f}{p} \quad (20)$$

dove  $n'_c$  il numero di giri al minuto primo. Se  $f$  è la frequenza industriale di rete, pari a 50 Hz, e supponiamo  $2p = 4$ , si ottiene  $n'_c = 1500$ . Quindi in una macchina a quattro poli, alimentata alla frequenza di 50 Hz, i campi ruotano a 1500 giri al minuto.

### **Campo magnetico generato da una fase avente $q$ cave per polo**

Quanto si è esposto al paragrafo precedente si generalizza a una fase avente un generico numero  $q$  di cave per polo. In tal caso infatti dovremo sommare  $q$  contributi sinusoidali “spostati di una cava” l’uno rispetto all’altro. L’ampiezza del campo risultante è in questo caso:

$$H_M = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} k_a \frac{nqI}{\delta} \quad (21)$$

Nella (21)  $k_a$  (coefficiente di avvolgimento) è compreso tra zero e uno e tiene conto del fatto che i  $q$  contributi che si sommano sono sfasati l’uno rispetto all’altro di un “angolo elettrico  $\alpha$ ” corrispondente al passo  $\tau_c$  di cava. Si può dimostrare che:

$$k_a = \frac{\text{sen} \frac{q\alpha}{2}}{q \cdot \text{sen} \frac{\alpha}{2}} \quad (22) \quad \text{essendo} \quad \alpha = \pi\tau_c/\tau \quad (23)$$

### **Campo al traferro generato dalle tre fasi**

Le correnti delle tre fasi costituiscono un sistema equilibrato con pulsazione  $\omega$  e pertanto sono esprimibili con le relazioni:

$$i_1(t) = I_M \cos(\omega t), \quad i_2(t) = I_M \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \quad i_3(t) = I_M \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \quad (24)$$

Tenuto conto che le fasi sono spostate di  $2\pi/3$  una rispetto all’altra, dalle (14) e (24) si deducono le espressioni dei campi parziali generati da ognuna di esse:

$$\begin{aligned} H_1(x, t) &= H_M \cos(\omega t) \cos\left(\frac{\pi x}{\tau}\right) &= \frac{H_M}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{\tau} - \omega t\right) + \frac{H_M}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{\tau} + \omega t\right) \\ H_2(x, t) &= H_M \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{\tau} - \frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{H_M}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{\tau} - \omega t\right) + \frac{H_M}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{\tau} + \omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \\ H_3(x, t) &= H_M \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{\tau} - \frac{4\pi}{3}\right) &= \frac{H_M}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{\tau} - \omega t\right) + \frac{H_M}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{\tau} + \omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Sommando membro a membro

$$H = \frac{3}{2} H_M \cos\left(\frac{\pi x}{\tau} - \omega t\right) + 0$$

In altri termini nella somma dei contributi di campo delle varie fasi, i campi inversi si elidono, quelli diretti si sommano. In definitiva le tre fasi generano un unico campo rotante diretto espresso da

$$H(x, t) = H_{Mt} \cos\left(\frac{\pi x}{\tau} - \omega t\right) \quad (28) \quad \text{ove} \quad H_{Mt} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} k_a \frac{nqI}{\delta}$$

Ponendo nella (28)  $x = 0$  (ossia, considerando un osservatore nel primo ventre dell'onda stazionaria della prima fase), risulta

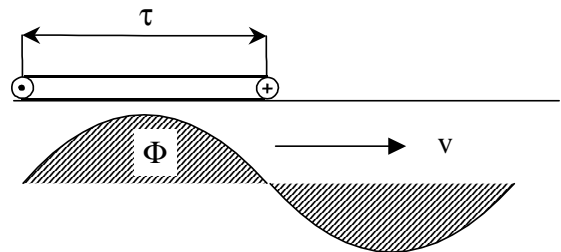
$$H(0, t) = H_{Mt} \cos(\omega t) \quad (29)$$

Dalle (24) e (29) si trae che per l'osservatore "centrale" della prima fase (analogamente per le altre) campo e corrente sono in fase. Si conclude che: il campo rotante transita con la sua ordinata massima davanti al centro di fase, quando in quella fase la corrente è massima.

### f.e.m. indotta in una fase da un campo rotante

Si consideri ora un generico campo rotante che transita con velocità  $v$  di fronte ad una spira, ferma, di passo  $\tau$  uguale a quello del campo stesso. Nella spira si induce una f.e.m. sinusoidale il cui valore efficace  $E_s$  vale:

$$E_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega \Phi \quad (30)$$



ove  $\omega$  è la pulsazione della f.e.m. indotta

$$\omega = \frac{\pi v}{\tau} \quad (31)$$

e  $\Phi$  è il flusso relativo ad un polo di campo rotante e rappresenta, ovviamente, il valore massimo del flusso concatenato con la spira. Se l'avvolgimento è costituito da  $N$  conduttori attivi (corrispondenti a  $N/2$  spire), la f.e.m. sinusoidale indotta in esso dal campo rotante è:

$$E = \frac{\omega}{2\sqrt{2}} k_a N \Phi \quad (32)$$

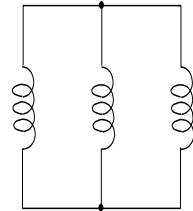
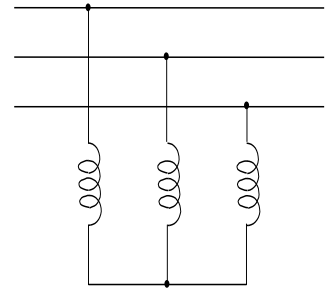
Ove  $k_a$  è lo stesso coefficiente che compare nella (21) ed è presente per tenere conto del fatto che le f.e.m. indotte in spire adiacenti sono uguali in modulo, ma sfasate dell'angolo  $\alpha$  espresso dalla (23).

## MACCHINE ASINCRONE

Consideriamo dapprima il caso di macchine asincrone con rotore avvolto. In esse statore e rotore hanno un avvolgimento dello stesso tipo (di regola trifase).

L'avvolgimento di statore [ad esempio collegato a stella come indicato in figura] è alimentato da una linea, l'avvolgimento di rotore è chiuso in cortocircuito.

La simmetria della macchina fa sì che, alimentando la macchina con un sistema simmetrico di tensioni, si ottenga un sistema equilibrato di correnti, sia nello statore che nel rotore.



### Funzionamento intuitivo

Si può illustrare con la seguente "catena logica":

$$\begin{matrix} \sphericalangle & \sphericalangle & & \sphericalangle & \sphericalangle & & \sphericalangle \\ V & \rightarrow & I_s & \rightarrow & \vec{B}_s & \rightarrow & E_r & \rightarrow & I_r & \rightarrow & \vec{B}_r & \rightarrow & \vec{B} = \vec{B}_s + \vec{B}_r \end{matrix} \quad (33)$$

dove  $\sphericalangle$  indica un sistema simmetrico (di tensioni) o equilibrato (di correnti),  $\vec{\phantom{B}}$  indica il campo rotante ed i pedici s ed r indicano statore e rotore, rispettivamente.

La (32) mostra come il rotore reagisce all'azione inducente dello statore con un campo rotante  $B_r$  che si somma a quello  $B_s$  di statore a generare il campo rotante complessivo  $B$ . Ciò è possibile in quanto, come ora mostreremo, i due campi  $B_r$  e  $B_s$  ruotano con uguale velocità e risultano pertanto immobili uno rispetto all'altro. A chiarimento di quanto esposto definiamo innanzitutto lo scorrimento s:

$$s = \frac{\omega_c - \omega_m}{\omega_c} \quad (34)$$

ove  $\omega_c$  campo rotante di statore e  $\omega_m$  è la velocità angolare del rotore. Lo scorrimento è quindi il rapporto tra le velocità angolare relative (rispetto al rotore) e assoluta del campo rotante di statore. La pulsazione  $\omega_r$  delle f.e.m. indotte da  $B_s$  nel rotore è:

$$\omega_r = s\omega \quad (35)$$

infatti, per le (19) e (34), si ha:  $\omega_r = p(\omega_c - \omega_m) = p s \omega_c = s \omega$ . Ciò premesso la velocità angolare assoluta di  $B_r$  si può calcolare come somma della velocità relativa rispetto al rotore  $s\omega_c$  e della velocità del rotore stesso:

$$s\omega_c + \omega_m \stackrel{(34)}{=} s\omega_c + (1-s)\omega_c \stackrel{(19)}{=} \frac{\omega}{p} \quad (36)$$

Anche nel caso della macchina asincrona, come già per i trasformatori, si ha quindi un unico campo principale che si concatena con entrambi i circuiti (nel caso in questione di statore e di rotore).

### Teorema di Equivalenza delle macchine Asincrone (cenno)

La legge di Ohm si applica facilmente ad una fase di statore e di rotore (per le altre fasi il discorso resta inalterato salvo introdurre un opportuno sfasamento di  $2\pi/3$  o  $4\pi/3$ ) e porta a scrivere le seguenti equazioni:

$$\underline{V}_1 = (R_1 + jX_{d1})\underline{I}_1 + j\omega k_{a1} \frac{N_1}{2} \underline{\Phi} \quad [\text{alla frequenza } f] \quad (37)$$

$$0 = (R_2 + jsX_{d2})\underline{I}_2 + j\omega k_{a2} \frac{N_2}{2} \underline{\Phi} \quad [\text{alla frequenza sf}] \quad (38)$$

ove il significato dei simboli è analogo a quanto visto per i trasformatori, in particolare  $X_{d1}$  e  $X_{d2}$  sono reattanze di dispersione (di statore e rotore) valutate entrambe alla frequenza di alimentazione dello statore. Si noti che le (37) e (38) non sono isofrequenziali [a causa della (35)] e quindi non sono direttamente confrontabili. Questa difficoltà si può aggirare con il Teorema di Equivalenza.

**“Una macchina Asincrona in funzionamento stazionario (con le fasi di rotore in cortocircuito) ad una generica velocità equivale, sotto il profilo del funzionamento elettrico, alla stessa macchina mantenuta a rotore bloccato ma con le fasi di rotore che alimentano ciascuna una resistenza pari a  $R_2(1-s)/s$ , essendo  $R_2$  la resistenza di una fase rotorica”.**

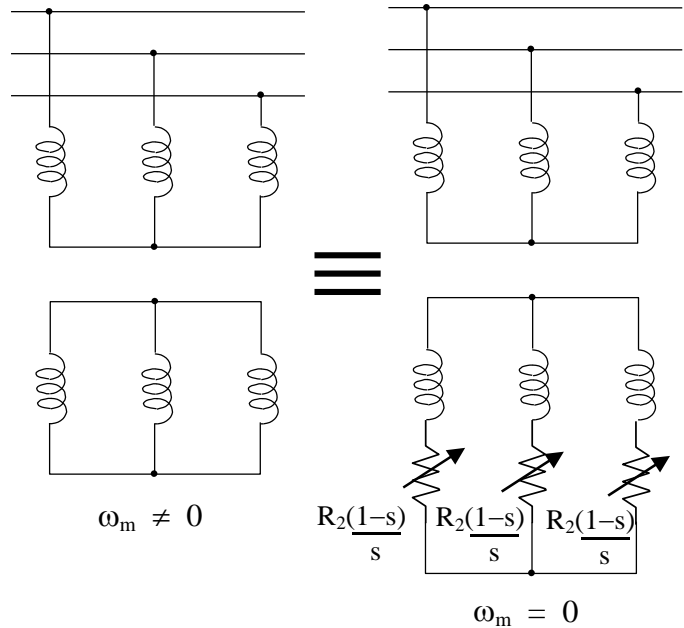
Tale equivalenza, indicata simbolicamente in figura, è da intendersi nel senso che tutte le grandezze in gioco, a parte la frequenza del rotore, restano uguali nei due casi.

Tralasciando la dimostrazione rigorosa del teorema, limitiamoci ad alcune considerazioni approssimate.

Le equazioni di statore e rotore si scrivono, per la macchina “equivalente”, nel seguente modo:

$$\underline{V}_1 = (R_1 + jX_{d1})\underline{I}_1 + j\omega k_{a1} \frac{N_1}{2} \underline{\Phi} \quad (37')$$

$$0 = \left( \frac{R_2}{s} + jX_{d2} \right) \underline{I}_2 + j\omega k_{a2} \frac{N_2}{2} \underline{\Phi} \quad (38')$$



Dal confronto tra (37) e (38) con (37') e (38') si ha, trascurando le cadute statoriche:

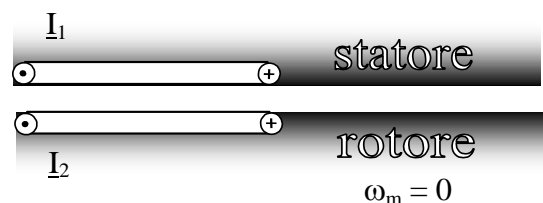
$$\text{a pari } \underline{V}_1 \rightarrow \text{pari } \underline{\Phi} \rightarrow \text{pari } \underline{I}_2 \rightarrow \text{pari } \widehat{B}_r$$

Si conclude che la “reazione magnetica” del rotore (che si concretizza in  $\widehat{B}_r$ ) è la stessa nei due casi e lo statore non “avverte” quindi alcuna differenza fra i due funzionamenti.

D’ora in poi faremo sempre riferimento, per comodità, alle equazioni (37') e (38') che hanno il vantaggio di essere isofrequenziali. Ciò facilita anche la scrittura della terza equazione (interazione magnetica statore-rotore) che risulta:

$$k_{a1}N_1\underline{I}_1 + k_{a2}N_2\underline{I}_2 = R \underline{\Phi} \quad (40)$$

Tralasciamo la dimostrazione rigorosa della (40), osservando che essa ha un contenuto intuitivo se si fa riferimento alla figura, ove sono schematicamente indicate due fasi corrispondenti della macchina equivalente.



### Equazioni Interne

In conclusione le equazioni interne della macchina asincrona risultano:

Le (41), (42), (43), che valgono nel caso in cui statore e rotore abbiano ugual numero di fasi, presentano una notevole analogia con le equazioni del trasformatore e pertanto analoghe sono le considerazioni che da esse si possono trarre.

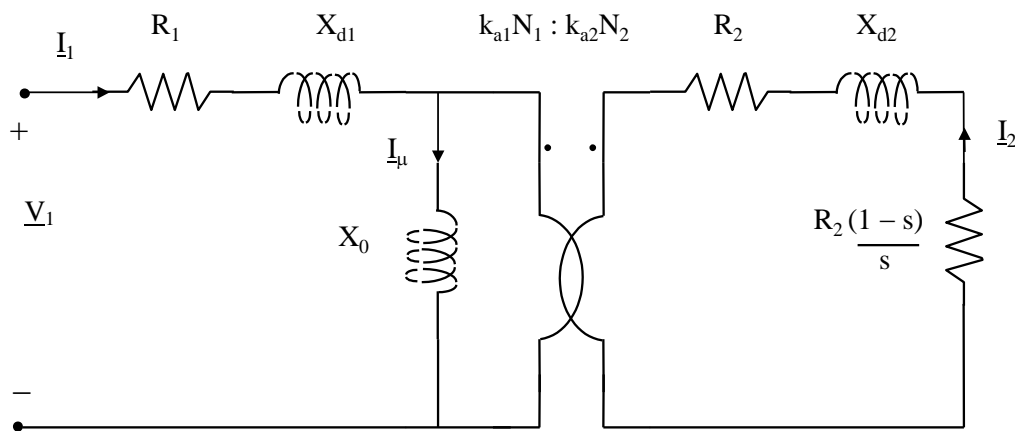
$$\underline{V}_1 = (\underline{R}_1 + j\underline{X}_{d1})\underline{I}_1 + j\omega k_{a1} \frac{N_1}{2} \underline{\Phi} \quad (41)$$

$$0 = \left( \underline{R}_2 \frac{1-s}{s} + \underline{R}_2 + j\underline{X}_{d2} \right) \underline{I}_2 + j\omega k_{a2} \frac{N_2}{2} \underline{\Phi} \quad (42)$$

$$k_{a1} N_1 \underline{I}_1 + k_{a2} N_2 \underline{I}_2 = \underline{R} \underline{\Phi} \quad (43)$$

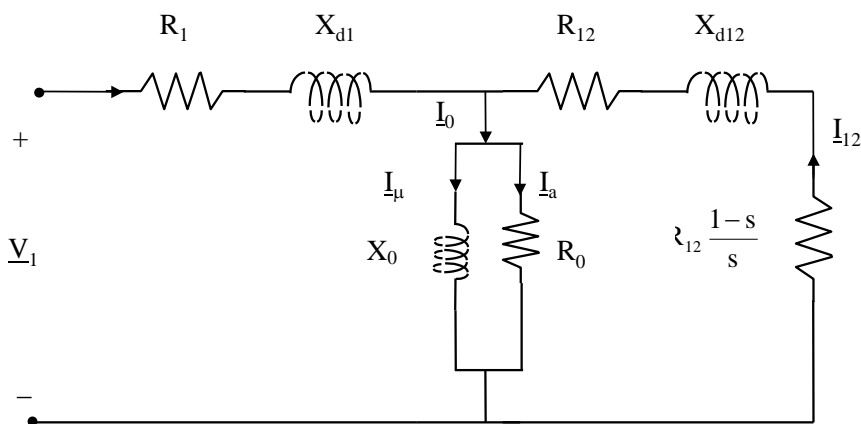
### Rete Equivalente

In particolare, con un procedimento del tutto analogo a quello relativo ai trasformatori, si determina, a partire dalle (41), (42), (43) la rete equivalente della macchina asincrona. Le formule di “riduzione da rotore a statore” coincidono con quelle di “riduzione da secondario a primario” del trasformatore, salvo sostituire  $k_a N$  a  $N$ .



*Circuito equivalente per una fase della macchina asincrona  
(trascurando le perdite nel ferro)*

È bene precisare inoltre che è possibile tenere conto delle perdite nel ferro, in modo analogo a quanto si fa per i trasformatori, modificando la rete equivalente della macchina asincrona ponendo in parallelo ad  $X_0$  una opportuna resistenza  $R_0$  percorsa da una corrente  $I_a$  denominata componente attiva della corrente a vuoto  $I_0$ .



*Circuito elettrico equivalente della macchina asincrona riferito ad una fase di statore.*

### Coppia



La resistenza fittizia  $R_2(1-s)/s$  simula il carico meccanico, per cui la potenza dissipata su essa rappresenta la potenza meccanica  $P_m$ :

$$P_m = 3R_2 \frac{1-s}{s} I_2^2 = \frac{3s(1-s)R_2 E_2^2}{R_2^2 + s^2 X_{d2}^2} \quad (44)$$

ove si è posto

$$E_2 = \frac{\omega}{2\sqrt{2}} k_{a2} N_2 \Phi \quad (45)$$

dalla (44) si ottiene la coppia  $C$  dividendo per la velocità angolare:

$$C = \frac{P_m}{\omega_m} = \frac{p}{\omega(1-s)} \frac{3s(1-s)R_2 E_2^2}{R_2^2 + s^2 X_{d2}^2} \quad (46)$$

in definitiva la coppia risulta (per una macchina trifase):

$$C = \frac{3p}{\omega} \frac{sR_2 E_2^2}{R_2^2 + s^2 X_{d2}^2} \quad (46) \quad \text{[e per una macchina a } m \text{ fasi: ]}$$

$$C = \frac{mp}{\omega} \frac{sR_2 E_2^2}{R_2^2 + s^2 X_{d2}^2}$$

ove la  $E_2$ , espressa dalla (45), rappresenta la f.e.m. indotta nella fase di rotore per  $s = 1$ . A tensione di alimentazione costante ( $V_1 = \text{cost.}$ ) essa può ritenersi costante:

$$V_1 = \text{cost.} \quad \stackrel{(41)}{\Rightarrow} \quad \Phi \cong \text{cost.} \quad \stackrel{(45)}{\Rightarrow} \quad E_2 \cong \text{cost.} \quad (48)$$

*trascurando  
le cadute*

La (48) mostra che anche per le macchine asincrone (come già per i trasformatori) il flusso varia poco al variare del carico.

### Caratteristica Meccanica

Si intende ora evidenziare graficamente l'andamento della caratteristica  $C(s)$  dato dalla (47). Si noti che:

- \* la caratteristica è antisimmetrica, cioè  $C(-s) = -C(s)$
- \* per  $s \gg 1$ , si ha  $C \cong \frac{k}{s}$ , con  $k = \frac{3p}{\omega} \frac{R_2 E_2^2}{X_{d2}^2}$
- \* la coppia si annulla per  $s = 0$
- \* il punto di massimo della caratteristica si può trovare annullando la derivata rispetto ad  $s$  della (47) oppure, più semplicemente, determinando il punto di minimo del denominatore  $sX_{d2}^2 + R_2^2/s$ . Annullando la derivata di quest'ultimo rispetto ad  $s$  si ha  $X_{d2}^2 - R_2^2/s^2 = 0$ . Il massimo della coppia si ha per  $s = R_2/X_{d2}$  e vale:

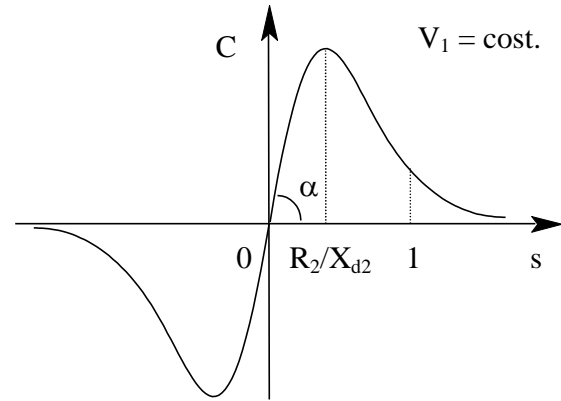
$$C_{\max} = \frac{3p}{\omega} \frac{E_2^2}{2X_{d2}}$$

Si noti che la  $C_{\max}$  non dipende da  $R_2$ , ma solo dalla reattanza di dispersione

\* la coppia di spunto, in  $s = 1$ , è diversa da zero e dipende dalla resistenza rotorica  $R_2$ :

$$C_{sp} = \frac{3p}{\omega} \frac{R_2 E_2^2}{R_2^2 + X_{d2}^2}$$

Queste considerazioni sono sufficienti a costruire la curva caratteristica  $C(s)$ , illustrata in figura, che viene detta caratteristica meccanica della macchina asincrona.



*Caratteristica meccanica di una macchina asincrona in funzione dello scorrimento.*

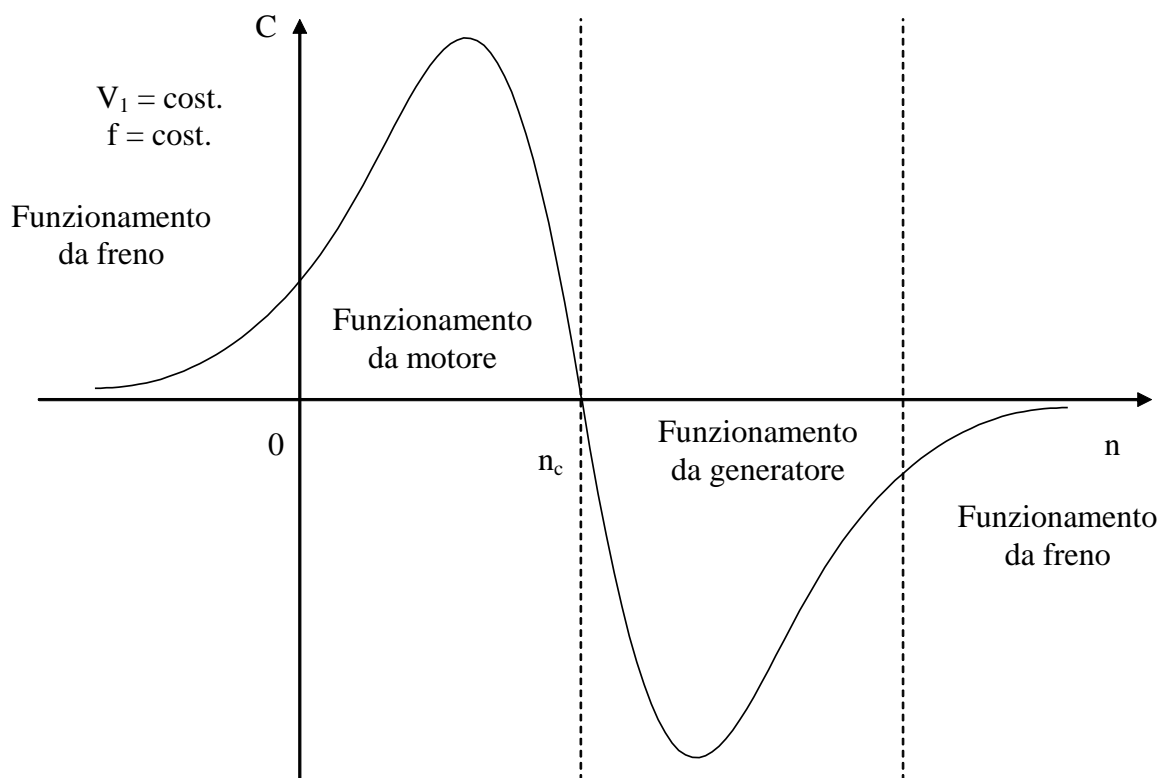
La caratteristica meccanica di una macchina asincrona può essere anche rappresentata in funzione del numero di giri. La velocità angolare del rotore  $n$  in numero di giri al minuto è data da  $n = 60 \omega_m / 2\pi$ . Poiché si ha  $\omega_m = \omega_c (1-s)$  ed inoltre  $\omega_c = \omega/p = 2\pi f/p$ , lo scorrimento  $s$  è legato ad  $n$  e alla frequenza  $f$  dalle relazione

$$n = \frac{60f}{p} (1-s)$$

La velocità angolare del campo rotante  $n_c$ , in numero di giri al minuto è  $n_c = 60f/p$ .

Sono possibili tre modalità di funzionamento:

- Funzionamento da motore: quando il rotore ruota nello stesso verso di rotazione del campo ma con velocità angolare minore; la potenza elettrica viene assorbita dalla rete di alimentazione dello statore e, a meno delle perdite interne, viene trasformata in potenza meccanica, portando in rotazione un carico meccanico che si oppone al moto.
- Funzionamento da generatore: quando il rotore ruota nello stesso verso di rotazione del campo ma con velocità angolare maggiore, entro un limite massimo; questo funzionamento può avvenire se la coppia motrice è di tipo meccanico, ad esempio se all'albero della macchina asincrona è collegata una turbina eolica. In questo caso la potenza meccanica viene assorbita e, a meno delle perdite interne, viene trasformata in potenza elettrica ceduta alla rete di alimentazione dello statore.
- Funzionamento da freno: quando il rotore ruota nel verso opposto a quello di rotazione del campo, oppure nel verso di rotazione del campo ma con velocità elevata; in questo caso la coppia di origine elettromagnetica si oppone al moto e la potenza meccanica viene assorbita e completamente trasformata in calore, dato che la macchina, in questa condizione di funzionamento, assorbe anche potenza elettrica dalla rete di alimentazione dello statore.



*Caratteristica meccanica di una macchina asincrona in funzione del numero di giri.*

### Equazioni esterne

Le variabili che definiscono univocamente il regime di funzionamento della macchina asincrona, tenendo conto del teorema di equivalenza, sono la pulsazione statorica  $\omega$ , la velocità di rotazione  $\omega_m$  (da cui si ricava il valore dello scorrimento  $s$ ), la tensione statorica  $\underline{V}_1$ , la corrente statorica  $\underline{I}_1$ , la corrente rotorica  $\underline{I}_2$ , ed il flusso principale  $\underline{\Phi}$  concatenato con la spira centrale statorica. Il valore di tali variabili può essere determinato risolvendo il sistema costituito dalle 3 equazioni interne complesse (41-42-43) e dalle equazioni esterne che individuano l'accoppiamento della macchina stessa con l'ambiente esterno. Un primo gruppo di equazioni individua l'alimentazione elettrica della macchina; ad esempio, se la macchina è alimentata a statore da una rete avente tensione concatenata e frequenza assegnata, rispettivamente pari a  $V_{10}$  ed  $f_0$ , risulta:

$$V = V_{10} ; \quad f = f_0 \quad (51)$$

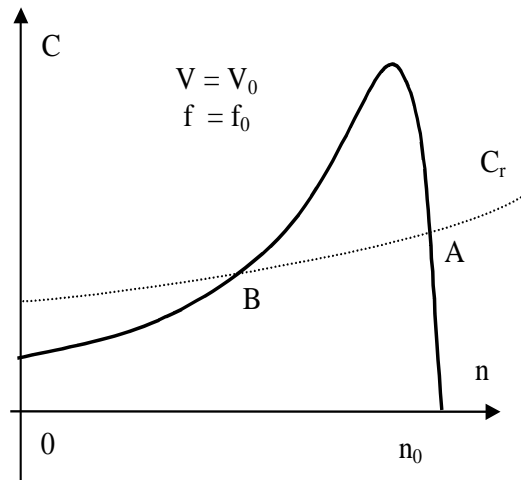
L'equazione del moto del rotore impone a regime l'uguaglianza fra la coppia di origine elettromagnetica  $C_e$ , data dalla equazione (46) e la coppia resistente di origine meccanica  $C_r$  applicata all'albero, che è una funzione nota della velocità di rotazione:

$$C_e = C_r \quad (52)$$

Si noti che il funzionamento di regime (in cui  $C = C_r$ ) della macchina asincrona (nel punto A di figura) è stabile. Infatti, la velocità angolare del rotore (ovvero il numero di giri al minuto  $n = 60 \omega_m / 2\pi$ ) è determinata dall'equazione

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = C - C_r$$

dove  $J$  è il momento di inerzia del rotore. Se a partire da  $A$  si ha, per qualunque ragione, una variazione positiva di  $\omega_m$  la coppia motrice cala e quella resistente cresce quindi  $C - C_r < 0$  ed il rotore tende a rallentare. Viceversa, se a partire da  $A$  si ha, per qualunque ragione, una variazione negativa di  $\omega_m$  la coppia motrice cresce e quella resistente cala quindi  $C - C_r > 0$  ed il rotore tende a accelerare per riportarsi in  $A$ . Si noti inoltre che il punto di funzionamento  $B$  (anch'esso di equilibrio) è instabile.



### Caratteristica Elettromeccanica

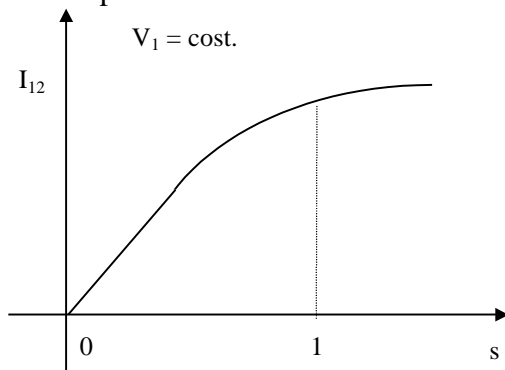
Dalla (42), ricordando il Teorema di Equivalenza, è possibile esprimere il valore efficace della corrente rotorica  $\underline{I}_2$ :

$$I_2 = \frac{|s|}{\sqrt{R_2^2 + s^2 X_{d2}^2}} \left( \omega k_{a2} \frac{N_2}{2} \Phi \right) \quad (49)$$

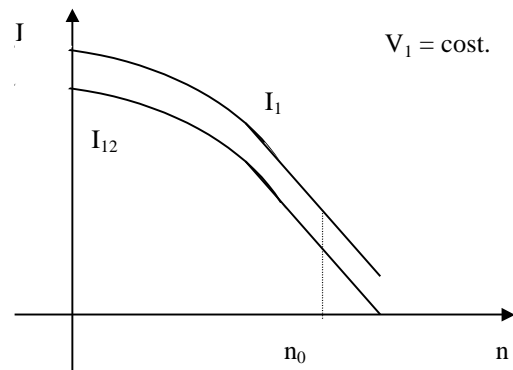
Da questa relazione è possibile calcolare il valore efficace della corrente rotorica ridotta a statore  $\underline{I}_{12}$ :

$$I_{12} = \frac{|s|}{\sqrt{R_2^2 + s^2 X_{d2}^2}} \frac{\frac{\omega}{2} (k_{a2} N_2)^2 \Phi}{k_{a1} N_1} \quad (50)$$

La (50) rappresenta la caratteristica elettromeccanica di rotore. Si noti che tale caratteristica è simmetrica, cioè  $I_{12}(-s) = I_{12}(s)$ . Pertanto in figura è illustrata la caratteristica elettromeccanica solo per scorrimenti positivi.



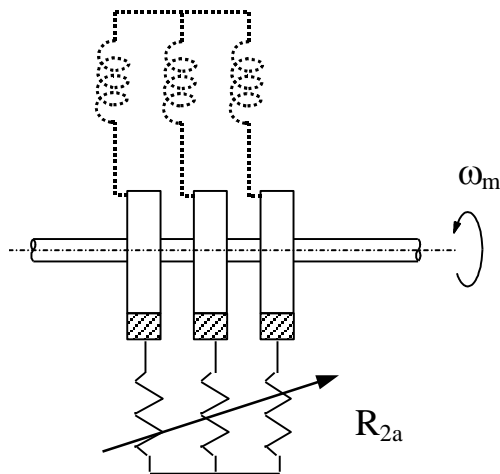
*Caratteristica elettromeccanica di rotore in funzione dello scorrimento.*



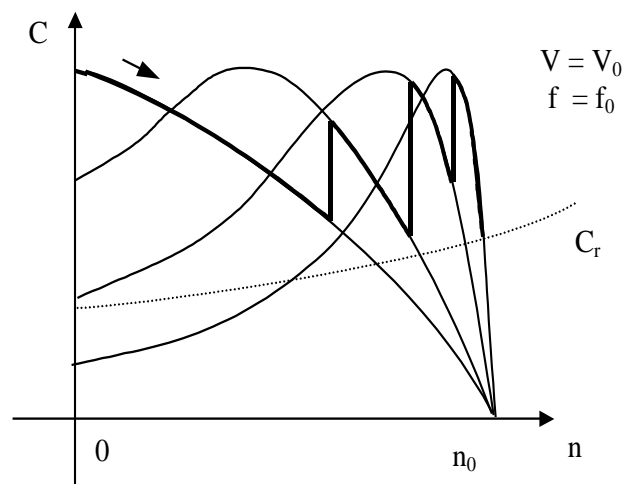
*Caratteristica elettromeccanica di statore e di rotore in funzione del numero di giri.*

Le caratteristiche elettromeccaniche di statore e di rotore in funzione del numero di giri, ricavabili dalla soluzione del circuito equivalente di figura 6.2 in corrispondenza di un assegnato valore della tensione e della frequenza di alimentazione, sono illustrate nella figura. È chiaro che un ulteriore problema che si verifica all'avviamento del motore asincrono è rappresentato dall'elevato valore delle correnti assorbite sia a statore che a rotore, rispetto al valore corrispondente al funzionamento a regime.

Si nota, dalle caratteristiche meccanica ed elettromeccanica che allo spunto ( $s = 1, n = 0$ ) la coppia è di solito modesta mentre le correnti sono elevate. Infatti, la corrente allo spunto può risultare anche cinque volte maggiore della corrente a regime. Sia la coppia che la corrente allo spunto dipendono dalla resistenza rotorica: in particolare, al crescere della resistenza rotorica, la coppia elettromagnetica cresce e la corrente, sia statorica che rotorica, cala. Per i motori con rotore avvolto è quindi possibile innalzare la coppia e ridurre la corrente allo spunto, collegando, mediante un collettore ad anelli (vedi figura), l'avvolgimento rotorico ad un reostato di avviamento, in tal modo aumentando la resistenza rotorica. In figura è illustrata la progressiva variazione della caratteristica meccanica che si realizza durante questo tipo di avviamento. Raggiunto il regime di funzionamento richiesto il reostato viene escluso (per evitare una eccessiva perdita Joule che abbasserebbe il rendimento) e sostituito dalle connessioni di cortocircuito.



Schema del reostato di avviamento



Avviamento mediante inserzione del reostato di avviamento (3 riduzioni successive)

## Rendimento

Il rendimento di un motore viene definito come il rapporto fra la potenza meccanica erogata e la potenza elettrica assorbita. Dal teorema di equivalenza e dal circuito equivalente segue la seguente espressione del rendimento  $\eta$  di un motore asincrono trifase:

$$\eta = \frac{P_m}{P_e} = \frac{R_{12} \frac{1-s}{s} I_{12}^2}{R_1 I_1^2 + R_0 I_a^2 + R_{12} I_{12}^2 + R_{12} \frac{1-s}{s} I_{12}^2}$$

Il rendimento può essere espresso come il prodotto di due rendimenti  $\eta_r$  (rendimento rotorico, definito come il rapporto fra la potenza meccanica erogata e la potenza elettrica assorbita dal rotore) ed  $\eta_s$  (rendimento statorico, definito come il rapporto fra la potenza elettrica erogata dallo statore al rotore e la potenza elettrica assorbita) rispettivamente dati dalle seguenti espressioni:

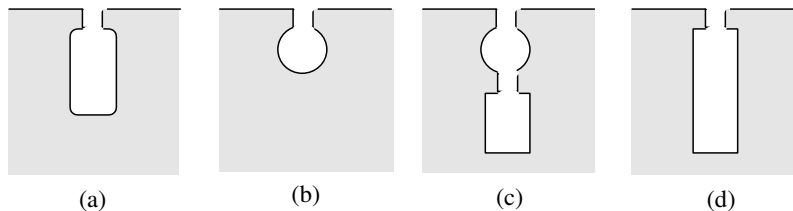
$$\eta = \eta_s \eta_r$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_s = \frac{R_{12} I_{12}^2 + R_{12} \frac{1-s}{s} I_{12}^2}{R_1 I_1^2 + R_0 I_a^2 + R_{12} I_{12}^2 + R_{12} \frac{1-s}{s} I_{12}^2} \\ \eta_r = \frac{R_{12} \frac{1-s}{s} I_{12}^2}{R_{12} I_{12}^2 + R_{12} \frac{1-s}{s} I_{12}^2} = 1-s \end{array} \right.$$

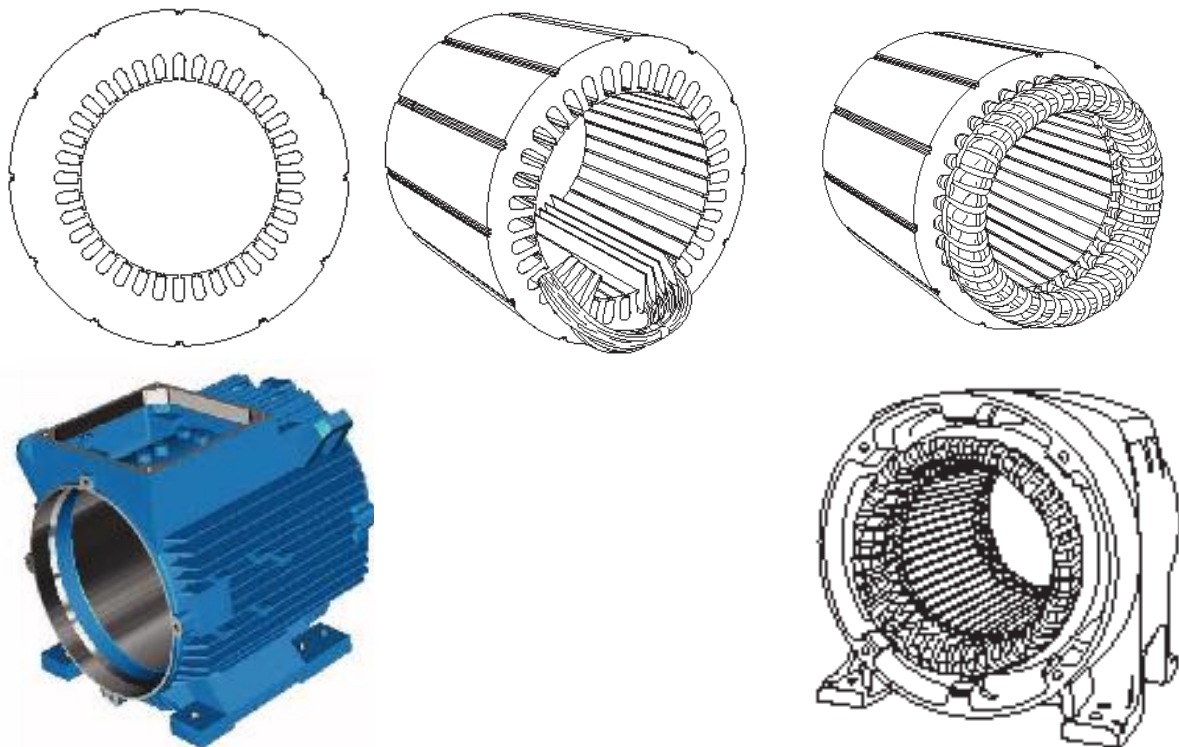
Dall'espressione del rendimento rotorico si vede come sia necessario, al fine di realizzare rendimenti elevati, che il regime di funzionamento della macchina sia caratterizzato da un valore dello scorrimento piccolo (valori tipici sono dell'ordine del  $1 \div 4 \%$ ), cosa peraltro facilmente realizzabile dato l'elevata pendenza della caratteristica meccanica in prossimità della velocità di sincronismo.

### CENNI COSTRUTTIVI: STATORE

Lo statore è formato dalla carcassa (di ghisa per basse potenze, di lamiera saldata per potenze maggiori) e dal pacco statorico nelle cui cave è alloggiato l'avvolgimento trifase destinato alla generazione del campo rotante. Il pacco statorico è formato dalla sovrapposizione di lamiere di piccolo spessore, fra loro isolate con vernici allo scopo di ridurre la potenza perduta per correnti parassite. Nelle grosse macchine, come negli alternatori, il pacco statorico viene suddiviso in più pacchi elementari per formare i canali di ventilazione al fine di rendere più efficiente il raffreddamento. Le cave statoriche sono solitamente del tipo semichiuso, il che permette di ridurre sia il flusso disperso sia le perturbazioni del campo al traferro. Le spire di ciascuna fase sono distribuite in modo tale da produrre, quando sono percorse da corrente, un'induzione di traferro ad andamento radiale distribuita spazialmente in modo approssimativamente sinusoidale. La carcassa porta una base isolante con i morsetti ai quali vengono collegati i terminali delle fasi costituenti l'avvolgimento.



*Forme più comuni di cave per macchine asincrone: (a) cava semichiusa per rotore avvolto, (b) cava per rotore a gabbia semplice, (c) cava per rotore a doppia gabbia, (d) cava per rotore a barre alte.*



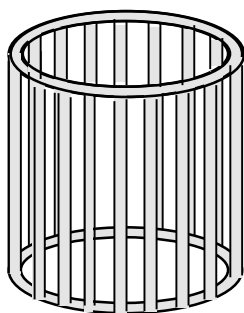
## CENNI COSTRUTTIVI: ROTORE

Il rotore è costituito essenzialmente dall'albero e dal pacco rotorico. Nei motori di potenza minore il pacco di lamiere viene montato direttamente sull'albero. Nei motori di maggiore potenza il pacco lamellare rotorico, costituito da corone circolari, viene sistemato su una superficie cilindrica collegata da nervature all'albero. Le cave, uniformemente distribuite sulla periferia del pacco rotorico sono di tipo chiuso o semichiuso. Il numero delle cave rotoriche è diverso (in generale maggiore) del numero delle cave statoriche; ciò per evitare pulsazioni periodiche del flusso da cui derivano vibrazioni e rumore durante la marcia. In particolare, al fine di agevolare l'avviamento del motore e renderlo più silenzioso in marcia, il pacco rotorico ha talvolta le cave inclinate rispetto all'asse. Questo artificio richiama i vantaggi che si ottengono in meccanica sostituendo un ingranaggio a denti dritti con un ingranaggio a denti elicoidali. Per quanto riguarda l'avvolgimento distinguiamo i **motori con rotore avvolto** ed i **motori con rotore a gabbia**.

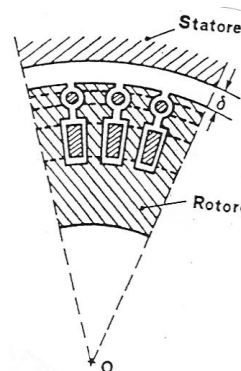
### Motori a Gabbia

Sono molto diffusi, in pratica, motori il cui rotore non è avvolto, ma è configurato a “**gabbia di scoiattolo**” (vedi figura) [Nelle cave rotoriche sono alloggiato delle sbarre di rame che vengono saldate a due anelli frontali, pure di rame, in modo da formare una gabbia, chiamata gabbia di scoiattolo. Così collegate le sbarre formano tra loro circuiti chiusi che sono percorsi dalle correnti indotte dal campo rotante.] Per essi (lo si può dimostrare) vale con buona approssimazione la normale teoria delle macchine asincrone. L'impiego del rotore a gabbia semplice avviene soprattutto per le basse potenze. Per potenze medio-basse (fino a 100 kW) può convenire realizzare la gabbia in alluminio pressofuso, per potenze maggiori la gabbia è sempre in rame.

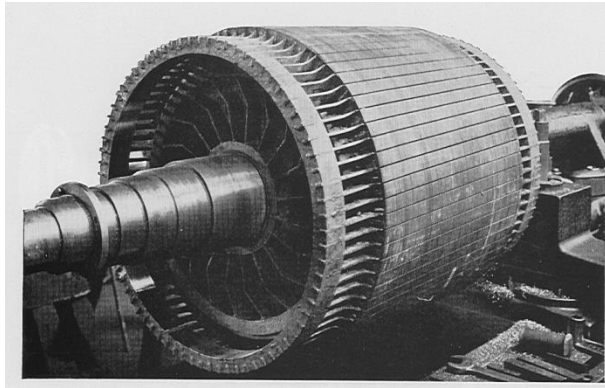
Per le potenze medie è molto diffuso il motore a Doppia Gabbia, perché è quello che presenta la maggiore elasticità nelle caratteristiche di avviamento. In questo caso il rotore è provvisto di due gabbie concentriche aventi caratteristiche opposte (vedi figura). La gabbia esterna (o di avviamento), è costituita di barre di piccola sezione aventi una elevata resistenza ed una piccola reattanza di dispersione. La gabbia interna (o di lavoro), è costituita di barre di grande sezione aventi una piccola resistenza ed una elevata reattanza di dispersione. All'avviamento la corrente circola prevalentemente nella gabbia esterna. Mano a mano che la macchina accelera e diminuisce la frequenza delle correnti di rotore, diminuisce la reattanza di dispersione e la corrente si sposta progressivamente sulla gabbia interna.



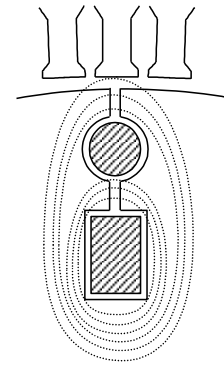
*Gabbia semplice per rotore di macchina asincrona.*



*Doppia gabbia per rotore di macchina asincrona.*



Rotore di macchina asincrona a gabbia di scoiattolo.



Particolare della doppia gabbia.

La gabbia più esterna, rispetto alla gabbia interna, è caratterizzata da un valore più elevato della resistenza (la sezione dei conduttori è più piccola), ma da un valore più piccolo del coefficiente di autoinduzione di dispersione:

$$R_e \gg R_i$$

$$L_{de} \ll L_{di}$$

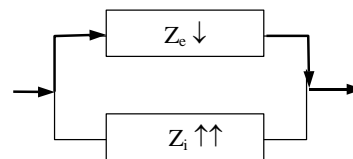
L'impedenza della doppia gabbia è data dal parallelo tra l'impedenza della gabbia interna ( $Z_i$ ) e quella della gabbia esterna ( $Z_e$ ).

$$Z_i = R_i + j s \omega L_{di}, Z_e = R_e + j s \omega L_{de} \Rightarrow Z = Z_e Z_i / (Z_e + Z_i)$$

Allo spunto ( $s = 1$ ), quando la frequenza delle correnti rotoriche coincide con quella dell'alimentazione di statore, la reattanza di dispersione della gabbia interna è molto maggiore di quella della gabbia esterna, tanto da compensare la minore resistenza e da fare sì che la corrente circoli prevalentemente nella gabbia esterna:

$$s = 1 \Rightarrow Z_e \cong R_e \ll \omega L_{di} \cong Z_i \Rightarrow Z \cong Z_e$$

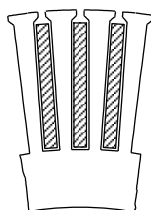
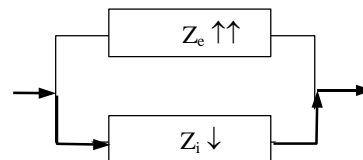
**Essendo la  $R_e$  elevata, l'avviamento è semplice (coppia di spunto elevata).**



Man mano che il motore accelera, la frequenza di rotore si riduce e con essa la reattanza di dispersione e l'impedenza delle due gabbie viene ad essere caratterizzata dal valore della resistenza: la corrente progressivamente si sposta dalla gabbia esterna a quella interna. A regime ( $s \cong 0$ ), è la resistenza della gabbia interna, che è molto minore di quella della gabbia esterna, a fare sì che la corrente circoli prevalentemente nella gabbia interna. Una regolazione analoga si può ottenere mediante l'introduzione di barre alte.

$$s \cong 0 \Rightarrow Z_e \cong R_e \gg R_i \cong Z_i \Rightarrow Z \cong Z_i$$

**Essendo la  $R_i$  ridotta, il rendimento è elevato**



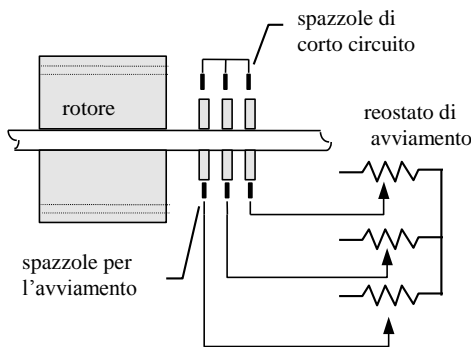
Particolare del rotore a gabbia a barre alte.

Per le potenze elevate si utilizza il motore a Barre Alte. Il rotore di questo motore, costruttivamente semplice, è provvisto di barre di forma allungata, sistemate in cave alte e strette (vedi figura) in cui si determina, all'avviamento, uno spostamento di corrente, dall'esterno verso l'interno, in modo simile a quello che si verifica nel rotore a doppia gabbia.

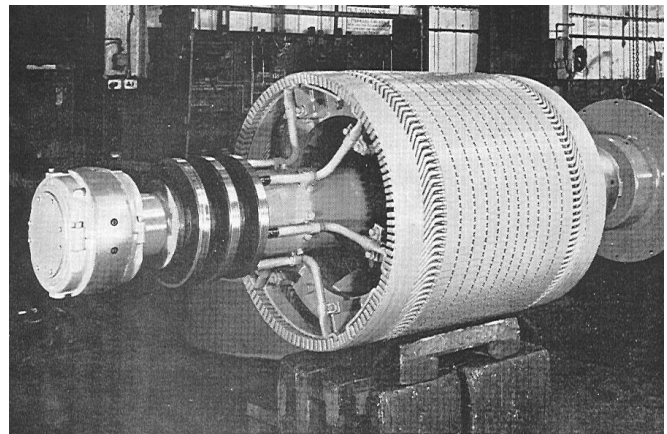
## Rotore avvolto



Nei motori asincroni con rotore avvolto (prevalentemente utilizzati nelle macchine di media e di grande potenza), nelle cave di rotore è alloggiato un avvolgimento avente lo stesso passo polare dell'avvolgimento di statore. Il numero delle fasi dell'avvolgimento di rotore può in generale essere anche diverso da quello dell'avvolgimento di statore. L'avvolgimento di rotore è collegato a stella con i terminali facenti capo a tre anelli conduttori, isolati sia tra loro che dall'albero sul quale sono calettati. Sugli anelli poggiano delle spazzole mediante le quali le fasi dell'avvolgimento rotorico vengono collegate a tre resistenze esterne, variabili, solitamente collegate a stella. Il complesso delle tre resistenze variabili forma il **reostato di avviamento**, il cui scopo principale è quello di limitare le correnti assorbite dal motore durante l'avviamento ed aumentare la coppia di spunto. La manovra di avviamento si esegue con tutte le resistenze inserite. Man mano che il motore accelera le resistenze vengono gradualmente escluse. Durante il funzionamento a regime i tre anelli vengono cortocircuitati.



Sezione longitudinale di un rotore avvolto.



Rotore di macchina asincrona avvolto.

Tutte le macchine elettriche sono dotate di una targa che fornisce importanti informazioni necessarie per la loro scelta ed il loro utilizzo. In figura è riportata la targa di un motore asincrono trifase da 30 HP della Siemens progettato per funzionare a 460 V e 60 Hz; corrente nominale 34.9 A; velocità nominale è 1.765 r.p.m., scorrimento nominale 1.9%, rendimento 93.6%. Il fattore di servizio indica che il motore può funzionare in modo intermittente ad una potenza pari a 1,15 Pn. La classe di isolamento è F (che consente una sovratemperatura massima di 105°C) e la temperatura ambiente è standardizzata a 40°C, pertanto la massima temperatura ammessa è 145 °C. La temperatura di funzionamento di un motore è importante sia per il rendimento che per la durata di vita (un incremento di 10 °C della temperatura di funzionamento può diminuire la durata di vita dell'isolante di più del 50%).

<b>SIEMENS</b>					
PE*21 PLUS™			PREMIUM EFFICIENCY		
ORD.Nº.	1LA02B64SE41		Nº.		
TYPE	RGZESD		FRAME	288T	
H. P.	30.00		SERVICE FACTOR	1.15	3 PH
AMPS	34.9		VOLTS	460	
R.P.M.	1765		HERTZ	60	
DUTY	CONT		40°C AMB.		DATE CODE
CLASS INSUL.	F	NEMA DESIGN B	K.V.A. CODE G	NEMA NOM. EFF. 93.6	B1-770-642
SH. END BRG.	50BC03JPP3		OPP. END BRG.	50BC03JPP3	
<b>MILL AND CHEMICAL DUTY QUALITY INDUCTION MOTOR</b>					
Siemens Energy & Automation, Inc. Little Rock, AR				MADE IN U.S.A.	

## MACCHINE SINCRONE TRIFASE

### PRINCIPIO DI FUNZIONAMENTO

Lo statore è costituito come quello della macchina asincrona trifase: è di materiale ferromagnetico laminato e nelle cave ricavate alla periferia del traferro è alloggiato un avvolgimento trifase percorso da correnti alternate. Per evitare la circolazione di correnti dovute a terne armoniche nelle f.e.m., l'avvolgimento di statore è solitamente collegato a stella. Il rotore in generale è di materiale ferromagnetico massiccio (eventualmente sono laminate le espansioni polari) ed è sede di un avvolgimento di eccitazione percorso da corrente continua. Si possono avere due diversi tipi di struttura di rotore: a poli lisci ed a poli salienti. La figura 1.1.a mostra il rotore di una macchina a poli lisci. L'avvolgimento di eccitazione (o di campo) è disposto nelle cave distribuite lungo la periferia del rotore. Il traferro ha spessore costante ed il circuito magnetico è isotropo. La figura 1.1.b mostra una macchina a poli salienti. L'avvolgimento di eccitazione è costituito da bobine avvolte sui corpi dei poli. Il traferro in questo caso ha spessore variabile ed il circuito magnetico è anisotropo; in particolare vengono evidenziati l'asse polare, in cui il traferro è minimo e l'asse interpolare, in cui il traferro è massimo.

L'avvolgimento di eccitazione, percorso dalla corrente continua  $i_e$ , crea un campo magnetico in modo tale che si possono distinguere successivamente un "polo nord" (flusso "uscente" dal polo) e un "polo sud" (flusso "entrante" nel polo). La distanza fra l'asse di un polo nord e di un polo sud misurata al traferro è pari al passo polare  $\tau$  la cui espressione è la seguente, dove  $R$  è il raggio interno dello statore e  $p$  il numero di coppie di poli dell'avvolgimento:

$$\tau = \frac{\pi R}{p} \quad (1.1)$$

**L'andamento spaziale del campo di eccitazione lungo la periferia del traferro risulta sinusoidale, a meno di armoniche superiori che è possibile trascurare in prima approssimazione. Nella macchina a poli lisci ciò viene ottenuto distribuendo opportunamente le cave o la corrente al traferro, nella macchina a poli salienti, sagomando le espansioni polari.**

La figura 1.2 mostra parte del circuito magnetico di una macchina anisotropa, costituita da due poli e relativa corona d'indotto. Come si vede, il traferro lungo l'espansione polare non è costante passando dal valore minimo  $\delta_0$ , in mezzeria dell'espansione polare, a quello di valore circa doppio agli estremi dell'espansione polare. La legge di variazione utilizzata è  $\delta = \delta_0 / \cos(p\alpha)$ , essendo  $p$  il

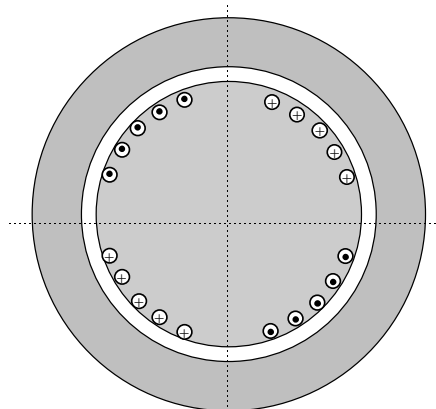


Fig. 1.1.a - Sezione di una macchina sincrona a poli lisci.

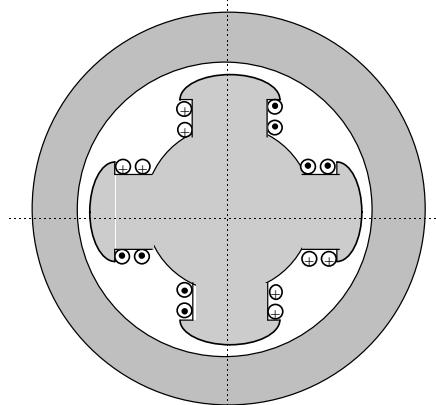


Fig. 1.1.b - Sezione di una macchina sincrona a poli salienti.

numero di coppie polari. Al di fuori delle espansioni polari il traferro assume valori estremamente elevati.

Quando si pone in rotazione il rotore alla velocità angolare costante  $\omega_m$ , il campo di eccitazione, solidale col rotore, ruota al traferro alla velocità  $\omega_c = \omega_m$ . Il campo rotante così prodotto induce nell'avvolgimento trifase che è alloggiato nelle cave di statore un sistema trifase simmetrico di f.e.m., sinusoidali nel tempo con pulsazione  $\omega$  data dalla seguente relazione:

$$\omega = p \omega_m \quad (1.2)$$

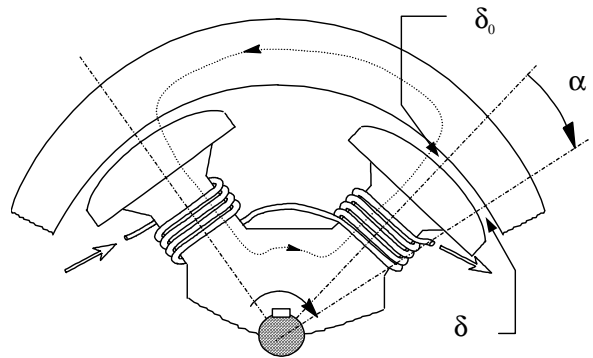


Figura 1.2

Se lo statore alimenta un carico equilibrato, esso diventa sede di tre correnti di pulsazione  $\omega$  che producono un campo rotante statorico. Quindi (se il numero di coppie polari dello statore è uguale al numero di coppie polari del rotore) il campo rotante statorico ruota con velocità angolare  $\omega_c = \omega/p = \omega_m$ . **Il campo rotante statorico  $\widehat{B}_s$  risulta dunque immobile rispetto al campo rotante rotorico  $\widehat{B}_r$  e quindi il campo risultante è un campo che ruota al traferro con la velocità del rotore**, da cui il nome di macchina sincrona ( $\widehat{B}_s$  e  $\widehat{B}_r$  hanno la stessa velocità e si sommano)

Il funzionamento intuitivo della Macchina sincrona si può illustrare con la seguente “catena logica”:

$$i_r \rightarrow B_r \rightarrow \widehat{B}_r \rightarrow \overset{\wedge}{E}_s \rightarrow \overset{\wedge}{I}_s \rightarrow \widehat{B}_s \rightarrow \widehat{B} = \widehat{B}_s + \widehat{B}_r \quad (1.3)$$

$\omega_m (\equiv n')$      $\uparrow$      $\uparrow$

dove  $\wedge$  indica un sistema simmetrico (di tensioni) o equilibrato (di correnti),  $\widehat{\phantom{x}}$  indica il campo rotante ed i pedici s ed r indicano statore e rotore, rispettivamente.

La potenza meccanica fornita all'albero della macchina per vincere la resistenza della coppia elettromagnetica dovuta allo sfasamento fra campo statorico e campo rotorico, viene trasformata, a meno delle perdite interne della macchina, in potenza elettrica ceduta al carico collegato allo statore. La macchina funziona quindi da generatore e viene chiamata **alternatore**.

Si può dimostrare che per una macchina sincrona a poli lisci in rotazione a velocità costante (si suppongono valide le ipotesi di campo illustrate relativamente al campo rotante), la caratteristica tensione-corrente sulla prima fase di statore (e analogamente per le altre) ha la seguente forma (riferimenti associati con convenzione del generatore):

$$\underline{V} = -j X_s \underline{I} + \underline{E}_0$$

ove la reattanza sincrona  $X_s$  è una costante della macchina considerata e la tensione a vuoto  $E_0$  dipende dalla corrente di eccitazione. La **curva di magnetizzazione (caratteristica a vuoto)** fornisce sperimentalmente la tensione ai morsetti di statore in funzione della corrente di eccitazione. A causa della saturazione del materiale ferromagnetico tale curva non è rettilinea.

Per alimentare l'avvolgimento viene utilizzata una sorgente esterna che viene collegata mediante un collettore ad anelli. Per potenze elevate vengono impiegate delle eccitatrici senza spazzole, costituite da una macchina sincrona con il circuito di eccitazione montato sullo statore ed il circuito d'armatura montato sull'albero del rotore (vedi figure). L'uscita trifase del generatore di eccitazione viene raddrizzata tramite un circuito raddrizzatore trifase pure montato sull'albero. La corrente continua così prodotta viene inviata al circuito di eccitazione principale. Quando il circuito di eccita-

zione è sostituito da magneti permanenti, si ottiene un sistema indipendente da qualsiasi sorgente di potenza elettrica esterna.

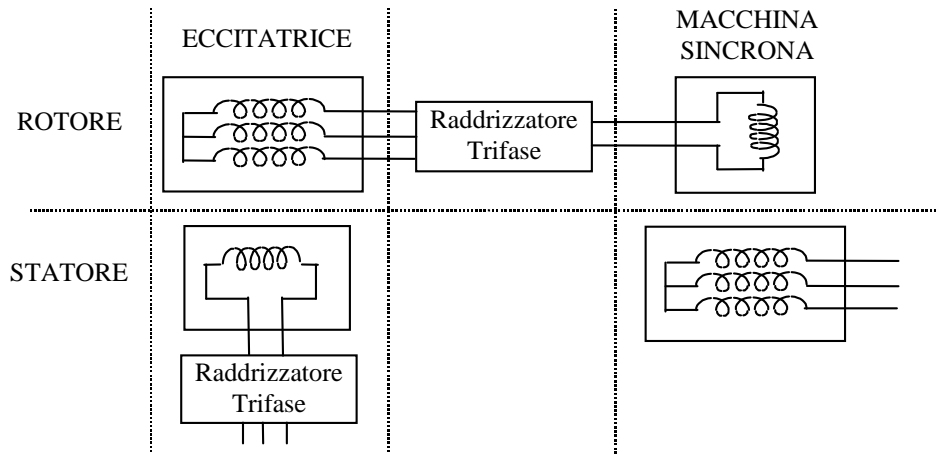


Figura 1.a. - Schema di macchina sincrona con eccitatrice

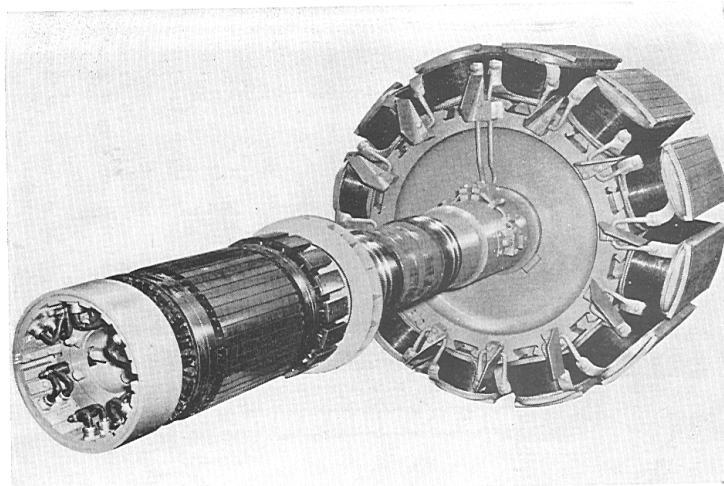


Figura 1.b - Rotore di macchina sincrona con eccitatrice coassiale.

### PARALLELO CON UNA RETE TRIFASE DI POTENZA INFINITA

Si supponga di collegare l'avvolgimento statorico di una macchina sincrona ad una rete trifase, già alimentata da altri alternatori. Si supponga inoltre che la potenza di questi ultimi sia tale da poter considerare che il valore efficace e la frequenza della terna di tensioni concatenate della rete siano indipendenti dalle correnti assorbite dalla macchina sincrona che viene collegata (rete di potenza infinita). Per potere effettuare correttamente il parallelo con la rete di potenza infinita è necessario portare prima la macchina sincrona in un regime di funzionamento, a vuoto, in cui le tensioni concatenate presenti ai morsetti della macchina coincidano in valore efficace, frequenza e fase con quelle della rete. Se così non fosse infatti, alla chiusura dell'interruttore di collegamento della macchina con la rete si svilupperebbero nello statore della macchina sincrona delle correnti di valore elevato che potrebbero provocare la rottura della macchina stessa.

Con riferimento alla figura 2, la sequenza delle operazioni da eseguire per effettuare il parallelo è la seguente:

1. La macchina viene portata in rotazione, a vuoto, alla velocità di sincronismo imposta dalla frequenza di rete ( $n = 60 f / p$ ) dal motore M che in questo caso deve fornire solo la coppia necessaria a vincere gli attriti interni della macchina.

2. Viene alimentato l'avvolgimento di eccitazione con una tensione tale da ottenere ai morsetti della macchina un sistema di tensioni concatenate avente una frequenza ed un valore efficace coincidenti con quelli della rete e misurati mediante i voltmetri V e V' ed i frequenzimetri f ed f'. La macchina opera ancora a vuoto e quindi ancora il motore M deve fornire solo la coppia necessaria per vincere gli attriti.

3. Si agisce sul motore M, con una regolazione fine della velocità, per portare tensioni concatenate di rete e di macchina a coincidere sia come frequenza che come fase, viene chiuso l'interruttore T ed il parallelo è concluso.

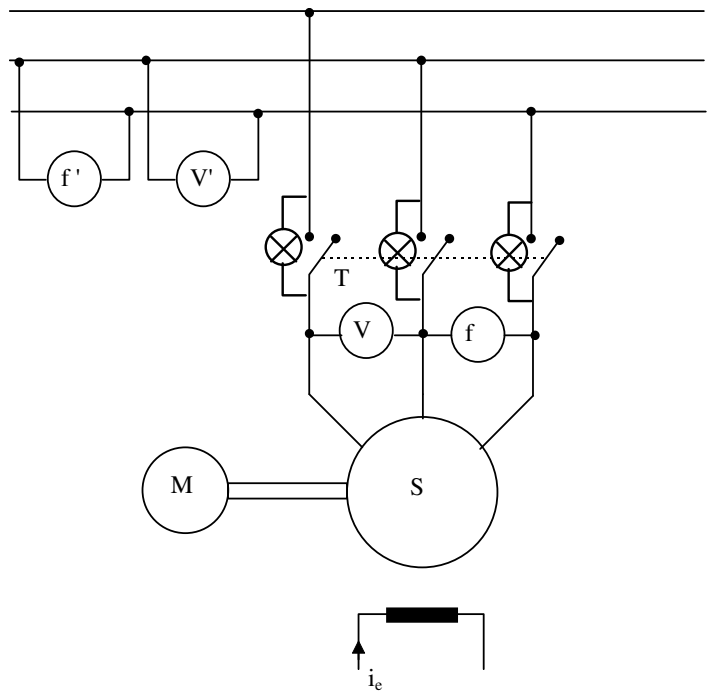


Figura 2 - Parallelo di una macchina sincrona (S) con una rete di potenza infinita.

Al termine delle operazioni di parallelo, la macchina sincrona è collegata alla rete, ma funziona ancora a vuoto, in quanto le f.e.m. indotte nelle fasi di statore uguagliano le tensioni concatenate e quindi le correnti nelle fasi di statore risultano nulle. A partire da questa condizione di funzionamento è possibile portare la macchina sincrona a funzionare come generatore, erogando potenza sia attiva che reattiva alla rete, oppure come motore, assorbendo potenza elettrica dalla rete, oppure come compensatore sincrono, erogando solo potenza reattiva alla rete.

### Coppia elettromagnetica

È possibile ottenere una buona approssimazione della coppia elettromagnetica, considerando il bilancio energetico della macchina sincrona e trascurando le perdite nel ferro e nel rame di statore. In tal caso infatti, visto che la potenza elettrica assorbita dal rotore viene interamente dissipata per effetto Joule nell'avvolgimento di rotore, tutta l'energia elettrica assorbita in un periodo dall'avvolgimento di statore, viene trasformata in energia meccanica erogata all'albero. Si può dimostrare che la coppia elettromagnetica risulta:

$$C_e = -3 \frac{p}{\omega} \frac{VE_0}{X_s} \sin(\delta)$$

ove  $\delta$  è lo sfasamento della tensione a vuoto  $\underline{E}_0$  rispetto alla tensione  $\underline{V}$ . Esso viene chiamato “angolo di carico” corrispondente alla condizione di funzionamento considerata. Quando l'angolo di carico è positivo ( $\underline{E}_0$  in anticipo rispetto a  $\underline{V}$ ), la coppia risulta negativa, cioè la macchina assorbe potenza meccanica ed eroga potenza elettrica attiva alla rete trifase (**funzionamento da generatore**). Quando l'angolo di carico è negativo ( $\underline{E}_0$  in ritardo rispetto a  $\underline{V}$ ), la coppia è positiva, cioè la macchina eroga potenza meccanica ed assorbe potenza elettrica attiva dalla rete trifase (**funzionamento da motore**). Quando l'angolo di carico è nullo ( $\underline{E}_0$  in fase con  $\underline{V}$ ), la coppia è nulla, cioè la macchi-

na non scambia né potenza meccanica né potenza elettrica attiva, può però scambiare potenza elettrica reattiva con la rete trifase; si dice allora che la macchina funziona da compensatore sincrono.

### Funzionamento da generatore

Se, tramite il motore M, viene fornita potenza meccanica al rotore; ha inizio un transitorio in cui il rotore tende ad accelerare e le f.e.m. indotte nelle fasi di statore si sfasano rispetto alle tensioni delle rete. Circola corrente nell'avvolgimento di statore e si crea una coppia elettromagnetica resistente. La condizione di regime viene raggiunta quando la coppia elettromagnetica resistente uguaglia la coppia meccanica fornita al rotore. La potenza meccanica assorbita all'albero dalla macchina viene trasformata in potenza elettrica ed erogata alla rete. È quindi possibile variare la potenza elettrica reattiva erogata alla rete, semplicemente variando la corrente di eccitazione della macchina.

### Funzionamento da motore

Se il motore M viene sostituito col carico meccanico che si vuole trascinare, al rotore della macchina viene applicata una coppia resistente; ha inizio un transitorio in cui il rotore tende a rallentare e le f.e.m. indotte nelle fasi di statore si sfasano rispetto alle tensioni delle rete. Circola corrente nell'avvolgimento di statore e si crea una coppia elettromagnetica motrice. La condizione di regime viene raggiunta quando la coppia elettromagnetica motrice uguaglia la coppia meccanica resistente applicata al rotore. La potenza elettrica assorbita dalla rete viene trasformata in potenza meccanica erogata all'albero della macchina. Il principale ostacolo nella applicazione del motore sincrono consiste nel valore nullo della coppia di spunto e quindi nella necessità di avere comunque a disposizione un motore di lancio. L'alternativa al motore di lancio esterno consiste nel sistema di autoavviamento. Quest'ultimo consiste in una speciale gabbia di scoiattolo che si sistema sul rotore entro cave ricavate sulle espansioni polari. Il motore si avvia quindi, una volta chiuso l'interruttore di rete, come un motore asincrono. Giunti in prossimità della velocità di sincronismo, si eccita il rotore, che viene accelerato da parte dell'avvolgimento statorico fino a raggiungere il sincronismo.

### Funzionamento da compensatore sincrono

Se, agendo sulla tensione di alimentazione dell'avvolgimento di eccitazione, si aumenta la corrente di eccitazione della macchina, ha inizio un transitorio in cui le f.e.m. indotte nelle fasi di statore, pur restando in fase con le tensioni imposte dalla rete di alimentazione, le superano in valore efficace. Si genera quindi una corrente di armatura  $\underline{I}$  che risulta in quadratura ritardo rispetto alla f.e.m.  $\underline{E}_0$  ed alla tensione  $\underline{V}$  (vedi figura 4.3.a). La potenza elettrica erogata è una potenza reattiva puramente induttiva: tutto avviene come se la macchina sincrona fosse un condensatore (**condensatore rotante**) la cui capacità può essere variata a piacere semplicemente variando la corrente di eccitazione. Viceversa, se si diminuisce la corrente di eccitazione, la f.e.m.  $\underline{E}_0$  risulta minore della tensione  $\underline{V}$  e la corrente di armatura  $\underline{I}$  risulta in quadratura anticipo rispetto ad  $\underline{E}_0$  e  $\underline{V}$  (vedi figura 4.3.b). La potenza elettrica erogata è una potenza reattiva puramente capacitiva; tutto avviene come se la macchina sincrona fosse un induttore (**induttore rotante**) la cui induttanza può essere variata a piacere semplicemente variando la corrente di eccitazione.

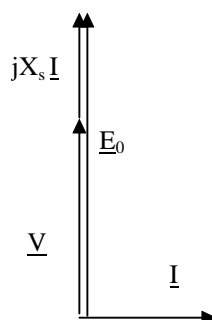


Figura 4.3.a - Diagramma fasoriale del condensatore sincrono

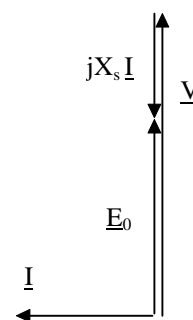


Figura 4.3.b - Diagramma fasoriale dell'induttore sincrono