

ELETTROMAGNETISMO

1. RICHIAMI SULLE DEFINIZIONI DELLE GRANDEZZE FONDAMENTALI

Forza di Lorentz

La forza esercitata su una carica puntiforme in moto nel vuoto ha la seguente espressione (forza di Lorentz):

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.1)$$

dove:

\mathbf{F} = forza che si esercita sulla carica puntiforme (N);

q = carica elettrica (C);

\mathbf{v} = velocità (m/s);

\mathbf{E} = campo elettrico (V/m);

\mathbf{B} = induzione magnetica (T).

La funzione vettoriale \mathbf{E} che esprime il campo elettrico viene definita in base alla forza \mathbf{F} agente su una carica puntiforme (carica di prova, q_p) collocata nel punto in esame e *ferma* rispetto all'osservatore in un riferimento inerziale^(o). Per tale definizione operativa si richiede che la carica di prova non influenzi, con la sua presenza, le sorgenti del campo. In tali condizioni il campo elettrico \mathbf{E} è definito dal rapporto \mathbf{F}/q_p e l'esperienza mostra che esso è indipendente dal valore e dal segno della carica di prova. Così definito in termini del tutto generali, il vettore \mathbf{E} appare descrittivo dello stato del sistema nel punto considerato.

Come mostrato dalla (1.1), una carica puntiforme q in moto con una velocità \mathbf{v} rispetto all'osservatore è sottoposta ad una forza che, oltre al termine $q\mathbf{E}$, contiene il termine mozionale $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, di interazione tra la velocità della carica e l'induzione magnetica \mathbf{B} (forza che è ortogonale a \mathbf{v} e che dunque non compie lavoro) Tale termine viene assunto come definizione operativa di \mathbf{B} nel punto "attraversato" dalla carica q nell'istante considerato con la velocità \mathbf{v} rispetto all'osservatore in un riferimento inerziale (tale definizione si affianca a quella che coinvolge il momento amperiano puntiforme di prova, che permette di fare misure statiche ma necessita di una attenta definizione di "momento di dipolo magnetico"). Si noti tuttavia che, in linea di principio, la conoscenza del termine $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ non permette di determinare la componente di \mathbf{B} parallela a \mathbf{v} , il che implica necessariamente che per la determinazione di \mathbf{B} è necessaria almeno una coppia di misure nello stesso punto, ma con velocità vettorialmente diverse. Inoltre, come per la misura del campo elettrico, tale definizione operativa richiede che la carica di prova non influenzi, con la sua presenza, le sorgenti del campo.

Polarizzazione elettrica

Da un punto di vista macroscopico e strettamente fenomenologico – che tiene conto solo degli effetti prodotti e non delle cause che li hanno prodotti – l'azione di un campo elettrico \mathbf{E} su un materiale non conduttore può essere descritta dicendo che ogni volumetto di materia, quando è sottopo-

^(o) La formulazione dell'elettromagnetismo è appunto concepita nell'ambito dei *Sistemi di riferimento inerziali* (o *galileiani*); si tratta dei sistemi per i quali è verificato il principio di inerzia (la conservazione dello stato di quiete o di moto di un corpo non soggetto a forze). Tali sono tradizionalmente considerati i sistemi in quiete rispetto alle stelle fisse e, in pratica, anche quelli ancorati ai laboratori terrestri. Si ricorda che è *inerziale ogni sistema in moto traslatorio uniforme rispetto ad un sistema inerziale* e, più in generale, che *tutte le leggi della fisica* (e quindi anche quelle dell'elettromagnetismo) *sono invarianti rispetto alla totalità dei sistemi inerziali*. In questo principio si inquadra l'*invarianza della velocità della luce nel vuoto* rispetto a tutti i sistemi inerziali.

sto al campo \mathbf{E} , diviene sede di un dipolo elettrico⁽¹⁾ con momento infinitesimo $d\mathbf{p}$, proporzionale al volume $d\tau$ occupato dal volumetto. Così lo stato della materia polarizzata può essere caratterizzato punto per punto per mezzo della grandezza vettoriale intensità di polarizzazione elettrica:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V} \quad (1.2)$$

dove :

\mathbf{P} = polarizzazione elettrica del mezzo (C/m^2); $\Delta \mathbf{p}$ = momento di dipolo elettrico ($\text{C}\cdot\text{m}$); ΔV = volume (m^3).

Il passaggio al limite va effettuato con volumi sufficientemente piccoli da poter trascurare le variazioni delle grandezze nella regione dello spazio considerata, ma allo stesso tempo sufficientemente grandi da contenere un numero elevato di atomi, tale da poter trascurare le fluttuazioni delle grandezze su scala atomica.

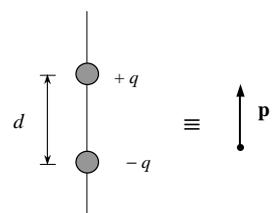
Magnetizzazione

Da un punto di vista macroscopico e strettamente fenomenologico l'azione sulla materia di un campo di induzione magnetica \mathbf{B} può essere descritta dicendo che ogni volumetto $d\tau$ di materia, quando è sottoposto all'azione del campo \mathbf{B} , diviene sede di un dipolo magnetico⁽²⁾ con momento infinitesimo $d\mathbf{m}$, proporzionale a $d\tau$. Così lo stato della materia magnetizzata può essere caratterizzato punto per punto per mezzo della grandezza vettoriale intensità di polarizzazione magnetica (magnetizzazione):

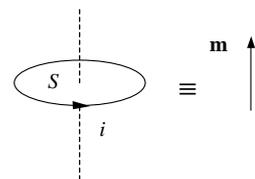
$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{m}}{\Delta V} \quad (1.3)$$

dove:

⁽¹⁾ Si consideri il sistema costituito da due cariche puntiformi di valore opposto, $+q$ e $-q$, situate nel vuoto ad una distanza d , e si supponga di avvicinarle progressivamente fra loro, aumentandone contemporaneamente il valore assoluto, in modo che il prodotto qd non cambi. Più precisamente, si consideri il limite al quale tende tale sistema quando d e q tendono rispettivamente a 0 e a $+\infty$, in modo tale che il prodotto qd tenda ad una quantità m_e finita e non nulla. Il sistema che si ottiene facendo questo limite si chiama **dipolo elettrico**. Per caratterizzare un dipolo elettrico occorre individuare: 1) la *direzione* della retta sulla quale sono poste le due cariche puntiformi opposte; 2) il *verso* (da quella negativa a quella positiva) secondo il quale le cariche sono disposte; 3) il *valore* p al quale tende il prodotto qd . Occorre perciò una grandezza vettoriale \mathbf{p} che si chiama **momento del dipolo elettrico**.



⁽²⁾ Si consideri (Figura. 2) il sistema costituito da una corrente i che percorre una spira circolare: sia S l'area della superficie circondata dalla spira. Si supponga di diminuire progressivamente S aumentando contemporaneamente i , in modo che il prodotto iS non cambi. Più precisamente si consideri il limite al quale tende tale sistema quando S e i tendono rispettivamente a 0 e a $+\infty$, in modo tale che il prodotto iS tenda ad una quantità m_m finita e non nulla. Il sistema che si ottiene facendo questo limite si chiama **dipolo magnetico**. Per caratterizzare un dipolo magnetico occorre individuare: 1) la *giacitura* del piano della spira, e ciò può farsi assegnando la *direzione* della normale al piano; 2) il *verso* della corrente i nella spira, e ciò può farsi assegnando un verso sulla direzione precedente: quello destrogiro rispetto al verso della corrente i ; 3) il *valore* m al quale tende il prodotto iS . Occorre perciò una grandezza vettoriale \mathbf{m} che si chiamerà **momento del dipolo magnetico**.



\mathbf{M} = magnetizzazione del mezzo (A/m); $\Delta\mathbf{m}$ = momento di dipolo magnetico ($\text{A}\cdot\text{m}^2$); ΔV = volume (m^3).

Spostamento elettrico e campo magnetico

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.4)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (1.5)$$

dove:

\mathbf{D} = spostamento elettrico (C/m^2); \mathbf{H} = campo magnetico (A/m); ϵ_0 = costante dielettrica del vuoto ($8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F}/\text{m}$); μ_0 = permeabilità magnetica del vuoto ($4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H}/\text{m} \cong 1.256 \cdot 10^{-6} \text{ H}/\text{m}$).

Spesso è possibile supporre che la polarizzazione elettrica sia proporzionale al campo elettrico e che la magnetizzazione sia proporzionale al campo magnetico (mezzo omogeneo isotropo):

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (1.7)$$

dove χ_e , χ_m sono rispettivamente la suscettività elettrica e magnetica. In questo caso è possibile riscrivere le (1.4)-(1.5) come segue:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1.8)$$

$\epsilon_r = 1 + \chi_e$ = costante dielettrica relativa;

$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ = costante dielettrica (del mezzo)

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (1.9)$$

$\mu_r = 1 + \chi_m$ = permeabilità magnetica relativa;

$\mu = \mu_r \mu_0$ = permeabilità magnetica (del mezzo)

Densità volumetrica di carica elettrica

Si consideri un punto P dello spazio ed un elemento di volume V centrato in P.

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad (1.10)$$

dove:

ρ = densità volumetrica di carica elettrica nel punto P (C/m^3); ΔQ = carica elettrica presente in V (C); ΔV = volume di V (m^3).

Densità di corrente elettrica

Si consideri un punto P dello spazio ed una superficie piana passante per P.

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t} \quad (1.12)$$

dove:

\mathbf{J} = densità volumetrica di corrente elettrica nel punto P (A/m^2); \mathbf{n} = versore normale alla superficie nel punto P; ΔS = area dell'elemento di superficie considerato centrato in P (m^2); ΔQ = carica

elettrica che ha attraversato l'elemento di superficie nel verso individuato da \mathbf{n} (C); Δt = intervallo di tempo considerato (s).

2. LE EQUAZIONI FONDAMENTALI DELL'ELETTROMAGNETISMO

Equazioni di Maxwell in forma locale

Sono riportate qui di seguito le due equazioni di Maxwell in forma locale:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

alle quali viene associata l'equazione di continuità:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.3)$$

dove \mathbf{E} è il vettore **campo elettrico**, \mathbf{D} il vettore **induzione elettrica**, \mathbf{H} il vettore **campo magnetico**, \mathbf{B} il vettore **induzione magnetica**, \mathbf{J} la **densità di corrente** e ρ la **densità volumetrica di carica**.

Il problema elettrodinamico è ulteriormente definito introducendo le **equazioni di legame materiale**:

$$\mathbf{D} = f_1(\mathbf{E})$$

$$\mathbf{B} = f_2(\mathbf{H})$$

$$\mathbf{J} = f_3(\mathbf{E}, \mathbf{E}_i)$$

Quando è possibile assumere l'ipotesi di **mezzo omogeneo** (indipendenza dalla posizione), **isotropo** (indipendenza dalla direzione) e **lineare**, come ad esempio nel vuoto, le **equazioni di legame materiale** vengono riscritte come segue:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \quad (2.6)$$

dove ε , μ e σ sono rispettivamente la **permittività dielettrica** (o, **costante dielettrica**), la **permeabilità magnetica** e la **conducibilità elettrica** del mezzo considerato. La (2.6) è detta **legge di Ohm in forma locale**. Il vettore \mathbf{E}_i che vi compare è detto campo elettrico impresso. Tale vettore non conservativo è essenziale al fine di ottenere una circolazione di corrente. Esso ha le dimensioni di un campo elettrico (V/m): esercita azioni di forza sulle cariche elettriche ma non deve considerarsi un campo elettrico in quanto la sua natura è legata a fenomeni non elettrici. Senza entrare nel dettaglio, si ricorda che esistono numerosi fenomeni di varia natura (chimica, termica, meccanica) che causano azioni di forza sulle cariche elettriche. I dispositivi entro cui hanno sede i fenomeni suddetti, sono denominati "generatori elettrici".

Applicando l'operatore divergenza alla (2.1), e ricordando la solenoidalità del rotore si ottiene:

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.7)$$

che, combinata con l'equazione di continuità (2.3), fornisce :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{D} - \rho = \text{cost.}$$

Ipotizzando che sia esistito un istante in cui in ogni punto dello spazio considerato si sia avverata una situazione in cui $\mathbf{D} = 0$ e $\rho = 0$, la costante è identicamente nulla. Si ottiene quindi la **legge di Gauss** in forma locale:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.8)$$

Analogamente, applicando l'operatore divergenza ad ambo i membri della (2.2) si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = \text{cost.}$$

Ipotizzando che sia esistito un istante in cui il campo di induzione magnetica sia stato ovunque nullo, si ottiene infine:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.9)$$

Il campo \mathbf{B} è quindi solenoidale, e le sue linee di forza si richiudono sempre su se stesse.

Equazioni di Maxwell in forma integrale

Integrando ambo i membri della (2.1) su una superficie S avente come contorno la curva chiusa Γ ed applicando il teorema di Stokes si ottiene:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i_c = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.10)$$

dove con i_c si è indicata la corrente totale concatenata^(o), somma della corrente di conduzione e della corrente di spostamento.

La (2.10) esprime la legge della circuitazione magnetica, nota anche come **legge di Ampère - Maxwell**: *la circuitazione del vettore campo magnetico lungo una linea chiusa qualsiasi è pari alla corrente totale concatenata con tale linea.* Si noti che è corretto parlare di corrente concatenata i_c , poiché, per la (2.7), la quantità $\mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t$ è solenoidale. La corrente concatenata i_c non dipende quindi dalla superficie S , ma solo dalla curva Γ su cui tale superficie si appoggia. Non è così, in generale, per le correnti di conduzione e di spostamento prese separatamente.

Analogamente, integrando ambo i membri della (2.2) su una superficie S avente come contorno la linea chiusa Γ ed applicando il teorema di Stokes si ottiene:

^(o) Si intende per corrente "concatenata" con una data linea Γ , l'intensità della corrente che attraversa la superficie S , arbitrariamente scelta tra quelle il cui bordo è Γ ; il verso di riferimento per il segno della corrente è quello del versore \mathbf{n} associato al verso di percorrenza di Γ , secondo la convenzione destrogira (regola della mano destra).

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{ndS} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = e = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{ndS} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{ndS} \quad (2.11)$$

dove Φ_c rappresenta il flusso del campo di induzione magnetica concatenato con la linea chiusa Γ . L'equazione (2.11) esprime la legge della circuitazione elettrica, altrimenti nota come legge di Faraday - Neumann - Lenz, fondamentale per lo studio dei fenomeni di induzione elettromagnetica: *ogni volta che il flusso di induzione magnetica concatenato con una linea chiusa qualsiasi varia nel tempo, si genera nella linea stessa una forza elettromotrice (f.e.m.) pari alla derivata temporale del flusso cambiata di segno*. Se la linea è conduttrice il senso della f.e.m. indotta è tale da creare una corrente che dà luogo ad un campo magnetico che tende ad opporsi alla variazione di flusso che ha originato la f.e.m. stessa.

Applicando il teorema della divergenza alla (2.8) si ottiene la legge di Gauss in forma integrale:

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{D} \, d\tau = \oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{ndS} = \int_{\tau} \rho \, d\tau = Q \quad (2.12)$$

cioè: il flusso del vettore di induzione elettrica attraverso una superficie chiusa qualsiasi è pari alla quantità di carica racchiusa in tale superficie.

Allo stesso modo, dalla (2.9) si ottiene:

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{B} \, d\tau = \oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{ndS} = 0 \quad (2.13)$$

Applicando il teorema della divergenza alla legge della conservazione della carica si ottiene:

$$i = \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{J} \, d\tau = \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{ndS} = -\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau = -\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \, d\tau = -\frac{dQ}{dt} \quad (2.14)$$

cioè: il flusso del vettore densità di corrente uscente da una superficie chiusa qualsiasi è pari alla variazione di carica nell'unità di tempo nel volume racchiuso da tale superficie.

A completare il quadro si aggiunge la legge di Lorentz:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.15)$$

esprime la forza che agisce su una carica q in moto in un campo elettromagnetico con velocità \mathbf{v} . La (2.15) può essere riferita all'unità di volume, caratterizzata dalla densità di carica ρ e dalla densità di corrente \mathbf{J} :

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (2.16)$$

Teorema di Poynting

Il teorema di Poynting rappresenta il bilancio energetico fondamentale dell'elettromagnetismo, fornendo un'espressione che descrive la conservazione dell'energia nei sistemi elettromagnetici. Moltiplicando scalarmente per \mathbf{E} la (2.1) e per \mathbf{H} la (2.2), e sottraendo membro a membro si ha:

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.17)$$

Utilizzando l'identità vettoriale:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{C}$$

il primo membro della (2.17) può essere riscritto come segue:

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (2.18)$$

Supponendo valida la legge di Ohm locale (2.6), la (2.18) può essere ulteriormente sviluppata:

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}^2 - \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J} \quad (2.19)$$

La grandezza vettoriale $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ viene chiamata **vettore di Poynting**, e rappresenta la densità di potenza associata ad un'onda elettromagnetica. La (2.19) può essere più facilmente interpretata integrandola su un volume finito τ delimitato dalla superficie chiusa S . Applicando in maniera opportuna il teorema della divergenza si ottiene:

$$\int_{\tau} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J} dV = \int_{\tau} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV + \int_{\tau} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV + \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma} dV + \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.20)$$

Supponendo valida l'ipotesi di mezzo lineare, ed applicando le equazioni di legame materiale per mezzi lineari, isotropi ed omogenei (2.4) e (2.5) si ottiene^(*):

$$\int_{\tau} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J} dV = \frac{d}{dt} \left(\int_{\tau} \frac{B^2}{2\mu} dV + \int_{\tau} \frac{\epsilon E^2}{2} dV \right) + \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma} dV + \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.21)$$

Integrando, infine, entrambi i membri della (2.21) dal tempo iniziale t_0 all'istante t , si ottiene:

$$\int_{t_0}^t \int_{\tau} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J} dV dt = \left[\int_{\tau} \frac{B^2}{2\mu} dV + \int_{\tau} \frac{\epsilon E^2}{2} dV \right]_{t_0}^t + \int_{t_0}^t \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma} dV dt + \int_{t_0}^t \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS dt \quad (2.22)$$

Ponendo:

$$\begin{aligned} E_e &= \frac{1}{2} \int_{\tau} \epsilon E^2 dV & E_m &= \frac{1}{2} \int_{\tau} \frac{B^2}{\mu} dV & E_{em} &= E_e + E_m \\ L_g &= \int_{t_0}^t \int_{\tau} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J} dV dt & E_d &= \int_{t_0}^t \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma} dV dt & E_S &= \int_{t_0}^t \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS dt \end{aligned}$$

^(*) Si noti che dimensionalmente tutti i termini della (2.21) rappresentano delle potenze, misurate in Watt (W).

la (2.22) si presta alla seguente interpretazione: il lavoro L_g compiuto (nell'unità di tempo) all'interno del volume dai campi impressi (lavoro compiuto dai generatori) è pari alla somma della variazione di energia elettromagnetica E_{em} contenuta in τ , dell'energia dissipata E_d (per effetto Joule) all'interno di τ e dell'energia E_s uscente dal volume.

$$L_g = \Delta E_{em} + E_d + E_s \quad (2.23)$$

La variazione di energia elettromagnetica ΔE_{em} è somma della variazione di energia elettrostatica E_e e della variazione di energia magnetica E_m .

Come già accennato, il flusso del vettore di Poynting rappresenta il flusso di energia irradiato attraverso la superficie S . Nel caso di campi stazionari o quasi stazionari il vettore di Poynting cala, al crescere del raggio r della superficie nella quale è contenuto il sistema elettromagnetico in esame, come $1/r^4$, e quindi si attenua molto rapidamente. In tali casi è lecito trascurare l'energia irradiata nel bilancio (2.23). I campi rapidamente variabili calano invece come $1/r$, ed il flusso del vettore di Poynting non può essere trascurato neanche a distanze molto grandi (poiché va come $1/r^2$, e la superficie di integrazione cresce come r^2).

TABELLA RIASSUNTIVA DELLE LEGGI FONDAMENTALI DELL'ELETTROMAGNETISMO

Si postula la validità delle equazioni di Maxwell in qualunque punto dello spazio ed in qualunque mezzo materiale purché in quiete rispetto al sistema di riferimento inerziale assunto.

FORMA LOCALE

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

\Leftrightarrow

FORMA INTEGRALE

$$e = \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_e}{dt}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

\Leftrightarrow

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i_c$$

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ DELLA CARICA ELETTRICA

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

\Leftrightarrow

$$i = \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{dQ}{dt}$$

EQUAZIONI DELLA DIVERGENZA

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

\Leftrightarrow

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

\Leftrightarrow

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

EQUAZIONI DI LEGAME MATERIALE
PER MEZZI LINEARI, OMOGENEI E ISOTROPI

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$

3. PROPRIETÀ ELETTRICHE DEI MATERIALI CONDUTTORI ED ISOLANTI

La resistività dei metalli varia con la temperatura secondo il coefficiente di proporzionalità α : esso è positivo e costante fra circa -100°C e $+150^{\circ}\text{C}$. La resistività alla temperatura T è data da:

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \quad (3.1)$$

La formula non è valida vicino allo zero assoluto (superconduttività) ed al punto di fusione; i conduttori non metallici hanno generalmente un coefficiente di temperatura negativo. Gli isolanti hanno pure un coefficiente di temperatura negativo e di valore non costante.

materiale	resistività ρ [$\text{n}\Omega\cdot\text{m}$]	conducibilità σ [MS/m]	coefficiente di temperatura α [$\text{m}\Omega/(\Omega\cdot\text{K})$] (a 20°C)
Argento (99.9%)	16	62.5	3.8
Rame elettrolitico	17.6	56.8	3.9
Rame ricotto	17.3	56.8	3.9
Rame incrudito	17.7	56.8	3.85
Oro	23.6	42.4	3.0
Alluminio crudo	28	35.7	4
Zinco	62	16.1	4.0
Platino	117	8.5	3.9
Bronzo	36	27.7	1.65
Nickel	136	13.8	5
Ferro (99%)	100 ÷ 150	6.7 ÷ 10	5.5
Ghisa	700 ÷ 1600	0.6 ÷ 1.4	2.0 ÷ 4.5
Acciaio (0.1% C)	200	5	4.2
Acciaio (0.4% C)	160	6.2	4.2
Acciaio (1% Si)	170	5.9	-
Acciaio (2% Si)	350	2.8	-
Acciaio (4% Si)	550	1.8	-
Grafite	4000 ÷ 20000	0.05 ÷ 0.25	0.4
Carbone per spazzole	20000 ÷ 100000	0.01 ÷ 0.05	0.4

Nel vuoto e nell'aria la costante dielettrica ha il valore $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m; negli altri mezzi ha valori variabili, che sono generalmente ottenuti valutando la costante dielettrica relativa ϵ_r riferita a quella del vuoto ($\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$).

materiale	resistività ρ [$\text{M}\Omega\cdot\text{m}$]	costante die- lettrica relati- va, ϵ_r	temperatura massima di lavoro [$^{\circ}\text{C}$]	rigidità dielettrica K [MV/m]	densità ρ_m [kg/m^3]
Porcellana	$10^3 \div 10^7$	4.5 ÷ 6	1000	10 ÷ 12	2400
Bachelite	$10^3 \div 10^4$	5 ÷ 7	130	10 ÷ 12	1600
Carta secca	$10^3 \div 10^4$	1.6 ÷ 2.6	90	4 ÷ 6	820
Vetro	$10^5 \div 10^8$	4.5 ÷ 10	-	30 ÷ 150	4500
Mica	$10^6 \div 10^9$	5 ÷ 6	750	60 ÷ 200	2800
Gomma	$10^6 \div 10^8$	2.3 ÷ 2.7	70	16 ÷ 50	1500
Carta paraffinata	10^8	2.5 ÷ 4	90	10 ÷ 20	1100

La *rigidità dielettrica*, misurata in V/m, è l'intensità di campo (elettrico) necessaria a provocare la *scarica disruptiva* attraverso il dielettrico. Nei gas e nei liquidi la scarica provoca la volatilizzazione di una parte delle molecole, però al cessare della scarica il dielettrico si ricostituisce e riacquista le

sue proprietà isolanti. Nei solidi la scarica porta alla distruzione del dielettrico che rimane perforato nelle zone di minore resistenza alla scarica.

4. PROPRIETÀ MAGNETICHE

Diamagnetismo

In alcuni materiali (tra cui il rame) si ha una perfetta compensazione tra i momenti magnetici di ogni singolo atomo. In tal caso l'applicazione di un campo magnetico esterno anche molto intenso dà luogo ad una magnetizzazione indotta molto debole e smagnetizzante. Il comportamento è diamagnetico per cui la suscettività χ_m è negativa. Si tratta di suscettività molto piccole ed indipendenti dalla temperatura (dell'ordine di -10^{-5}).

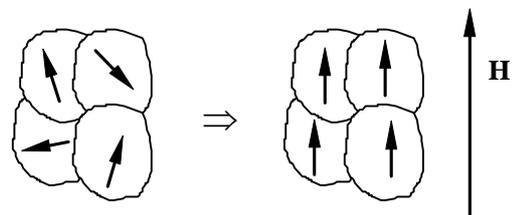
Paramagnetismo

Quando gli atomi o le molecole possiedono un momento magnetico proprio, l'azione di un campo esterno produce un allineamento parziale dei momenti secondo il verso del campo. Tale effetto magnetizzante è il risultato dell'equilibrio tra l'azione ordinatrice del campo e quella dell'agitazione termica. Se l'interazione magnetica tra atomi adiacenti è trascurabile, non si ha magnetizzazione spontanea a livello macroscopico: la suscettività magnetica χ_m è positiva ed ha valori molto modesti alla temperatura ambiente (dell'ordine di 10^{-3}). Essa decresce con la temperatura secondo la Legge di Curie: $\chi_m = C/T$. I materiali che si comportano così sono detti paramagnetici. Essi hanno dunque un comportamento lineare ed isotropo caratterizzato da una permeabilità relativa poco discosta dall'unità. Essi pertanto, come i materiali diamagnetici, modificano in modo inessenziale i campi prodotti "nel vuoto".

Ferromagnetismo

Quando gli atomi, gli ioni o le molecole possiedono un momento magnetico proprio e sono fortemente interagenti tra loro, gli aggregati risultanti sono ferromagnetici. L'esperienza mostra che in tal caso con campi esterni facilmente realizzabili si raggiunge la saturazione (cioè il parallelismo di tutti i dipoli magnetici) a temperatura ambiente. Si riscontrano inoltre vistosi fenomeni di magnetizzazione residua (in assenza di campo magnetico) e di isteresi. Per quanto riguarda la dipendenza dalla temperatura, a partire da un valore critico T_c della temperatura (**temperatura di Curie**) si ha un comportamento paramagnetico e quindi una suscettività magnetica che segue la Legge di Curie - Weiss: $\chi_m = C/(T - T_c)$. Questo insieme di proprietà, ma particolarmente quella di poter dar luogo ad intense magnetizzazioni con deboli campi applicati in materiali di ottimo comportamento meccanico - strutturale, rende il ferromagnetismo di fondamentale importanza per le applicazioni elettrotecniche.

Dal punto di vista microscopico, i materiali ferromagnetici sono formati dall'aggregazione di innumerevoli "domini magnetici" o "domini di Weiss" delle dimensioni di $10^{-3} \div 10^{-6}$ m che sono composti da molecole o atomi che possiedono un momento magnetico proprio e sono allineati fra loro

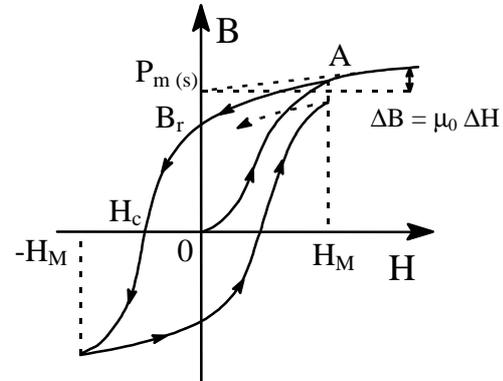


Domini di Weiss prima e dopo l'allineamento con il campo magnetico esterno

Se il materiale è allo stato nativo i momenti magnetici dei domini di Weiss sono orientati casualmente, producendo quindi una magnetizzazione macroscopicamente nulla. In presenza di un campo magnetico esterno, tuttavia, i momenti magnetici tendono ad allinearsi. Tale allineamento permane anche se il campo magnetico esterno è rimosso, dando origine ad una magnetizzazione residua. Tale

effetto magnetizzante è il risultato dell'equilibrio statistico tra l'azione ordinatrice del campo e quella dell'agitazione termica. Aumentando la temperatura l'effetto dell'agitazione diventa sempre più sensibile, causando la completa smagnetizzazione quando si raggiunge la temperatura di Curie. Per studiare i materiali ferromagnetici ci si basa, in concreto, sulle **caratteristiche di magnetizzazione**, cioè sui diagrammi che forniscono il valore in modulo e verso dell'induzione magnetica **B** in funzione del campo magnetico **H** per provini omogenei.

In figura è rappresentato un tipico processo di magnetizzazione. Il materiale sia allo stato nativo (smagnetizzato). Si distinguono una curva di prima magnetizzazione, (tratto OA) e, a partire da A un processo ciclico che non si richiude esattamente. Se il campo magnetico viene invertito ripetutamente tra i valori $\pm H_M$, l'evoluzione si assesta su cicli simmetrici di **isteresi**. Al variare di H_M varia l'ampiezza dei cicli.



Il raggiungimento della saturazione è evidenziato dal fatto che, per campi maggiori di H_M , l'incremento ΔB corrispondente ad un incremento ΔH è lo stesso che si avrebbe nel vuoto, cioè $\mu_0 \Delta H$. Il ciclo di isteresi che viene assunto come termine di paragone è quello descritto a partire dalla saturazione. I principali parametri usualmente considerati per la caratterizzazione dei legami B-H sono:

- le permeabilità relative differenziali valutate lungo la curva di prima magnetizzazione secondo la formula $\mu_{r(d)} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{dB}{dH} \right)_{dH>0}$, in particolare quella iniziale ($B = 0, H = 0$) e quella massima;
- il valore della magnetizzazione di saturazione $P_{m(s)}$;
- l'induzione residua B_r che si ha quando il campo esterno viene portato a zero;
- il campo coercitivo H_c che è necessario applicare in verso opposto a B_r per ridurre a zero l'induzione;
- alcuni valori di energie specifiche del ciclo, quali l'area W_{ist} del ciclo oppure il valore del massimo del prodotto $|BH|$ lungo il ciclo.

L'area W_{ist} del ciclo di isteresi ha un significato particolare: è noto, dal Teorema di Poynting, che la variazione di densità di energia magnetica in seguito ad una variazione $d\mathbf{B}$ del campo di induzione è $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$. Tale energia magnetica viene convertita in parte in energia conservativa ed in parte in energia dissipata (calore), secondo la relazione:

$$\int_{V_m} (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}) d\tau = dE_c + \delta E_d \quad (4.1)$$

Integrando la (2.3) su un ciclo di isteresi, si ottiene:

$$\int_{V_m} \oint (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}) d\tau = \oint dE_c + \oint \delta E_d = E_d \quad (4.2)$$

Se si considera la densità di energia dissipata (misurata in joule /ciclo·m³), la (4.2) diventa:

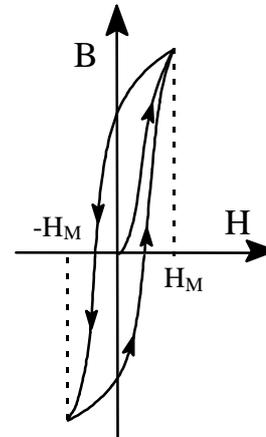
$$P_d = \oint (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}) = W_{ist} \propto B_M^{1.6} \quad (4.3)$$

La relazione di proporzionalità dell'area del ciclo di isteresi W_{ist} con una potenza del campo di induzione massimo B_M è specificata dalle Norme. L'esponente è solitamente compreso tra 1.6 e 2.

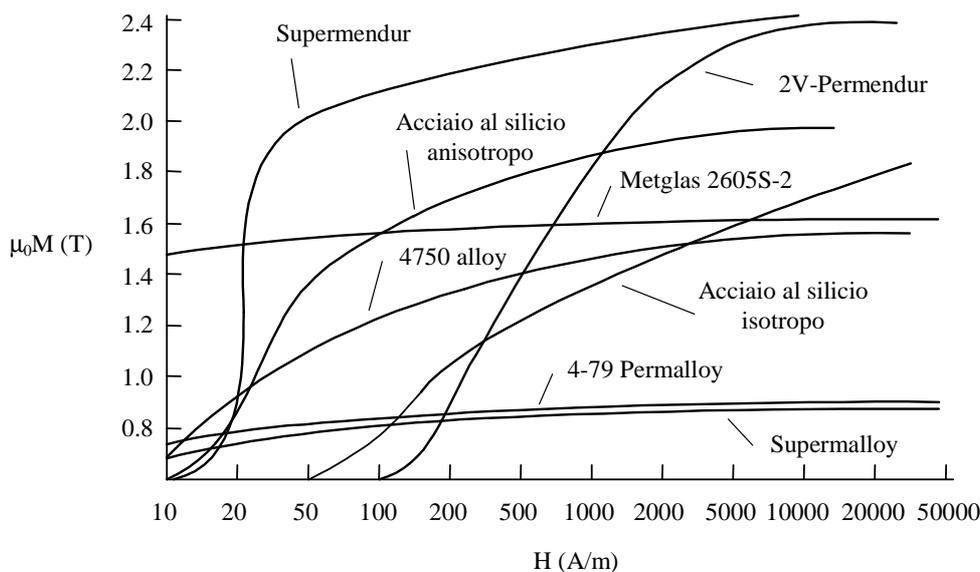
Materiali ferromagnetici dolci

Un importante sottogruppo nei materiali ferromagnetici è dato dai **materiali ferromagnetici dolci** che sono caratterizzati da elevati valori della permeabilità e basso valore del campo coercitivo ($H_c < 10^3$ A/m) cui si collega il basso valore dell'area del ciclo di isteresi.

I materiali di questo gruppo vengono impiegati laddove interessa limitare al massimo le correnti necessarie per produrre e controllare i flussi di induzione (nuclei di elettromagneti, nuclei di trasformatori, rotor e statori di macchine rotanti). I materiali di questo gruppo principalmente utilizzati sono il ferro e le sue leghe con nickel, cobalto e silicio, gli acciai a basso tenore di carbonio e le ferriti dolci.



Ciclo di isteresi per materiali ferromagnetici dolci



Caratteristiche di magnetizzazione di alcuni materiali dolci.

Il ferro commercialmente puro (ferro dolce) viene utilizzato nelle applicazioni in continua (nuclei di elettromagneti). Per applicazioni in alternata, ad esempio lamierini per motori, viene utilizzato preferibilmente acciaio a basso tenore di carbonio (Low Carbon) e acciaio al silicio a grani non orientati (isotropo) a causa della loro minore conducibilità. Questi due materiali sono in assoluto i più usati nel mondo (1÷2 Mton/anno). L'isotropia fa sì che le proprietà magnetiche non varino al variare della direzione del flusso magnetico e quindi che non si abbiano problemi particolari nelle operazioni di taglio e montaggio. Questi tipi di materiale sono usati per le macchine rotanti e solo eccezionalmente per i trasformatori. Diversi sono i tipi di lamiere laminate a caldo sia per quanto riguarda lo spessore (0.5 mm oppure 0.35 mm) sia soprattutto per il tenore di silicio che può andare dall'1% al 4.5%. Per i nuclei dei trasformatori (salvo quelli di piccola potenza), in cui il peso e l'efficienza sono importanti, viene utilizzato preferibilmente acciaio al silicio a grani orientati (anisotropo).

L'anisotropia offerta dalle leghe Fe - Si a cristalli orientati, a differenza delle altre leghe, è tale da presentare per il flusso una sola direzione ottimale (quella di laminazione) per la quale le caratteristiche magnetiche sono molto buone e le perdite molto basse.

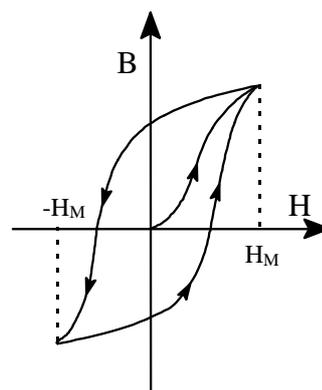
Per le applicazioni elettroniche (trasformatori ed induttori) a frequenza 1÷100 kHz sono solitamente utilizzate le leghe ferro - nickel (permalloys). Queste hanno sia una elevata permeabilità iniziale μ_i sia una duttilità sufficientemente elevata da potere formare strisce molto sottili. Le leghe ferro - cobalto, di solito con un 2% di Vanadio per migliorare la duttilità, sono utilizzate nelle applicazioni ad alta temperatura a causa della loro elevata temperatura di Curie ($T_c \approx 980^\circ\text{C}$). Le leghe amorfe ferro - boro (vetri metallici) hanno una composizione del tipo $(\text{Fe}, \text{Co}, \text{Ni})_{80}(\text{B}, \text{C}, \text{Si})_{20}$ e sono ottenute per rapido raffreddamento del materiale fuso.

Le ferriti (dolci), a causa della loro conducibilità estremamente bassa, sono utilizzate per i nuclei di trasformatori ed induttori funzionanti a frequenza oltre 100 kHz. Le ferriti sono ossidi metallici sinterizzati (facilmente lavorabili) con la formula generale XFe_2O_4 . Nelle ferriti manganese - zinco X è una combinazione di Mn, Zn e Fe, mentre nelle ferriti nickel - zinco Mn è sostituito da Ni. Le ferriti MnZn hanno un capo di induzione di saturazione piuttosto elevato, ma anche una alta conducibilità, per cui sono utilizzate per applicazioni fino ad 1 MHz. Oltre 1 MHz si utilizzano solitamente le ferriti NiZn che hanno una conducibilità notevolmente più bassa.

Materiali ferromagnetici duri

Un altro importante sottogruppo nei materiali ferromagnetici è dato dai **materiali ferromagnetici duri** che sono caratterizzati da elevati valori della induzione residua e del campo coercitivo ($H_c > 10^4$ A/m) cui si collega l'elevato valore del prodotto $|BH|$ ottenuto nel 2° quadrante.

I materiali di questo gruppo vengono impiegati laddove interessa realizzare flussi magnetici costanti nel tempo e pertanto conviene ricorrere al magnetismo permanente invece che a circuiti percorsi da corrente.



Ciclo di isteresi per materiali ferromagnetici duri

I materiali magnetici duri commercialmente più importanti sono le ferriti (dure), le leghe ed i sinterizzati comprendenti terre rare e gli Alnico. Il mercato mondiale dei materiali magnetici duri nel 1990 è stato $1.5 \cdot 10^9$ US\$. Le quote di mercato sono state: 65% ferriti, 22% terre rare (18% composti di cobalto, 4% Nd - Fe - B), 11% Alnico, 2% altri.

Alnico. Gli Alnico (Fe - Al - Ni - Co - Cu) sono divisi in due sottogruppi: gli alnico isotropi (1-4) che contengono fino al 20% di cobalto e gli alnico anisotropi (5-9) che contengono dal 20% al 40% di cobalto. L'anisotropia viene ottenuta per raffreddamento controllato del materiale fuso in presenza di un campo magnetico esterno. Questi materiali hanno un elevato prodotto $|BH|_{\max}$ ($40 \div 70$ kJ/m³), una elevata induzione residua (0.7÷1.35 T) e modesto campo coercitivo (40÷160 kA/m). Gli Alnico sono fragili e quindi sono solitamente prodotti per fusione o sinterizzazione. L'Alnico 5 è il materiale più diffuso di questa famiglia.

Ferriti. Le ferriti (dure) sono ossidi metallici sinterizzati (facilmente lavorabili) con la formula generale $\text{XFe}_{12}\text{O}_{19}$ dove X è solitamente Ba o Sr. A differenza degli Alnico, le ferriti hanno elevato

campo coercitivo ($200 \div 300$ kA/m) ma bassa induzione residua ($0.4 \div 0.5$ T). Le ferriti di stronzio sono meno diffuse delle ferriti di bario a causa del loro costo più elevato, anche se il loro campo coercitivo è circa doppio. Le ferriti sono prodotte spesso in forma legata elastica o rigida (il legante è solitamente plastica o gomma). Le ferriti legate mostrano una notevole uniformità nelle proprietà magnetiche (importante per la produzione di serie) ed hanno il notevole vantaggio di non essere fragili. Lo svantaggio fondamentale è che le proprietà magnetiche peggiorano notevolmente rispetto alle ferriti non legate (il prodotto $|BH|_{\max}$ si riduce del 50%).

Terre rare. I magneti permanenti contenenti samario sono diventati commercialmente disponibili negli anni 70. I magneti SmCo_5 hanno ottenuto in laboratorio ottime prestazioni ($B_r = 1\text{T}$, $H_c = 3200$ kA/m, $|BH|_{\max} = 200$ kJ/m³), ma le prestazioni commerciali sono leggermente più basse ($|BH|_{\max} = 130 \div 160$ kJ/m³). I magneti $\text{Sm}_2(\text{Co}, \text{Fe}, \text{Cu}, \text{Zr})_{17}$ hanno prestazioni commerciali anche migliori ($B_r = 1.1\text{T}$, $H_c = 520$ kA/m, $|BH|_{\max} = 240$ kJ/m³). Questi magneti sono prodotti con la tecnologia ceramica per sinterizzazione, ma anche in forma cristallina e mescolati a leganti plastici per migliorare le caratteristiche meccaniche. I magneti permanenti contenenti neodimio sono diventati commercialmente disponibili nel 1983. I magneti $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ hanno ottenuto in laboratorio valori record del prodotto $|BH|_{\max} = 405$ kJ/m³, ma le prestazioni commerciali sono leggermente più basse ($|BH|_{\max} = 160 \div 300$ kJ/m³). Eccetto che per la temperatura di Curie relativamente bassa (312°C), i magneti Nd - Fe - B sono decisamente superiori a tutti gli altri materiali magnetici duri disponibili attualmente.

I magneti permanenti sono principalmente utilizzati per motori ed altoparlanti. La figura 1 mostra il progresso avvenuto in questo secolo nel campo dei materiali magnetici. Per definire le proprietà dei magneti si utilizza solitamente il prodotto $|BH|_{\max}$. In particolare è evidente la crescita spettacolare avvenuta negli anni 70 nel campo dei sinterizzati comprendenti terre rare. La figura 2 mostra le curve di demagnetizzazione per alcuni materiali ferromagnetici duri.

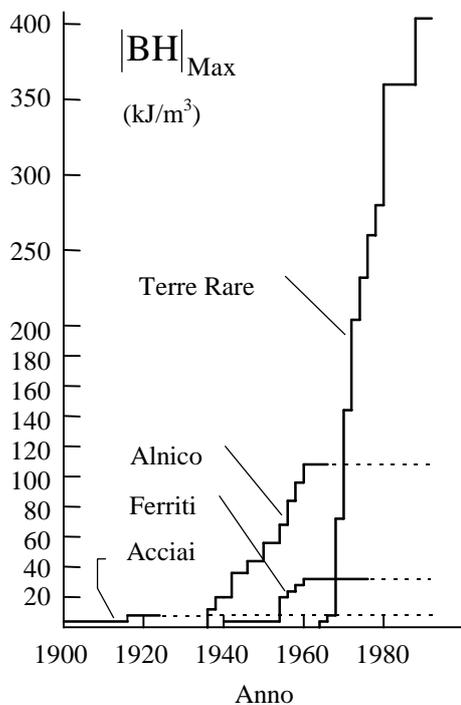


Figura 1.

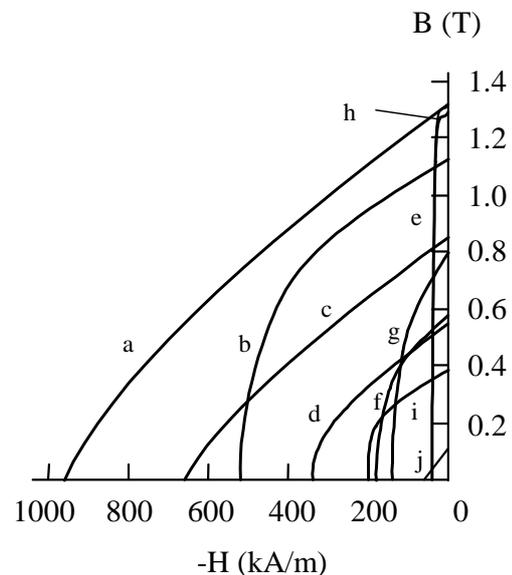


Figura 2. - Curve di demagnetizzazione per materiali ferromagnetici duri: a) $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$, b) $\text{Sm}(\text{Co}, \text{Cu}, \text{Fe}, \text{Zr})_{7.4}$, c) SmCo_5 , d) SmCo_5 legato, e) Alnico 5, f) Mn - Al - C, g) Alnico 9, h) Cr - Co - Fe, i) ferrite, j) ferrite legata.