

TEORIA DEI CIRCUITI

1. INTRODUZIONE

Si consideri un sistema elettrico costituito da un certo numero di "componenti" (vedi figura 1). Ciascun componente (A, B, C, D) è racchiuso all'interno di un contenitore da cui escono dei terminali collegati elettricamente tra di loro mediante dei fili metallici (1, 2, 3, 4, 5).

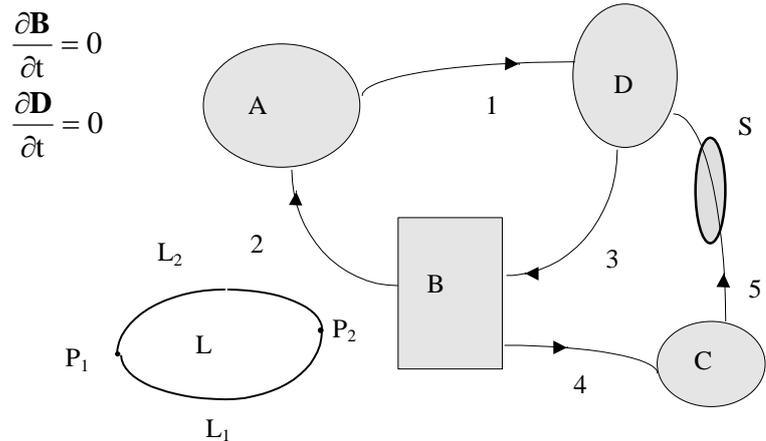


Figura 1

Tutto il sistema è immerso nell'aria che è un mezzo isolante. La regione costituita da tutto lo spazio meno quello occupato dai componenti (spazio esterno ai componenti) è una **regione a connessione lineare semplice**: presa una qualsiasi linea chiusa che giace in tale regione, esiste almeno una superficie che si appoggia a tale linea che giace anch'essa tutta all'interno della regione considerata. Si supponga che nello spazio esterno ai componenti sia possibile considerare nulla la derivata temporale della induzione magnetica e dello spostamento elettrico. Si consideri quindi la circuitazione del campo elettrico relativa ad una qualsiasi linea chiusa L che giace nello spazio esterno ai componenti. Risulta:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = 0 \quad (1)$$

Dalla (1) segue che la circuitazione del campo elettrico lungo una linea che congiunge due punti qualsiasi P₁ e P₂, rimanendo sempre nello spazio esterno ai componenti, non dipende dalla particolare linea scelta ma unicamente dai punti P₁ e P₂ (si dice che **il campo elettrico è conservativo**) e viene chiamata differenza di potenziale tra il punto P₁ ed il punto P₂:

$$\int_{P_1, L_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_1, L_2}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = v_{12} \quad (2)$$

Si consideri una superficie chiusa S qualsiasi che giace nello spazio esterno ai componenti, risulta :

$$\int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \Rightarrow \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (3)$$

La densità volumetrica di corrente elettrica, nello spazio esterno ai componenti è nulla ovunque tranne che all'interno delle connessioni metalliche. In particolare si consideri una superficie S che racchiude al suo interno solo un tratto di connessione metallica; dalla (3) segue che la corrente che circola in quella connessione, non dipende dal punto considerato della connessione, ma è una caratteristica della connessione.

Nessun sistema elettrico reale verifica esattamente le ipotesi assunte per quello sopra descritto; tali ipotesi sono però soddisfatte con buona approssimazione per molti sistemi elettrici reali, per descrivere i quali si fa uso di un modello ideale che prende il nome di circuito elettrico a costanti concentrate. In particolare, per tali sistemi, la circuitazione del campo elettrico lungo una linea che congiunge due punti non è indipendente dalla linea scelta, ma la dipendenza è così piccola che risul-

ta trascurabile a tutti gli effetti pratici. In tal caso, invece di parlare di differenza di potenziale, per indicare l'approssimazione fatta, si preferisce parlare di tensione tra i due punti.

2. DEFINIZIONI E LEGGI DI KIRCHHOFF

Un **CIRCUITO ELETTRICO A COSTANTI CONCENTRATE**, o rete elettrica, è un insieme di componenti elettrici ideali soggetto ai vincoli (che saranno enunciati nel seguito) noti come Leggi di Kirchhoff. Nel seguito, per semplicità, con la parola circuito elettrico si intenderà circuito elettrico a costanti concentrate.

La carica elettrica, indicata con q , è la proprietà intrinseca della materia responsabile dei fenomeni elettrici e magnetici. L'unità di misura della quantità di carica è il coulomb (C). In un circuito elettrico le cariche elettriche possono muoversi attraverso i componenti e le connessioni metalliche. La **corrente**, indicata con i , che passa attraverso una data superficie (ad esempio la sezione di una connessione metallica) è definita dalla carica elettrica che attraversa quella superficie nell'unità di tempo. L'unità di misura della corrente è l'ampere (A); un ampere è pari ad un coulomb al secondo.

Possiamo dunque esprimere la corrente come:
$$i = \frac{dq}{dt}$$

Il moto della carica elettrica attraverso i componenti e le connessioni metalliche richiede energia. La **tensione**, indicata con v_{BA} , tra due terminali A e B in un circuito è il lavoro richiesto per muovere una carica positiva unitaria da A (terminale $-$) a B (terminale $+$). L'unità di misura della tensione è il volt (V).

Possiamo dunque esprimere la tensione come:
$$v_{BA} = \frac{dw_{A \rightarrow B}}{dq}$$

Un componente elettrico ideale (vedi figura 2) è caratterizzato da un numero di terminali, o morsetti (solitamente un componente a due terminali è detto bipolo, uno a tre terminali è detto tripolo, etc., uno a N terminali è detto N-polo,).

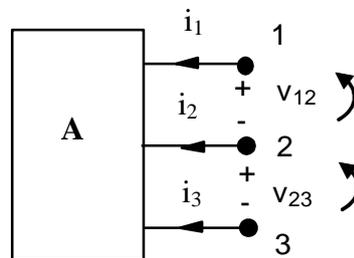


Fig. 2 Componente a tre terminali

A ciascun terminale è associata una corrente che è univocamente definita, in valore e segno, una volta che sia stato arbitrariamente scelto il suo verso positivo (indicato dalla freccia): una corrente $i_1 = 2$ significa che una corrente di intensità pari a 2 Ampère entra nel componente A attraverso il terminale 1, viceversa, una corrente $i_1 = -2$ significa che una corrente di intensità pari a 2 Ampère esce dal componente A attraverso il terminale 1

Ad ogni coppia di terminali è associata una tensione che è univocamente definita, in valore e segno, una volta che sia stato arbitrariamente scelto il terminale di riferimento (indicato col segno $-$): una tensione $v_{12} = 2$ significa che il terminale 1 si trova ad un potenziale superiore di 2 Volt rispetto a quello del terminale 2, viceversa una tensione $v_{12} = -2$ significa che il terminale 1 si trova ad un potenziale inferiore di 2 Volt rispetto a quello del terminale 2. Talvolta l'indicazione del " $-$ " e del " $+$ " viene sostituita da una freccia che indica il terminale positivo.

Un componente con due terminali viene chiamato bipolo. Nel seguito, per semplicità, si supponrà che i circuiti in esame siano costituiti di soli bipoli; se ciò non fosse vero, si può pensare di ricondursi alla ipotesi, sostituendo i componenti con più di due terminali con opportuni circuiti equivalenti costituiti da soli bipoli: ciò è sicuramente possibile mediante l'introduzione di generatori pilotati (che verranno definiti nel seguito).

All'interno del circuito, i terminali appartenenti a diversi componenti sono collegati tramite connessioni ideali, caratterizzate dall'aver una tensione nulla ai loro capi (vedi figura 3).

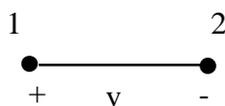


Fig. 3 Connessione ideale ($v = 0$)

Un nodo di un circuito elettrico è un punto a cui sono collegati, mediante una connessione ideale, due o più terminali, oppure è un terminale isolato; i nodi del circuito sono quindi le sue connessioni ideali ed i terminali isolati. Il circuito della figura 4 è costituito da cinque bipoli; collegati a 4 nodi (A, B, C, D). Una sequenza chiusa di nodi è una successione di nodi tale che il primo nodo coincide con l'ultimo. (Ad esempio, sono sequenze chiuse AA, ABA, ABCA, ABCDA, etc.)

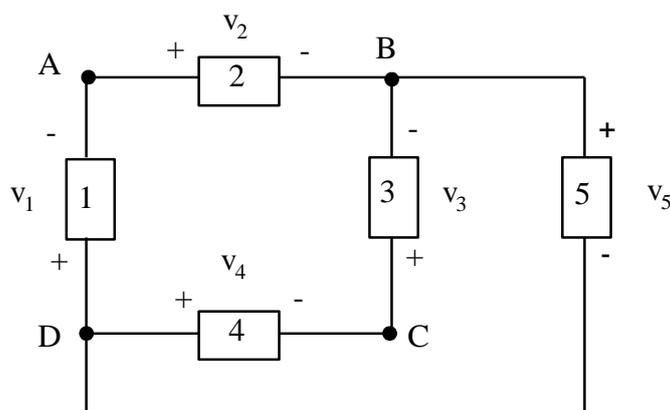


Figura 4. Circuito con 5 elementi e 4 nodi.

LA LEGGE DI KIRCHHOFF DELLE TENSIONI (LKT) afferma che per una qualsiasi sequenza chiusa di nodi la somma algebrica delle tensioni (tra due nodi successivi) è nulla.

Con riferimento al circuito della figura 4, applicando la LKT alla sequenza chiusa di nodi ABCA si ottiene la seguente equazione:

$$v_{AB} + v_{BC} + v_{CA} = 0 \quad (4)$$

Le tensioni di nodo (o potenziali di nodo) di un circuito sono le tensioni di tutti i nodi rispetto ad un nodo assunto come riferimento, la cui scelta è arbitraria (ma a cui solitamente si attribuisce un valore nullo). La LKT permette di esprimere la tensione tra una qualsiasi coppia di nodi del circuito come differenza delle relative tensioni di nodo: con riferimento alla figura 4, supponendo di scegliere il nodo A come nodo di riferimento (e posto dunque $e_A = 0$), ed indicando con e_B ed e_C le tensioni di nodo dei nodi B e C ($e_B = v_{BA}$; $e_C = v_{CA}$) la equazione (4) permette di scrivere:

$$v_{BC} = e_B - e_C \quad (5)$$

La sequenza chiusa di nodi ABCDA individua un percorso chiuso attraverso i componenti del circuito: i tratti di tale percorso all'interno di ciascun componente vengono detti rami ed il percorso, maglia. In generale, un ramo di un circuito è un percorso che collega due nodi attraversando un componente; ad un bipolo è associato un solo ramo del circuito mentre ad un componente con più di due terminali sono associati più rami (tutti i percorsi possibili che collegano i terminali del componente attraversandolo). Applicando la LKT alla maglia ABCDA, tenendo conto dei versi positivi scelti per le tensioni ai capi dei componenti (tensioni di ramo) e del verso di circuitazione della maglia, si ottiene la seguente relazione:

$$v_2 - v_3 - v_4 + v_1 = 0 \quad (6)$$

La LKT applicata ad una maglia del circuito afferma che la somma algebrica delle tensioni di ramo (sui rami che compongono la maglia) è nulla.

La **LEGGE DI KIRCHHOFF DELLE CORRENTI (LKC)** afferma che per ogni superficie chiusa che interseca unicamente le connessioni tra i componenti, e non i componenti stessi, la somma algebrica delle correnti che attraversano la superficie è nulla.

Si consideri in primo luogo una superficie chiusa che racchiuda al suo interno solo un bipolo (vedi figura 5a).

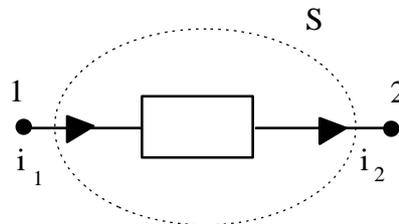


Fig. 5a. Legge di Kirchhoff delle correnti applicata ad un bipolo.

La corrente i_1 entra nella superficie indicata con la linea tratteggiata S nella figura, mentre la corrente i_2 esce da tale superficie (di solito si assumono positive le correnti uscenti e negative quelle entranti); la LKC afferma quindi che deve essere $i_2 - i_1 = 0$, da cui segue che: $i_2 = i_1$. Tenendo conto di ciò, con riferimento alla figura 5b si consideri la superficie chiusa la cui rappresentazione nel piano del disegno è la linea tratteggiata S_1 .

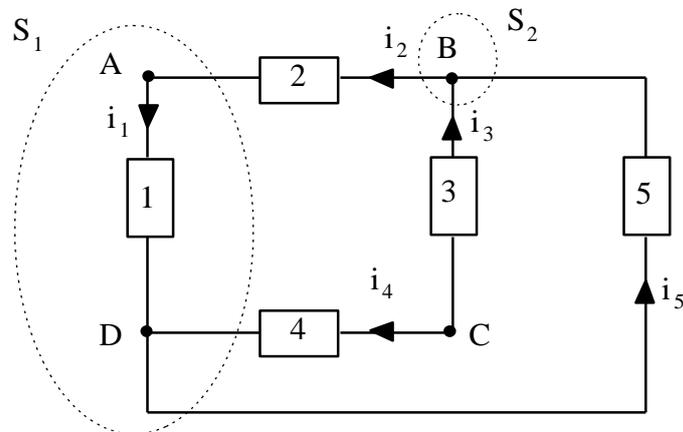


Figura 5b.

Le correnti che attraversano tale superficie sono la corrente i_2 e la corrente i_4 che entrano nella superficie e la corrente i_5 che esce, per cui la LKC applicata a tale superficie permette di scrivere la seguente equazione:

$$-i_2 - i_4 + i_5 = 0 \quad (7)$$

Si consideri la superficie chiusa la cui rappresentazione nel piano della figura 5b è la linea tratteggiata S_2 : tale superficie racchiude al suo interno solo il nodo B e la LKC ad essa associata afferma che la somma algebrica delle correnti dei rami che convergono nel nodo B è nulla:

$$i_2 - i_3 - i_5 = 0 \quad (8)$$

Applicando la LKC a tutti i quattro nodi del circuito di figura 5.b, ottiene quindi il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{array}{cccccc} +i_1 & -i_2 & & & & = 0 \\ & +i_2 & -i_3 & & -i_5 & = 0 \\ & & +i_3 & +i_4 & & = 0 \\ -i_1 & & & -i_4 & +i_5 & = 0 \\ \hline +0 & +0 & +0 & +0 & +0 & = 0 \end{array}$$

Come è immediato verificare, la somma delle equazioni porta ad una identità ($0 = 0$). Tale risultato generale è dovuto al fatto che ogni corrente di ramo i_k compare esattamente due volte, con segni opposti, nelle LKC relative ai nodi che sono i terminali del ramo k . Una delle equazioni è dunque una combinazione lineare delle altre $N - 1 = 3$, e si può omettere. Le rimanenti $N - 1 = 3$ equazioni sono chiaramente indipendenti in quanto, qualunque sia l'equazione omessa (ad esempio la quarta, nodo D), tutte le correnti di ramo presenti nell'equazione eliminata compaiono *una sola volta* nelle restanti equazioni (ad esempio i_1 , i_4 ed i_5). Le equazioni LKC indipendenti sono quindi $N - 1$.

Le due leggi di Kirchhoff, delle tensioni e delle correnti, permettono di scrivere delle equazioni lineari tra le tensioni e le correnti che non dipendono dalla natura dei componenti presenti nel circuito, ma unicamente da come essi sono collegati tra di loro (topologia del circuito).

Sia dato un circuito caratterizzato da R rami ed N nodi (ad esempio per il circuito di figura 5.b, $N = 4$ ed $R = 5$). Per ciascun ramo si assumano versi positivi per la tensione di ramo e la corrente di ramo associati secondo la scelta dell'utilizzatore, ossia quando la corrente entra nel terminale positivo (vedi fig. 6.a). I versi di riferimento associati secondo la scelta del generatore sono illustrati nella figura 6.b, in cui la corrente esce dal terminale positivo.

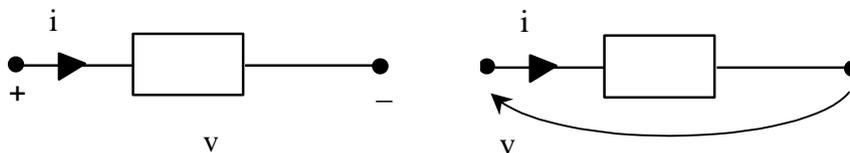


Fig. 6.a Versi di riferimento associati secondo la scelta dell'utilizzatore per la tensione e la corrente di ramo. A destra, l'indicazione del “-” e del “+” è sostituita da una freccia che indica il terminale positivo.

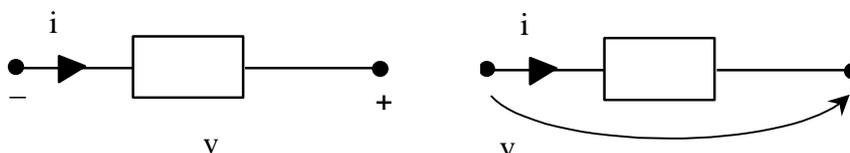


Fig. 6.b Versi di riferimento associati secondo la scelta del generatore per la tensione e la corrente di ramo. A destra, l'indicazione del “-” e del “+” è sostituita da una freccia che indica il terminale positivo.

Preso arbitrariamente un nodo come nodo di riferimento del circuito, la LKT permette di scrivere R relazioni del tipo (5) linearmente indipendenti che in forma matriciale assumono la forma:

$$\mathbf{v} = \mathbf{M} \mathbf{e} \quad (9)$$

dove \mathbf{v} è il vettore delle tensioni di ramo, \mathbf{e} è il vettore delle tensioni di nodo ed \mathbf{M} è una matrice avente R righe ed $(N - 1)$ colonne, il cui generico elemento M_{hk} risulta nullo se il ramo h non è collegato al nodo k, uguale a +1 se la corrente del ramo h esce dal nodo k, -1 se la corrente del ramo h entra nel nodo k. A titolo di esempio si consideri ancora il circuito di figura 5.b, utilizzando versi di riferimento associati secondo la scelta dell'utilizzatore per le tensioni e le correnti di ramo e prendendo D come nodo di riferimento ($e_D = 0$). Si ha quindi:

$$\begin{cases} v_1 = e_A \\ v_2 = e_B - e_A \\ v_3 = e_C - e_B \\ v_4 = e_C \\ v_5 = -e_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{cases} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} e_A \\ e_B \\ e_C \end{cases} \Rightarrow \mathbf{M} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

La LKC applicata a tutti i nodi tranne quello di riferimento permette di scrivere $(N - 1)$ equazioni del tipo (8) che in forma matriciale assumono la forma:

$$\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0} \quad (10)$$

dove \mathbf{i} è il vettore delle correnti di ramo ed \mathbf{A} è una matrice, chiamata matrice di incidenza ridotta, avente $(N - 1)$ righe ed R colonne, il cui generico elemento A_{hk} risulta nullo se il ramo k non è collegato al nodo h, uguale a +1 se la corrente del ramo k esce dal nodo h, -1 se la corrente del ramo k entra nel nodo h. A titolo di esempio si consideri ancora il circuito di figura 5.b. Si ha quindi:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 = 0 \\ i_2 - i_3 - i_5 = 0 \\ i_3 + i_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & 0 \end{bmatrix}$$

Risulta quindi dalle definizioni che \mathbf{M} è la trasposta di \mathbf{A} , cioè:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^T \quad (11)$$

Dalle equazioni (9), (10) ed (11) segue il **TEOREMA DI TELLEGEN** che afferma che, per un dato circuito, preso un qualsiasi vettore di tensioni di ramo \mathbf{v}_1 , che soddisfi le LKT (9) per quel circuito, ed un vettore di correnti di ramo \mathbf{i}_2 , che soddisfi le LKC (10) per quel circuito, allora vale la seguente relazione:

$$\mathbf{v}_1^T \mathbf{i}_2 = 0 \quad (12)$$

Infatti, si ha

$$\mathbf{v}_1^T \mathbf{i}_2 = (\mathbf{M} \mathbf{e}_1)^T \mathbf{i}_2 = \mathbf{e}_1^T \mathbf{M}^T \mathbf{i}_2 = \mathbf{e}_1^T \mathbf{A} \mathbf{i}_2 = \mathbf{e}_1^T \mathbf{0} = 0$$

Facendo riferimento a versi di tensione e corrente associati secondo la scelta dell'utilizzatore (fig. 6), si definisce **potenza elettrica assorbita** da un bipolo in un generico istante t , il prodotto tra la tensione presente ai suoi terminali all'istante t e la corrente che lo attraversa in quell'istante:

$$p(t) = v(t) i(t) \quad (13)$$

Infatti, dalle definizioni di $i = dq/dt$ e di $v = dw/dq$, si ha $v i = (dw/dq)(dq/dt) = dw/dt = p$. Nel caso in cui i versi della tensione e della corrente siano associati secondo la scelta del generatore, il prodotto vi definisce la potenza elettrica erogata dal bipolo.

Più in generale, facendo riferimento ad un generico componente con N terminali, la potenza elettrica assorbita da tale componente in un generico istante t è data dalla seguente espressione:

$$p(t) = \sum_{k=1}^{N-1} v_{kN}(t) i_k(t) \quad (13.a)$$

dove si è preso l' n -esimo terminale come terminale di riferimento per le tensioni ed i versi positivi delle correnti sono tutti entranti nell'elemento. Si dimostra che la potenza elettrica assorbita non dipende dalla scelta del terminale di riferimento, infatti, facendo uso delle leggi di Kirchhoff delle tensioni prima e della legge di Kirchhoff delle correnti poi si ottiene:

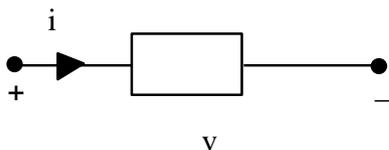
$$p' = \sum_{k=1, k \neq j}^N v_{kj} i_k = \sum_{k=1, k \neq j}^N (v_{kN} - v_{jN}) i_k = \sum_{k=1, k \neq j}^N v_{kN} i_k + v_{jN} i_j = p \quad (13.b)$$

Se si applica il teorema di Tellegen (12) considerando il vettore delle tensioni ed il vettore delle correnti che effettivamente sono presenti nel circuito ad un generico istante t , si ottiene la relazione (14) che, sulla base della definizione (13), mostra come la potenza elettrica assorbita da tutti i componenti del circuito risulti in ogni istante nulla.

$$\mathbf{v}(t)^T \mathbf{i}(t) = v_1(t) i_1(t) + v_2(t) i_2(t) + \dots = p_1(t) + p_2(t) + \dots = 0 \quad (14)$$

3. COMPONENTI

Nel seguito vengono descritte e discusse le equazioni costitutive e le proprietà fondamentali di alcuni tra i componenti di impiego più diffuso in elettrotecnica. In generale i componenti sono caratterizzati da una relazione (caratteristica o equazione costitutiva) tra la corrente che li attraversa e la tensione tra i loro terminali^(o). **Un componente in cui sia determinabile la tensione nota la corrente si dice *controllato in corrente*** (cioè, è possibile alimentarlo con un generatore di corrente con corrente impressa qualsiasi [definito nel seguito] e ad ogni valore della corrente impressa corrisponde un solo valore della tensione ai terminali); analogamente, **un componente in cui sia determinabile la corrente nota la tensione si dice *controllato in tensione*** (cioè, è possibile alimentarlo con un generatore di tensione con tensione impressa qualsiasi [definito nel seguito] e ad ogni valore della tensione impressa corrisponde un solo valore della corrente assorbita). Infine, si premette che **due componenti si dicono equivalenti quando presentano la stessa caratteristica tensione-corrente** (anche se hanno una struttura interna differente).



Caratteristica del componente: $f(i, v) = 0$

Se il componente è *controllato in corrente*: $v = h(i)$

Se il componente è *controllato in tensione*: $i = g(v)$

^(o) Il tempo può comparire esplicitamente nella relazione caratteristica. In tal caso il componente è detto *tempo-variante*, altrimenti il componente è detto *tempo-invariante*. Tutti i componenti trattati nel seguito sono tempo-invarianti.

Resistore lineare

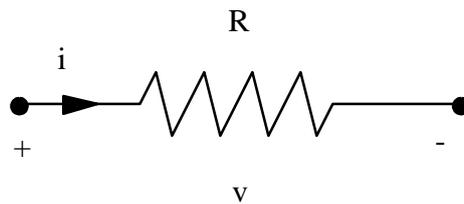


Figura 7 Simbolo del resistore lineare

Il simbolo del resistore lineare è indicato nella figura 7. Con riferimento alla scelta dell'utilizzatore per i versi positivi di tensione e corrente, la legge costitutiva del resistore è la seguente:

$$v = R i \quad (15.a)$$

o, alternativamente

$$i = G v \quad (15.b)$$

dove R è una costante chiamata resistenza (misurata in Ω [Ohm]), G è una costante chiamata conduttanza (misurata in S [Siemens]) e risulta $G = 1/R$. L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (13) e risulta:

$$p = v i = (R i) i = R i^2 = i^2/G \quad (16.a)$$

o, alternativamente

$$p = v i = v (v/R) = v^2/R = G v^2 \quad (16.b)$$

Se la resistenza R è positiva, la potenza elettrica assorbita risulta essere sempre positiva, o al più nulla quando la corrente è nulla; i componenti che godono di tale proprietà vengono detti **componenti passivi**. Facendo ricorso alle conoscenze della fisica, si può dimostrare che un filo di rame di lunghezza L e sezione S può essere modellato per mezzo di un resistore di resistenza R pari a $\rho L/S$, in cui la potenza elettrica assorbita viene trasformata in energia termica mediante un fenomeno noto come "effetto Joule".

Dalla (15.a) segue che se è nota la corrente che circola sul resistore è nota anche la tensione ai suoi capi; quindi il resistore è un componente controllato in corrente. Inoltre, se R è diversa da zero, quando è nota la tensione è anche nota la corrente, pari a v/R ; quindi il resistore è anche un componente controllato in tensione. Pertanto, il resistore non nullo risulta un componente controllato sia in tensione che in corrente.

La connessione ideale, illustrata nella figura 3 ed anche chiamata corto circuito, può essere considerata un resistore lineare di resistenza nulla (o conduttanza infinita). Come tale risulta essere un componente controllato in corrente, ma non in tensione; infatti ad un unico valore di tensione (zero) corrispondono infiniti valori possibili della corrente. Viceversa, un circuito aperto, il cui simbolo è rappresentato nella figura 8, può essere considerato come un resistore di resistenza infinita (o conduttanza zero) e come tale è un componente controllato in tensione, ma non in corrente: infatti all'unico valore possibile della corrente (zero) corrisponde una infinità di valori possibili della tensione ai suoi capi.

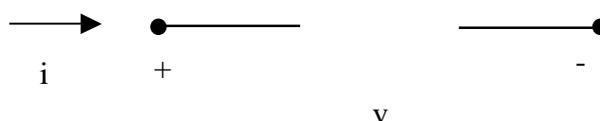


Figura 8 Simbolo del circuito aperto ($i = 0$)

Due resistori si dicono collegati in serie quando sono percorsi dalla stessa corrente (figura 9); dalle equazioni costitutive dei due resistori si vede che essi sono equivalenti ad un unico resistore avente una resistenza equivalente pari alla somma delle due resistenze. La relazione ottenuta è generalizzabile ad un numero qualsiasi di resistori in serie (per definizione tutti percorsi dalla stessa corrente): $R_{eq} = \sum_k R_k$.

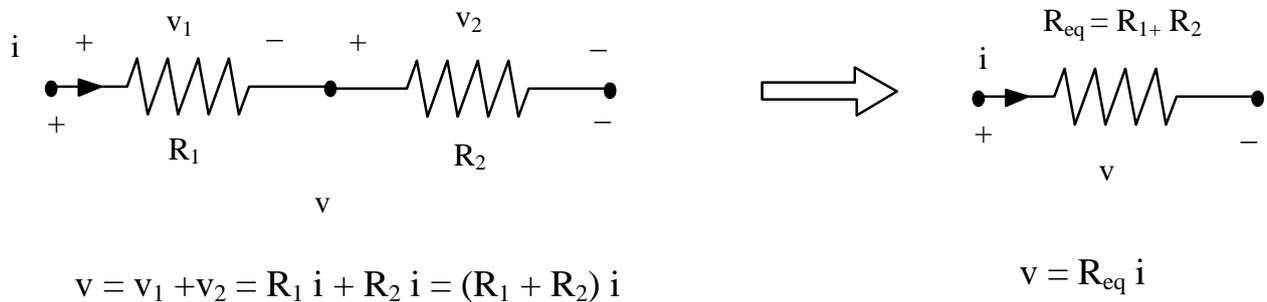


Figura 9 Resistori collegati in serie

Due resistori si dicono collegati in parallelo quando la tensione ai loro capi è la stessa (figura 10); dalle equazioni costitutive dei due resistori si vede che essi sono equivalenti ad un unico resistore avente una resistenza equivalente il cui inverso è dato dalla somma degli inversi delle due resistenze (ovvero, ricordando la definizione di conduttanza, due resistori in parallelo sono equivalenti ad un unico resistore avente una conduttanza equivalente pari alla somma delle due conduttanze: $G_{eq} = G_1 + G_2$). La relazione ottenuta è generalizzabile ad un numero qualsiasi di resistori in parallelo (per definizione tutti soggetti alla stessa tensione): $G_{eq} = \sum_k G_k$.

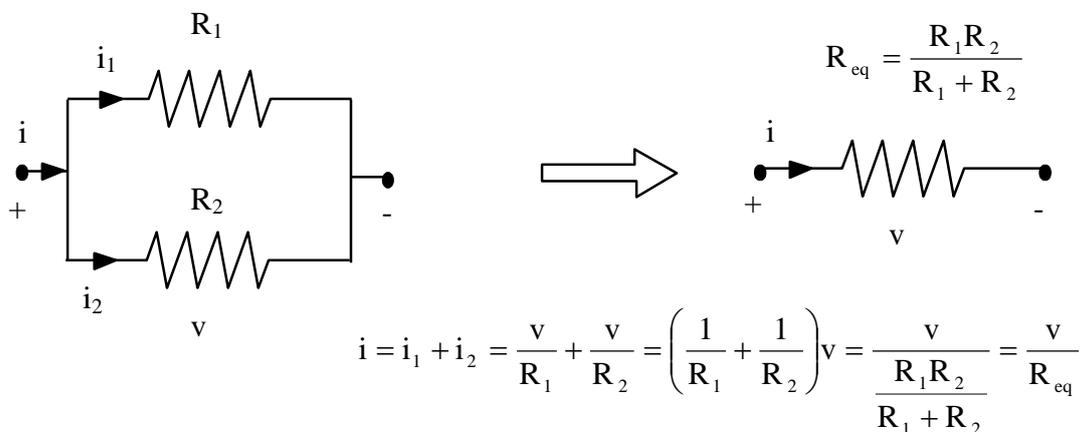


Figura 10 Resistori collegati in parallelo

Diodo ideale

Il simbolo del diodo ideale è indicato nella figura 11. La legge costitutiva del diodo ideale è rappresentata, nel piano tensione - corrente, dal semiasse negativo delle tensioni e dal semiasse positivo delle correnti (vedi figura 12): se la tensione anodo (A) - catodo (K) è negativa, si dice che il diodo è polarizzato in inversa, in questo caso il passaggio della corrente è interdetto (per qualunque valore di tensione); viceversa, se il diodo è percorso da corrente (diodo in conduzione) la tensione ai suoi capi è nulla (per qualunque valore di corrente).

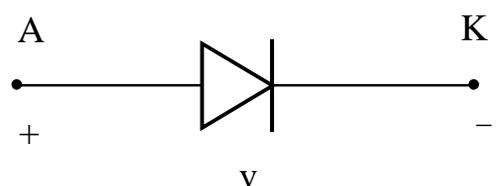


Figura 11 Simbolo del diodo ideale

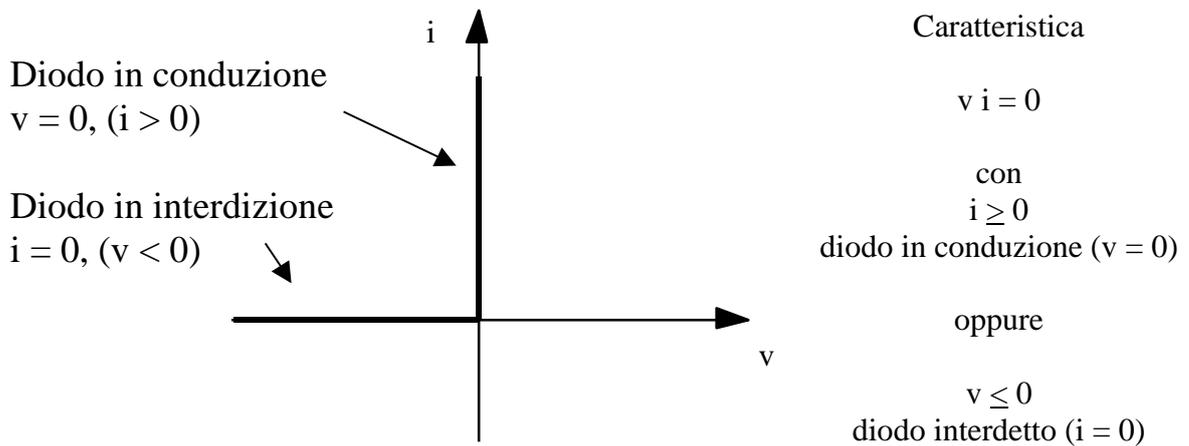


Fig. 12 Caratteristica del diodo ideale

Come si può vedere dalla caratteristica del diodo, il diodo non è controllato né in corrente, perché quando la corrente è nulla la tensione può assumere una infinità di valori (tutti quelle negativi), né in tensione, perché quando la tensione è nulla la corrente può assumere una infinità di valori, tutti quelli positivi. A seconda quindi che il diodo ideale sia polarizzato in diretta od in inversa, può essere considerato rispettivamente un corto circuito od un circuito aperto; in ogni caso la potenza elettrica assorbita dal diodo è nulla.

Un diodo reale è generalmente realizzato a partire da un cristallo di materiale semiconduttore (ad esempio Si, appartenente al IV gruppo della tavola periodica degli elementi) drogandolo con impurità di tipo p (ad esempio B, appartenente al III gruppo) e di tipo n (ad esempio P, appartenente al V gruppo), come illustrato nella figura 13. La caratteristica tensione - corrente della giunzione p-n così ottenuta è rappresentata, nella figura 13. Nella sua espressione analitica, sempre riportata nella figura 13, k è la costante di Boltzman (1.38×10^{-23} J/K), T la temperatura in K, q la carica (in modulo) dell'elettrone (1.602×10^{-19} C) ed I_0 la corrente inversa di saturazione, che è una corrente (tipicamente molto piccola) caratteristica del dispositivo. Quando il diodo reale è in conduzione, è presente ai suoi capi una tensione positiva (V_d) ed il diodo reale assorbe una modesta potenza elettrica dalla rete cui è collegato. Quando il diodo è polarizzato in inversa, fintanto che la tensione è inferiore, in valore assoluto, ad un valore limite (tensione di rottura o breakdown V_b) circola una piccola corrente inversa (dal catodo all'anodo) (I_0). Pertanto, anche in interdizione il diodo reale assorbe una potenza di modesta entità. Al superamento, in valore assoluto, della tensione di breakdown il diodo si danneggia irreparabilmente, consentendo la circolazione di una ingente corrente inversa. Il diodo reale può essere considerato come un resistore non lineare, la cui resistenza è una funzione della corrente.

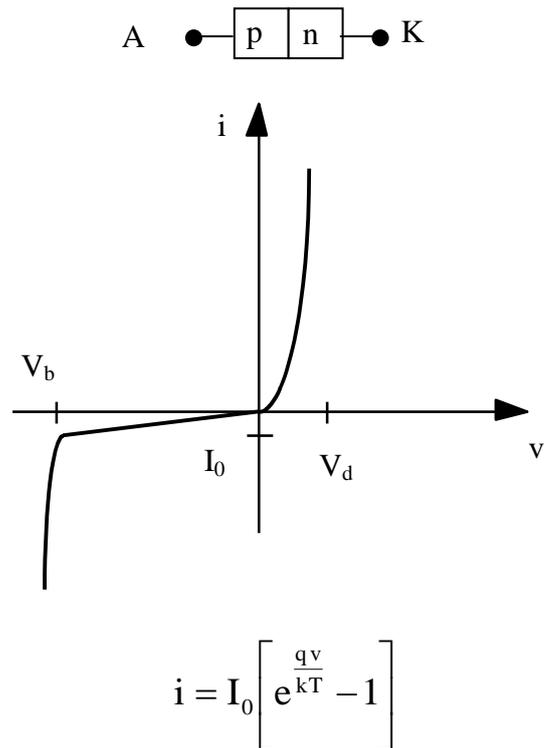


Fig. 13 Struttura e caratteristica di un diodo reale

Induttore lineare

Si definisce induttore lineare un componente a due terminali il cui simbolo è indicato nella figura 14 caratterizzato dalla seguente legge costitutiva:

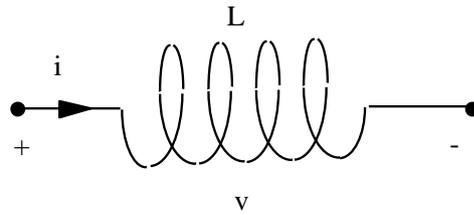


Figura 14 Simbolo dell'induttore

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (17)$$

dove L è una costante chiamata induttanza dell'induttore (misurata in H). L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (13) e risulta:

$$p = vi = L \frac{di}{dt} i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) \quad (18)$$

La (18) mostra come tutta la energia elettrica assorbita dall'induttore vada ad incrementare il termine $E_m = \frac{1}{2} Li^2$ che assume quindi il significato di energia magnetica immagazzinata nell'induttore; tale energia, una volta immagazzinata, può essere interamente restituita ai componenti del circuito cui è collegato l'induttore durante un transitorio successivo. La potenza elettrica assorbita dall'induttore può quindi assumere valori sia positivi che negativi.

Un avvolgimento costituito da N spire finemente avvolte sopra un nucleo toroidale di materiale ferromagnetico dolce, qualora l'intensità della corrente che lo percorre non sia troppo elevata, in modo da poter trascurare la saturazione del materiale ferromagnetico, può essere modellato come un resistore ed un induttore collegati in serie (vedi fig. 15).

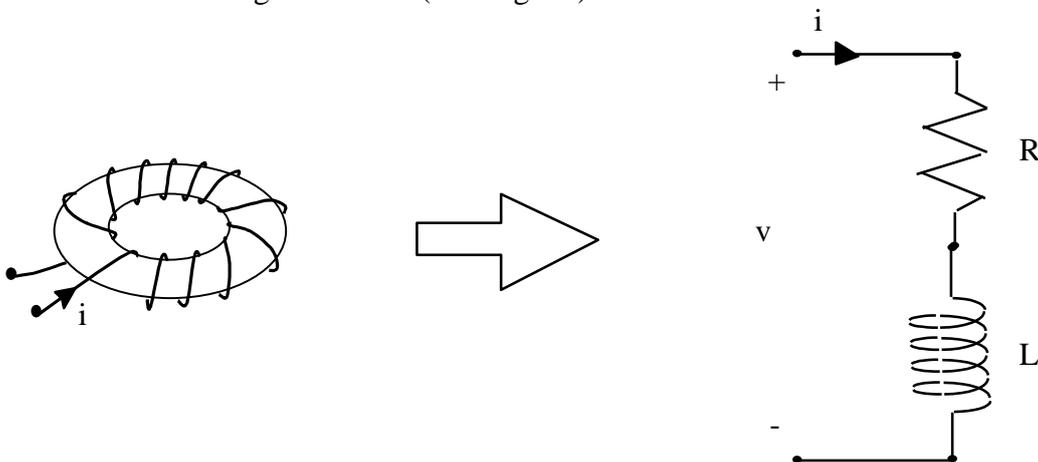


Figura 15 Induttore reale

Il campo magnetico H prodotto dalla corrente i , a causa dell'elevato valore della permeabilità magnetica (μ) del materiale di cui è costituito il nucleo toroidale dell'avvolgimento, tende a concentrarsi in tale regione. Si può dimostrare che, trascurando i flussi dispersi, il valore della induttanza dell'induttore è definito dalla relazione:

$$\frac{1}{2} Li^2 = \int_{V_{\text{toro}}} \frac{1}{2} \mu H^2 dV \quad (19)$$

La potenza elettrica assorbita dall'induttore reale, viene in parte trasformata in energia termica per effetto Joule ed in parte immagazzinata nel campo magnetico presente all'interno del nucleo toroidale. Per sottolineare il fatto che alla energia elettromagnetica E_m è associato un campo magnetico, tale energia viene più specificatamente chiamata energia magnetica immagazzinata nell'induttore.

L'equazione costitutiva dell'induttore (17) permette in ogni istante, se è noto il valore della tensione ai suoi capi, di calcolare la derivata temporale della corrente che lo attraversa lasciandone però completamente indeterminato il valore. Il valore della corrente individua univocamente l'energia magnetica immagazzinata nell'induttore e dipende dal transitorio subito dalla corrente nel periodo precedente all'istante di tempo che si considera. Infatti, integrando nel tempo la (17), supponendo che all'istante $-\infty$, quando è stato assemblato il circuito ed è iniziato il transitorio, la corrente sull'induttore fosse nulla, si ottiene:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau \quad (20)$$

La (20) mostra che il valore della corrente all'istante t dipende dal valore della tensione in tutti gli istanti precedenti. Per indicare ciò si dice che l'induttore è un componente dotato di memoria. Il valore della corrente che attraversa l'induttore individua univocamente l'energia magnetica immagazzinata al suo interno e perciò costituisce la sua variabile di stato.

Condensatore lineare

Il simbolo del condensatore è indicato nella figura 16, la sua legge costitutiva è la seguente:

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (21)$$

dove C è una costante chiamata capacità del condensatore (misurata in F).

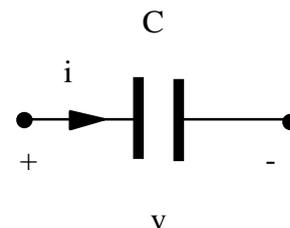


Figura 16 Simbolo del condensatore

L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (13) e risulta:

$$p = vi = vC \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C v^2 \right) \quad (22)$$

La (22) mostra come tutta la energia elettrica assorbita dall'induttore vada ad incrementare il termine $E_e = \frac{1}{2} C v^2$ che assume quindi il significato di energia elettromagnetica immagazzinata nel condensatore; tale energia, una volta immagazzinata, può essere interamente restituita ai componenti del circuito cui è collegato il condensatore durante un transitorio successivo. La potenza elettrica assorbita dal condensatore può quindi assumere valori sia positivi che negativi.

Un cilindro ed una corona cilindrica coassiali, costituiti di materiale conduttore, separate da una corona cilindrica, coassiale con le precedenti, costituita di materiale isolante, formano un condensatore cilindrico che può essere modellato con buona approssimazione mediante un condensatore ideale (vedi fig. 17).

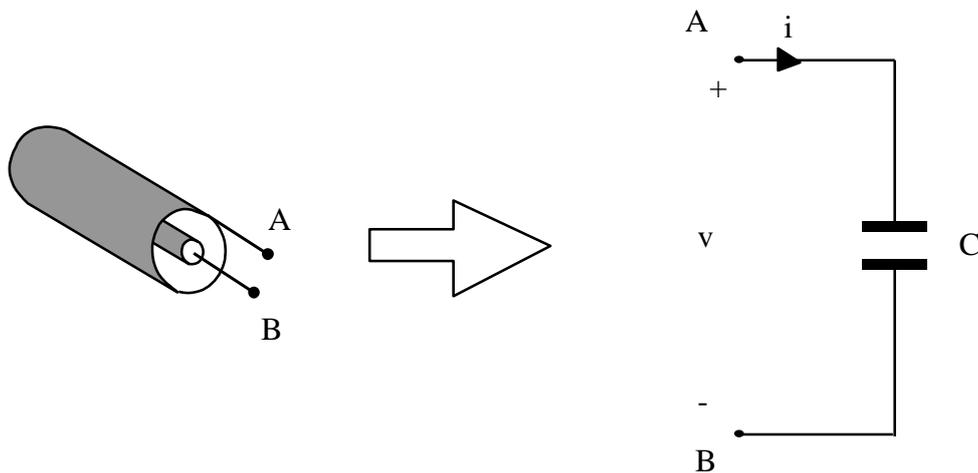


Figura 17 Condensatore cilindrico

Quando una carica q viene spostata tramite una connessione elettrica dalla armatura esterna (collegata al terminale A) a quella interna (collegata al terminale B), la regione di spazio occupata dall'isolante interposto tra le armature del condensatore è sede di un campo elettrico. Trascurando il campo elettrico all'esterno di tale regione, il valore della capacità del condensatore è definito dalla relazione:

$$\frac{1}{2} C v^2 = \int_{V_{\text{isolante}}} \frac{1}{2} \epsilon E^2 dV \quad (23)$$

dove ϵ è la costante dielettrica dell'isolante. La potenza elettrica assorbita dal condensatore cilindrico viene immagazzinata nel campo elettrico presente nell'isolante tra le armature del condensatore. Per sottolineare il fatto che alla energia elettromagnetica E_e è associato un campo elettrico, tale energia viene più specificatamente chiamata energia elettrica immagazzinata nel condensatore.

Le relazioni (21, 22, 23) mostrano come esista una relazione di dualità tra il condensatore e l'induttore; infatti è possibile ottenere le relazioni caratteristiche di un componente da quelle dell'altro, scambiando tra di loro i simboli della tensione con la corrente, dell'induttanza con la capacità, del campo magnetico con il campo elettrico e della permeabilità magnetica con la costante dielettrica. Analogamente all'induttore, anche il condensatore è un componente con memoria; integrando la (21) dall'istante $-\infty$, in cui è stato assemblato il circuito ed in cui la tensione ai capi del condensatore si è supposta nulla, al generico istante t si ottiene:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad (24)$$

La (24) mostra che il valore della tensione in un generico istante t dipende dal valore della corrente in tutti gli istanti precedenti. Il valore della tensione ai capi del condensatore individua univocamente l'energia elettrica immagazzinata al suo interno e perciò rappresenta la sua variabile di stato. Infine, dalla 24, si riconosce anche che la carica Q presente sull'armatura positiva (cioè quella collegata al terminale positivo) è legata alla tensione v dalla relazione $Q = C v$.

Generatore di tensione

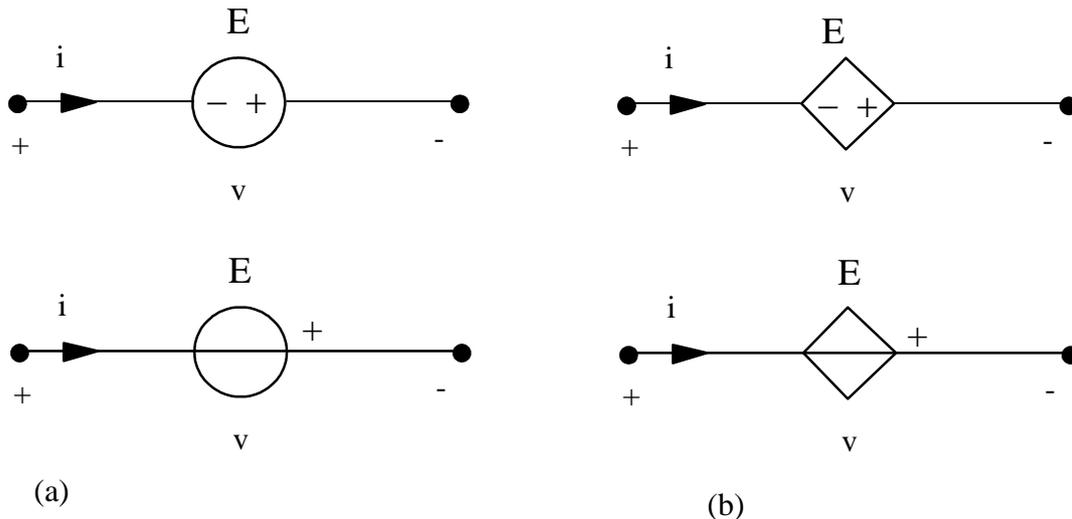
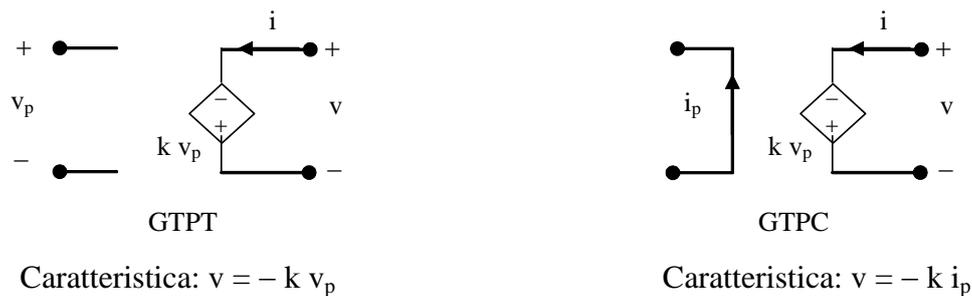


Figura 18 Simboli del generatore di tensione

I simboli che vengono utilizzati per il generatore indipendente di tensione sono indicati nella figura 18a, quelli utilizzati per il generatore di tensione pilotato (o dipendente) nella figura 18b (i due simboli vengono usati nella letteratura scientifica con uguale frequenza e sono del tutto equivalenti);. Nel caso del generatore di tensione indipendente, la tensione impressa E del generatore (o forza elettro-motrice del generatore) è una funzione nota del tempo, nel caso del generatore di tensione pilotato, la tensione impressa dipende dal valore della tensione (generatore di tensione pilotato in tensione: GTPT) o della corrente (generatore di tensione pilotato in corrente: GTPC) di un altro ramo del circuito. Con riferimento ai versi positivi delle grandezze indicati nella figura 18a, l'equazione costitutiva del generatore di tensione indipendente è la seguente:

$$v = - E \quad (25)$$

In figura sono illustrati i generatori pilotati GTPT e GTPC aventi caratteristica lineare.



L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (13) e risulta:

$$p = v i = - E i \quad (26)$$

La potenza elettrica assorbita risulta quindi positiva o negativa a seconda che la corrente attraversi il generatore nel verso associato o non associato secondo la convenzione degli utilizzatori rispetto a quello della tensione impressa. Il generatore indipendente di tensione è quindi in grado di assorbire od erogare, in dipendenza dalle condizioni di lavoro del circuito, una potenza elettrica di valore qualsiasi, mantenendo comunque inalterato il valore della tensione ai suoi capi. Il generatore indipendente di tensione è un componente controllato in corrente. Il generatore dipendente di tensione non è un componente controllato né in tensione né in corrente.

Una batteria (generatore di tensione reale) può essere modellata elettricamente mediante lo schema illustrato nella figura 19, costituito da un resistore e da un generatore indipendente di tensione collegati in serie.

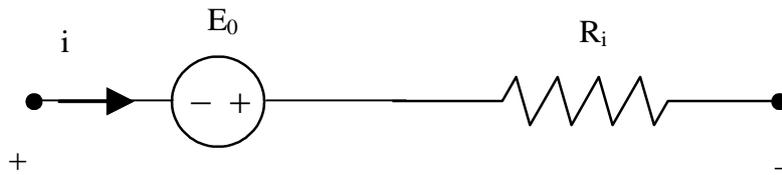


Figura 19a Modello circuitale di una batteria

Il generatore di tensione permette di simulare la trasformazione di energia chimica in elettrica e viceversa che avviene all'interno della batteria; la tensione impressa E_0 è pari alla tensione ai capi della batteria durante il funzionamento a vuoto (quando non eroga corrente). La resistenza R_i del resistore, viene detta resistenza interna della batteria e permette di simulare la dissipazione di energia elettrica, per effetto Joule, in calore che viene ceduto all'ambiente circostante, che accompagna il passaggio della corrente nella batteria. A questa dissipazione è associata una caduta di tensione. La caratteristica tensione-corrente del bipolo di figura 19a è illustrata in figura 19b. Il generatore di tensione reale (la batteria) è un componente controllato sia in tensione che in corrente.

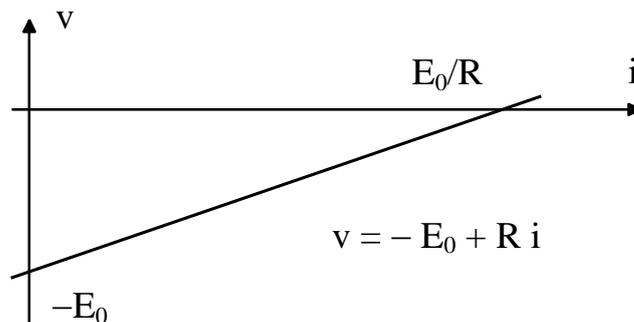


Figura 19b Caratteristica tensione-corrente di un generatore di tensione reale (batteria).

Generatore di corrente

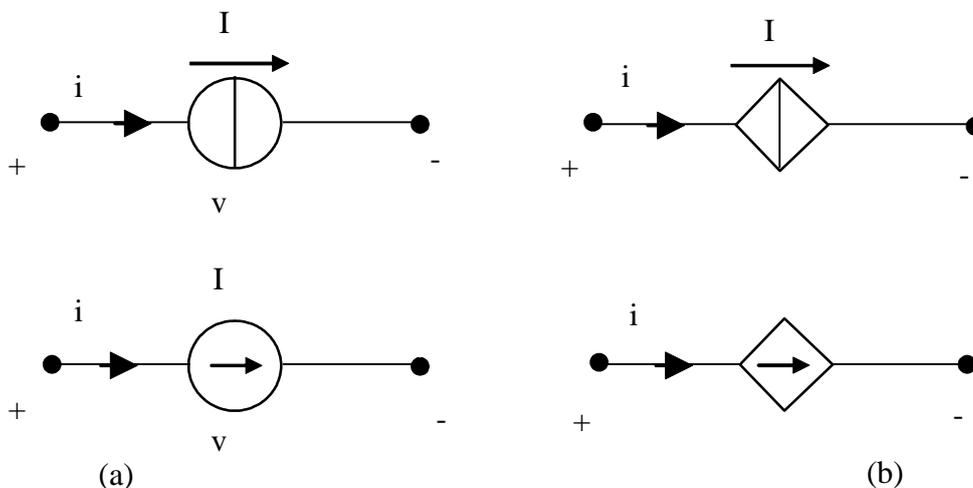
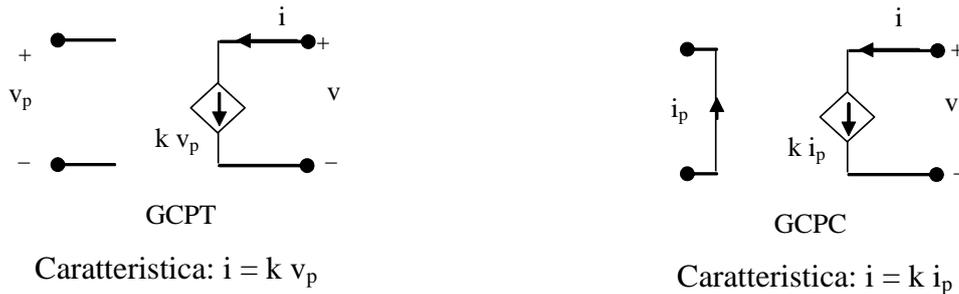


Figura 20 Simboli del generatore di corrente

I simboli che vengono utilizzati per il generatore indipendente di corrente sono indicati nella figura 20a, quelli che vengono utilizzati per il generatore di corrente pilotato (o dipendente) nella figura 20b (i due simboli vengono usati nella letteratura scientifica con uguale frequenza e sono del tutto equivalenti). Nel caso del generatore indipendente la corrente impressa (I) è una funzione nota del tempo, mentre nel caso del generatore pilotato dipende da un'altra grandezza che può essere la corrente (generatore di corrente pilotato in corrente: GCPC) o la tensione (generatore di corrente pilotato in tensione: GCPT) di un altro componente del circuito. Con riferimento ai versi positivi delle grandezze indicati nella figura, l'equazione costitutiva del generatore di corrente è la seguente:

$$i = I \quad (27)$$

In figura sono illustrati i generatori pilotati GCPT e GCPC aventi caratteristica lineare.



L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (13) e risulta:

$$p = v i = v I \quad (28)$$

La potenza elettrica assorbita risulta quindi positiva o negativa a seconda che la tensione ai capi del generatore abbia verso associato o non associato (secondo la convenzione degli utilizzatori) rispetto a quello della corrente impressa. Il generatore indipendente di corrente è quindi in grado di assorbire od erogare, in dipendenza dalle condizioni di lavoro del circuito, una potenza elettrica di valore qualsiasi, mantenendo comunque inalterato il valore della corrente che lo attraversa. Il generatore indipendente di corrente è un componente controllato in tensione. Il generatore dipendente di corrente non è un componente controllato né in tensione né in corrente.

A differenza dei componenti visti in precedenza, non esiste un componente elettrico reale che venga modellato elettricamente, con buona approssimazione, da un solo generatore di corrente. Il generatore di corrente interviene invece nel circuito elettrico equivalente dei dispositivi elettronici. Ad esempio, è possibile realizzare un circuito complesso che modella un transistor npn in cui sono presenti due generatori di corrente pilotati in corrente.

Il trasformatore ideale

Il trasformatore ideale è un doppio bipolo il cui funzionamento è descritto dalle seguenti relazioni lineari:

$$v_1 = K v_2 \quad (29.a)$$

$$i_2 = -K i_1 \quad (29.b)$$

Dove la costante K è detta rapporto di trasformazione. Il simbolo del trasformatore ideale è indicato nella figura 21. Si noti che in figura 21 una coppia di terminali è segnata con un punto, indicando quindi i versi di riferimento positivi delle tensioni e delle correnti per cui le equazioni costitutive (30) sono corrette. In figura 26 è mostrato inoltre uno dei possibili circuiti equivalenti del trasformatore ideale. Si noti anche che, poiché il trasformatore ideale è un componente ideale definito dalle (30), le relazioni tra tensioni e correnti a primario e secondario sono valide per tutte le forme d'onda (incluso quindi il regime stazionario).

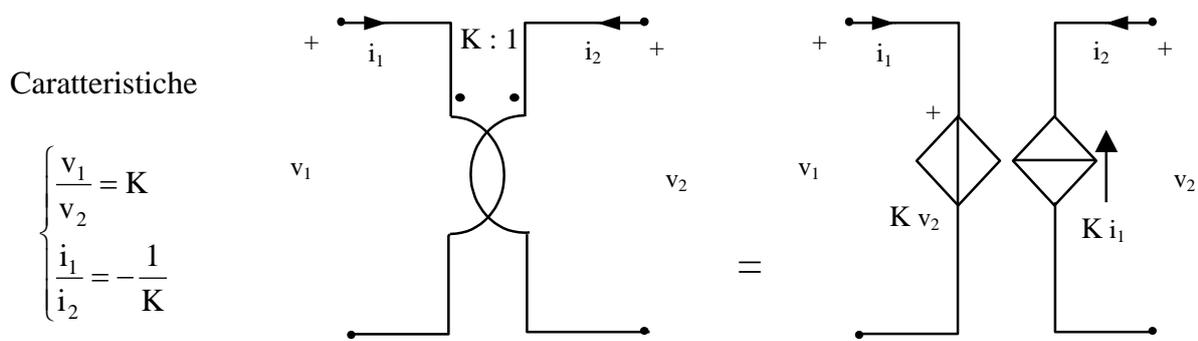


Figura 21 - Trasformatore ideale e circuito equivalente.

La potenza assorbita dal trasformatore ideale è nulla; infatti, con riferimento ai versi di riferimento positivi delle tensioni e delle correnti definiti in figura 21, si ha

$$p(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = (Kv_2(t))\left(-\frac{i_2(t)}{K}\right) + v_2(t)i_2(t) = -v_2(t)i_2(t) + v_2(t)i_2(t) = 0$$

Quindi la somma delle potenze assorbite a primario e secondario è complessivamente nulla, ovvero la potenza assorbita a primario dal trasformatore ideale ($p_1 = v_1 i_1$) risulta in ogni istante uguale a quella erogata al secondario ($p_2 = -v_2 i_2$). Anche se non assorbe potenza, il trasformatore ideale muta i parametri (tensione e corrente) con cui la energia elettrica viene assorbita a primario ed erogata a secondario: la tensione viene ridotta (od aumentata) di un fattore pari al rapporto di trasformazione del trasformatore K mentre la corrente viene aumentata (o diminuita) dello stesso fattore.

Quando a secondario di un trasformatore ideale è collegato un resistore di resistenza R , il primario si comporta come un resistore di resistenza equivalente K^2R . Tale equivalenza è illustrata nella figura 22 e prende il nome di “riduzione da secondario a primario”. La dimostrazione è immediata:

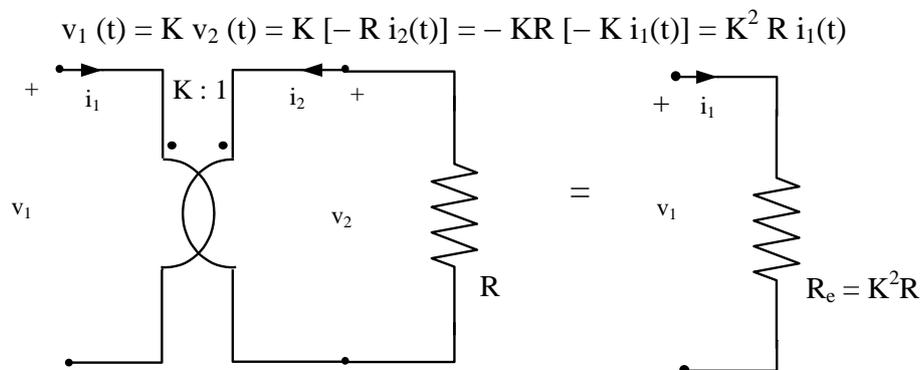


Figura 22 - Riduzione da secondario a primario.