

Dispense del Corso di

**Elettrotecnica T-A**

A.A. 2020-2021

CdS in Ingegneria Gestionale (L-Z)

Prof. P. L. Ribani

**CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA GESTIONALE**  
**Corso di**  
**ELETTROTECNICA T-A (L-Z)**  
**A.A. 2020-2021**

**Prerequisiti**

Sono richieste le conoscenze di analisi matematica e di fisica che vengono solitamente presentate nei rispettivi corsi del primo anno della Scuola di Ingegneria. In particolare: soluzione di equazioni differenziali ordinarie, operazioni con i numeri complessi, equazioni differenziali alle derivate parziali, equazioni del campo elettromagnetico nel vuoto.

**Programma**

**Circuiti elettrici.**

Passaggio dalla teoria dei campi alla teoria dei circuiti. Circuito elettrico a parametri concentrati. Leggi di Kirchhoff. Principali elementi circuitali: resistore, induttore, condensatore, generatore indipendente di tensione e di corrente, diodo. Principali metodi di analisi dei circuiti elettrici: maglie fondamentali, tensioni di nodo, serie e parallelo di resistori. Principali teoremi per l'analisi delle reti elettriche lineari: sovrapposizione degli effetti, Thevenin, Norton. Cenni allo studio delle reti in regime transitorio. Regime sinusoidale. Studio di circuiti in regime sinusoidale mediante il metodo simbolico. Potenza in regime sinusoidale. Rifasamento. Sistemi trifase. Collegamenti a stella ed a triangolo. Potenza nei sistemi trifase. Sistema trifase con neutro.

**Elementi di macchine elettriche.**

**Trasformatore.** Caratteristiche costruttive e principio di funzionamento. Circuito elettrico equivalente. Funzionamento a vuoto ed in corto circuito. Misura del rendimento. Trasformatore trifase. Parallelo dei trasformatori.

**Macchine asincrone.** Caratteristiche costruttive e principio di funzionamento.. Teorema di equivalenza e circuito elettrico equivalente. Caratteristica meccanica ed elettromeccanica. Cenni al motore monofase.

**Macchine sincrone.** Caratteristiche costruttive e principio di funzionamento come generatore e compensatore.

**Macchine a corrente continua.** Caratteristiche costruttive e principio di funzionamento come motore e generatore.

**Elementi di impianti elettrici e sicurezza elettrica.** Generazione, trasporto e distribuzione dell'energia elettrica. Protezione dai contatti indiretti. Protezione dalle sovracorrenti. Protezione dalle sovratensioni.

**Metodi didattici**

Il corso è strutturato in lezioni frontali in aula in cui vengono presentati tutti gli argomenti indicati nel programma. In particolare la parte riguardante la teoria dei circuiti viene svolta direttamente alla lavagna dedicando ampio spazio allo svolgimento numerico di esercizi sulla soluzione di circuiti elettrici lineari in corrente continua e alternata, monofase e trifase. Gli argomenti relativi alle macchine elettriche ed alla sicurezza elettrica vengono invece prevalentemente illustrati con l'utilizzo di presentazioni al computer disponibili online nel sito del docente.

## Testi di riferimento

Lo studente può trovare la trattazione degli argomenti svolti durante il corso nei seguenti testi di riferimento e può avvalersi di una traccia delle lezioni disponibile online nel sito del docente.

1. G. Chitarin, F. Gnesotto, M. Guarnieri, A. Maschio, A. Stella, *Elettrotecnica: 1 - Principi, Elettrotecnica: 2 - Applicazioni*, Esculapio, 2020.
2. G. Rizzoni, *Elettrotecnica: principi e applicazioni*, McGraw-Hill, 3a edizione, 2013.
3. A.R. Hambley, *Elettrotecnica*, Pearson Paravia Bruno Mondadori, 4a edizione 2009.

## Modalità d'esame

L'esame si svolge mediante una prova scritta ed una prova orale. La prova scritta verifica le competenze acquisite sulla teoria dei circuiti e consiste nella soluzione di un circuito elettrico in regime di corrente alternata, monofase o trifase. Durante la prova lo studente non può consultare alcun testo, ma necessita dell'uso di una calcolatrice. Il voto della prova è in trentesimi; la prova è superata quando la votazione risulti superiore o pari a 15/30. La prova orale può essere sostenuta solo dopo avere superato la prova scritta. Durante la prova orale lo studente deve esporre due argomenti fra quelli di macchine elettriche, impianti elettrici e sicurezza elettrica presenti nel programma, scelti dal docente. Il voto finale è ottenuto facendo la media del voto delle due prove ed aggiungendo o togliendo fino ad un massimo di due punti a seconda che il risultato della prova orale sia migliore o peggiore rispetto a quello della prova scritta.

## Docente:

Prof. Pier Luigi Ribani - Dipartimento di Ingegneria dell'Energia Elettrica e dell'Informazione

“Guglielmo Marconi” - DEI - Università di Bologna

Viale Risorgimento, 2 - 40136 Bologna - Tel. 051 209-3587

e-mail: [pierluigi.ribani@unibo.it](mailto:pierluigi.ribani@unibo.it)

home-page: <http://www.die.ing.unibo.it/pers/ribani/ribani.htm>

## INDICE DEI CAPITOLI

|   |   |        |
|---|---|--------|
| - | Teoria dei circuiti .....               | 1 - 17 |
| - | Metodi per l'analisi dei circuiti ..... | 1 - 33 |
| - | Grandezze periodiche .....              | 1 - 4  |
| - | Regime sinusoidale .....                | 1 - 20 |
| - | Sistemi trifase .....                   | 1 - 10 |
| - | Trasformatori .....                     | 1 - 15 |
| - | Campo magnetico rotante .....           | 1 - 6  |
| - | Macchine asincrone .....                | 1 - 12 |
| - | Macchine sincrone .....                 | 1 - 5  |
| - | Macchine in corrente continua .....     | 1 - 10 |
| - | Impianti .....                          | 1 - 13 |
| - | Sicurezza elettrica .....               | 1 - 6  |

## APPENDICI

|   |   |        |
|---|---|--------|
| - | Elettromagnetismo .....                         | 1 - 15 |
| - | Sistema Internazionale di unità di misura ..... | 1 - 1  |

# TEORIA DEI CIRCUITI

## 1. INTRODUZIONE

Si consideri un sistema elettrico costituito da un certo numero di "componenti" (vedi figura 1). Ciascun componente (A, B, C, D) è racchiuso all'interno di un contenitore da cui escono dei terminali collegati elettricamente tra di loro mediante dei fili metallici (1, 2, 3, 4, 5).

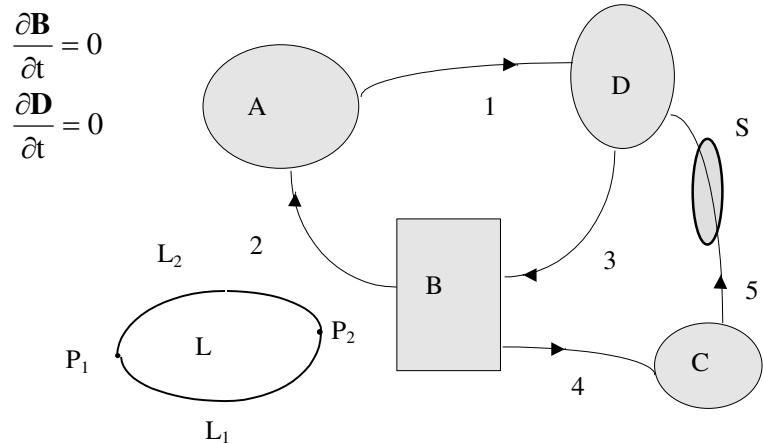


Figura 1

Tutto il sistema è immerso nell'aria che è un mezzo isolante. La regione costituita da tutto lo spazio meno quello occupato dai componenti (spazio esterno ai componenti) è una **regione a connessione lineare semplice**: presa una qualsiasi linea chiusa che giace in tale regione, esiste almeno una superficie che si appoggia a tale linea che giace anch'essa tutta all'interno della regione considerata. Si supponga che nello spazio esterno ai componenti sia possibile considerare nulla la derivata temporale della induzione magnetica e dello spostamento elettrico. Si consideri quindi la circuitazione del campo elettrico relativa ad una qualsiasi linea chiusa L che giace nello spazio esterno ai componenti. Risulta:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = 0 \quad (1)$$

Dalla (1) segue che la circuitazione del campo elettrico lungo una linea che congiunge due punti qualsiasi P1 e P2, rimanendo sempre nello spazio esterno ai componenti, non dipende dalla particolare linea scelta ma unicamente dai punti P1 e P2 (si dice che **il campo elettrico è conservativo**) e viene chiamata differenza di potenziale tra il punto P1 ed il punto P2:

$$\int_{P_1, L_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_1, L_2}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = v_{12} \quad (2)$$

Si consideri una superficie chiusa S qualsiasi che giace nello spazio esterno ai componenti, risulta :

$$\int_S \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \Rightarrow \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (3)$$

La densità volumetrica di corrente elettrica, nello spazio esterno ai componenti è nulla ovunque tranne che all'interno delle connessioni metalliche. In particolare si consideri una superficie S che racchiude al suo interno solo un tratto di connessione metallica; dalla (3) segue che la corrente che circola in quella connessione, non dipende dal punto considerato della connessione, ma è una caratteristica della connessione.

Nessun sistema elettrico reale verifica esattamente le ipotesi assunte per quello sopra descritto; tali ipotesi sono però soddisfatte con buona approssimazione per molti sistemi elettrici reali, per descrivere i quali si fa uso di un modello ideale che prende il nome di circuito elettrico a costanti concentrate. In particolare, per tali sistemi, la circuitazione del campo elettrico lungo una linea che congiunge due punti non è indipendente dalla linea scelta, ma la dipendenza è così piccola che risul-

ta trascurabile a tutti gli effetti pratici. In tal caso, invece di parlare di differenza di potenziale, per indicare l'approssimazione fatta, si preferisce parlare di tensione tra i due punti.

## 2. DEFINIZIONI E LEGGI DI KIRCHHOFF

Un **CIRCUITO ELETTRICO A COSTANTI CONCENTRATE**, o rete elettrica, è un insieme di componenti elettrici ideali soggetto ai vincoli (che saranno enunciati nel seguito) noti come Leggi di Kirchhoff. Nel seguito, per semplicità, con la parola circuito elettrico si intenderà circuito elettrico a costanti concentrate.

La carica elettrica, indicata con  $q$ , è la proprietà intrinseca della materia responsabile dei fenomeni elettrici e magnetici. L'unità di misura della quantità di carica è il coulomb (C). In un circuito elettrico le cariche elettriche possono muoversi attraverso i componenti e le connessioni metalliche. La **corrente**, indicata con  $i$ , che passa attraverso una data superficie (ad esempio la sezione di una connessione metallica) è definita dalla carica elettrica che attraversa quella superficie nell'unità di tempo. L'unità di misura della corrente è l'ampere (A); un ampere è pari ad un coulomb al secondo.

Possiamo dunque esprimere la corrente come: 
$$i = \frac{dq}{dt}$$

Il moto della carica elettrica attraverso i componenti e le connessioni metalliche richiede energia. La **tensione**, indicata con  $v_{BA}$ , tra due terminali A e B in un circuito è il lavoro richiesto per muovere una carica positiva unitaria da A (terminale  $-$ ) a B (terminale  $+$ ). L'unità di misura della tensione è il volt (V).

Possiamo dunque esprimere la tensione come: 
$$v_{BA} = \frac{dw_{A \rightarrow B}}{dq}$$

Un componente elettrico ideale (vedi figura 2) è caratterizzato da un numero di terminali, o morsetti (solitamente un componente a due terminali è detto bipolo, uno a tre terminali è detto tripolo, etc., uno a N terminali è detto N-polo,).

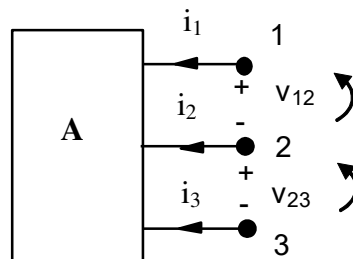


Fig. 2 Componente a tre terminali

A ciascun terminale è associata una corrente che è univocamente definita, in valore e segno, una volta che sia stato arbitrariamente scelto il suo verso positivo (indicato dalla freccia): una corrente  $i_1 = 2$  significa che una corrente di intensità pari a 2 Ampère entra nel componente A attraverso il terminale 1, viceversa, una corrente  $i_1 = -2$  significa che una corrente di intensità pari a 2 Ampère esce dal componente A attraverso il terminale 1

Ad ogni coppia di terminali è associata una tensione che è univocamente definita, in valore e segno, una volta che sia stato arbitrariamente scelto il terminale di riferimento (indicato col segno  $-$ ): una tensione  $v_{12} = 2$  significa che il terminale 1 si trova ad un potenziale superiore di 2 Volt rispetto a quello del terminale 2, viceversa una tensione  $v_{12} = -2$  significa che il terminale 1 si trova ad un potenziale inferiore di 2 Volt rispetto a quello del terminale 2. Talvolta l'indicazione del " $-$ " e del " $+$ " viene sostituita da una freccia che indica il terminale positivo.

Un componente con due terminali viene chiamato bipolo. Nel seguito, per semplicità, si supporrà che i circuiti in esame siano costituiti di soli bipoli; se ciò non fosse vero, si può pensare di ricondursi alla ipotesi, sostituendo i componenti con più di due terminali con opportuni circuiti equivalenti costituiti da soli bipoli: ciò è sicuramente possibile mediante l'introduzione di generatori pilotati (che verranno definiti nel seguito).

All'interno del circuito, i terminali appartenenti a diversi componenti sono collegati tramite connessioni ideali, caratterizzate dall'aver una tensione nulla ai loro capi (vedi figura 3).

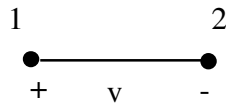


Fig. 3 Connessione ideale ( $v = 0$ )

Un nodo di un circuito elettrico è un punto a cui sono collegati, mediante una connessione ideale, due o più terminali, oppure è un terminale isolato; i nodi del circuito sono quindi le sue connessioni ideali ed i terminali isolati. Il circuito della figura 4 è costituito da cinque bipoli; collegati a 4 nodi (A, B, C, D). Una sequenza chiusa di nodi è una successione di nodi tale che il primo nodo coincide con l'ultimo. (Ad esempio, sono sequenze chiuse AA, ABA, ABCA, ABCDA, etc.)

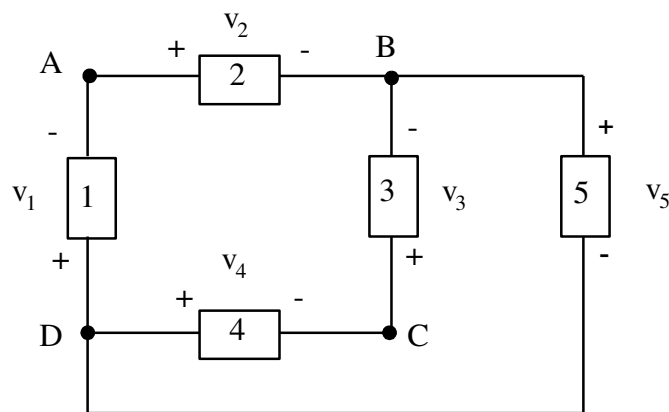


Figura 4. Circuito con 5 elementi e 4 nodi.

**LA LEGGE DI KIRCHHOFF DELLE TENSIONI (LKT)** afferma che per una qualsiasi sequenza chiusa di nodi la somma algebrica delle tensioni (tra due nodi successivi) è nulla.

Con riferimento al circuito della figura 4, applicando la LKT alla sequenza chiusa di nodi ABCA si ottiene la seguente equazione:

$$v_{AB} + v_{BC} + v_{CA} = 0 \quad (4)$$

Le tensioni di nodo (o potenziali di nodo) di un circuito sono le tensioni di tutti i nodi rispetto ad un nodo assunto come riferimento, la cui scelta è arbitraria (ma a cui solitamente si attribuisce un valore nullo). La LKT permette di esprimere la tensione tra una qualsiasi coppia di nodi del circuito come differenza delle relative tensioni di nodo: con riferimento alla figura 4, supponendo di scegliere il nodo A come nodo di riferimento (e posto dunque  $e_A = 0$ ), ed indicando con  $e_B$  ed  $e_C$  le tensioni di nodo dei nodi B e C ( $e_B = v_{BA}$ ;  $e_C = v_{CA}$ ) la equazione (4) permette di scrivere:

$$v_{BC} = e_B - e_C \quad (5)$$

La sequenza chiusa di nodi ABCDA individua un percorso chiuso attraverso i componenti del circuito: i tratti di tale percorso all'interno di ciascun componente vengono detti rami ed il percorso, maglia. In generale, un ramo di un circuito è un percorso che collega due nodi attraversando un componente; ad un bipolo è associato un solo ramo del circuito mentre ad un componente con più di due terminali sono associati più rami (tutti i percorsi possibili che collegano i terminali del componente attraversandolo). Applicando la LKT alla maglia ABCDA, tenendo conto dei versi positivi scelti per le tensioni ai capi dei componenti (tensioni di ramo) e del verso di circuitazione della maglia, si ottiene la seguente relazione:

$$v_2 - v_3 - v_4 + v_1 = 0 \quad (6)$$

La LKT applicata ad una maglia del circuito afferma che la somma algebrica delle tensioni di ramo (sui rami che compongono la maglia) è nulla.

La **LEGGE DI KIRCHHOFF DELLE CORRENTI (LKC)** afferma che per ogni superficie chiusa che interseca unicamente le connessioni tra i componenti, e non i componenti stessi, la somma algebrica delle correnti che attraversano la superficie è nulla.

Si consideri in primo luogo una superficie chiusa che racchiuda al suo interno solo un bipolo (vedi figura 5a).

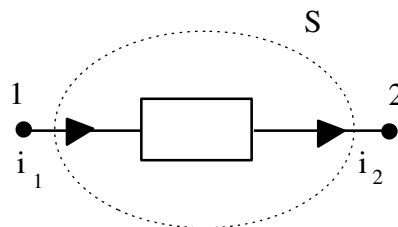


Fig. 5a. Legge di Kirchhoff delle correnti applicata ad un bipolo.

La corrente  $i_1$  entra nella superficie indicata con la linea tratteggiata S nella figura, mentre la corrente  $i_2$  esce da tale superficie (di solito si assumono positive le correnti uscenti e negative quelle entranti); la LKC afferma quindi che deve essere  $i_2 - i_1 = 0$ , da cui segue che:  $i_2 = i_1$ . Tenendo conto di ciò, con riferimento alla figura 5b si consideri la superficie chiusa la cui rappresentazione nel piano del disegno è la linea tratteggiata  $S_1$ .

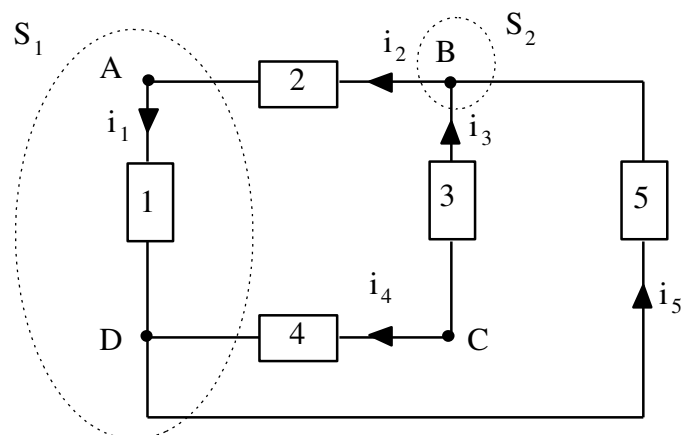


Figura 5b.



Le correnti che attraversano tale superficie sono la corrente  $i_2$  e la corrente  $i_4$  che entrano nella superficie e la corrente  $i_5$  che esce, per cui la LKC applicata a tale superficie permette di scrivere la seguente equazione:

$$-i_2 - i_4 + i_5 = 0 \quad (7)$$

Si consideri la superficie chiusa la cui rappresentazione nel piano della figura 5b è la linea tratteggiata  $S_2$ : tale superficie racchiude al suo interno solo il nodo B e la LKC ad essa associata afferma che la somma algebrica delle correnti dei rami che convergono nel nodo B è nulla:

$$i_2 - i_3 - i_5 = 0 \quad (8)$$

Applicando la LKC a tutti i quattro nodi del circuito di figura 5.b, ottiene quindi il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{array}{cccccc} +i_1 & -i_2 & & & & = 0 \\ & +i_2 & -i_3 & & -i_5 & = 0 \\ & & +i_3 & +i_4 & & = 0 \\ -i_1 & & & -i_4 & +i_5 & = 0 \\ \hline +0 & +0 & +0 & +0 & +0 & = 0 \end{array}$$

Come è immediato verificare, la somma delle equazioni porta ad una identità ( $0 = 0$ ). Tale risultato generale è dovuto al fatto che ogni corrente di ramo  $i_k$  compare esattamente due volte, con segni opposti, nelle LKC relative ai nodi che sono i terminali del ramo  $k$ . Una delle equazioni è dunque una combinazione lineare delle altre  $N - 1 = 3$ , e si può omettere. Le rimanenti  $N - 1 = 3$  equazioni sono chiaramente indipendenti in quanto, qualunque sia l'equazione omessa (ad esempio la quarta, nodo D), tutte le correnti di ramo presenti nell'equazione eliminata compaiono *una sola volta* nelle restanti equazioni (ad esempio  $i_1$ ,  $i_4$  ed  $i_5$ ). Le equazioni LKC indipendenti sono quindi  $N - 1$ .

**Le due leggi di Kirchhoff, delle tensioni e delle correnti, permettono di scrivere delle equazioni lineari tra le tensioni e le correnti che non dipendono dalla natura dei componenti presenti nel circuito, ma unicamente da come essi sono collegati tra di loro (topologia del circuito).**

Sia dato un circuito caratterizzato da  $R$  rami ed  $N$  nodi (ad esempio per il circuito di figura 5.b,  $N = 4$  ed  $R = 5$ ). Per ciascun ramo si assumano versi positivi per la tensione di ramo e la corrente di ramo associati secondo la scelta dell'utilizzatore, ossia quando la corrente entra nel terminale positivo (vedi fig. 6.a). I versi di riferimento associati secondo la scelta del generatore sono illustrati nella figura 6.b, in cui la corrente esce dal terminale positivo.

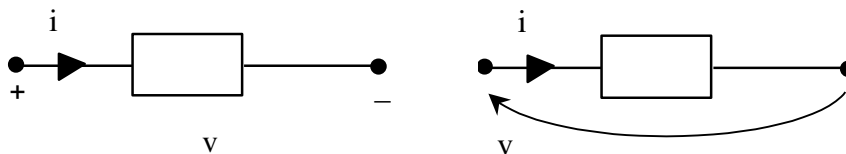


Fig. 6.a Versi di riferimento associati secondo la scelta dell'utilizzatore per la tensione e la corrente di ramo. A destra, l'indicazione del “-” e del “+” è sostituita da una freccia che indica il terminale positivo.

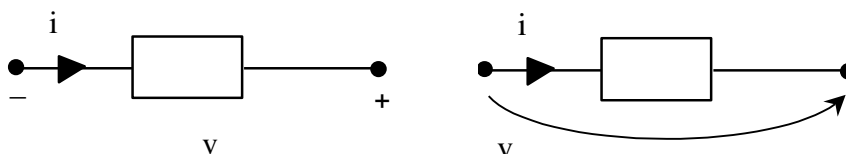


Fig. 6.b Versi di riferimento associati secondo la scelta del generatore per la tensione e la corrente di ramo. A destra, l'indicazione del “-” e del “+” è sostituita da una freccia che indica il terminale positivo.

Preso arbitrariamente un nodo come nodo di riferimento del circuito, la LKT permette di scrivere R relazioni del tipo (5) linearmente indipendenti che in forma matriciale assumono la forma:

$$\mathbf{v} = \mathbf{M} \mathbf{e} \quad (9)$$

dove  $\mathbf{v}$  è il vettore delle tensioni di ramo,  $\mathbf{e}$  è il vettore delle tensioni di nodo ed  $\mathbf{M}$  è una matrice avente R righe ed  $(N - 1)$  colonne, il cui generico elemento  $M_{hk}$  risulta nullo se il ramo h non è collegato al nodo k, uguale a +1 se la corrente del ramo h esce dal nodo k, -1 se la corrente del ramo h entra nel nodo k. A titolo di esempio si consideri ancora il circuito di figura 5.b, utilizzando *versi di riferimento associati secondo la scelta dell'utilizzatore per le tensioni e le correnti di ramo* e prendendo D come nodo di riferimento ( $e_D = 0$ ). Si ha quindi:

$$\begin{cases} v_1 = e_A \\ v_2 = e_B - e_A \\ v_3 = e_C - e_B \\ v_4 = e_C \\ v_5 = -e_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{cases} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} e_A \\ e_B \\ e_C \end{cases} \Rightarrow \mathbf{M} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

La LKC applicata a tutti i nodi tranne quello di riferimento permette di scrivere  $(N - 1)$  equazioni del tipo (8) che in forma matriciale assumono la forma:

$$\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0} \quad (10)$$

dove  $\mathbf{i}$  è il vettore delle correnti di ramo ed  $\mathbf{A}$  è una matrice, chiamata matrice di incidenza ridotta, avente  $(N - 1)$  righe ed R colonne, il cui generico elemento  $A_{hk}$  risulta nullo se il ramo k non è collegato al nodo h, uguale a +1 se la corrente del ramo k esce dal nodo h, -1 se la corrente del ramo k entra nel nodo h. A titolo di esempio si consideri ancora il circuito di figura 5.b. Si ha quindi:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 = 0 \\ i_2 - i_3 - i_5 = 0 \\ i_3 + i_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & 0 \end{bmatrix}$$

Risulta quindi dalle definizioni che  $\mathbf{M}$  è la trasposta di  $\mathbf{A}$ , cioè:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^T \quad (11)$$

Dalle equazioni (9), (10) ed (11) segue il **TEOREMA DI TELLEGEN** che afferma che, per un dato circuito, preso un qualsiasi vettore di tensioni di ramo  $\mathbf{v}_1$ , che soddisfi le LKT (9) per quel circuito, ed un vettore di correnti di ramo  $\mathbf{i}_2$ , che soddisfi le LKC (10) per quel circuito, allora vale la seguente relazione:

$$\mathbf{v}_1^T \mathbf{i}_2 = 0 \quad (12)$$

Infatti, si ha

$$\mathbf{v}_1^T \mathbf{i}_2 = (\mathbf{M} \mathbf{e}_1)^T \mathbf{i}_2 = \mathbf{e}_1^T \mathbf{M}^T \mathbf{i}_2 = \mathbf{e}_1^T \mathbf{A} \mathbf{i}_2 = \mathbf{e}_1^T \mathbf{0} = 0$$

Facendo riferimento a versi di tensione e corrente associati secondo la scelta dell'utilizzatore (fig. 6), si definisce **potenza elettrica assorbita** da un bipolo in un generico istante  $t$ , il prodotto tra la tensione presente ai suoi terminali all'istante  $t$  e la corrente che lo attraversa in quell'istante:

$$p(t) = v(t) i(t) \quad (13)$$

Infatti, dalle definizioni di  $i = dq/dt$  e di  $v = dw/dq$ , si ha  $v i = (dw/dq)(dq/dt) = dw/dt = p$ . Nel caso in cui i versi della tensione e della corrente siano associati secondo la scelta del generatore, il prodotto vi definisce la potenza elettrica erogata dal bipolo.

Più in generale, facendo riferimento ad un generico componente con  $N$  terminali, la potenza elettrica assorbita da tale componente in un generico istante  $t$  è data dalla seguente espressione:

$$p(t) = \sum_{k=1}^{N-1} v_{kN}(t) i_k(t) \quad (13.a)$$

dove si è preso l' $n$ -esimo terminale come terminale di riferimento per le tensioni ed i versi positivi delle correnti sono tutti entranti nell'elemento. Si dimostra che la potenza elettrica assorbita non dipende dalla scelta del terminale di riferimento, infatti, facendo uso delle leggi di Kirchhoff delle tensioni prima e della legge di Kirchhoff delle correnti poi si ottiene:

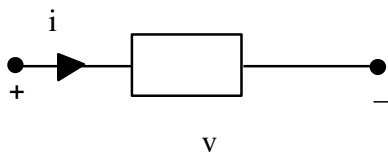
$$p' = \sum_{k=1, k \neq j}^N v_{kj} i_k = \sum_{k=1, k \neq j}^N (v_{kN} - v_{jN}) i_k = \sum_{k=1, k \neq j}^N v_{kN} i_k + v_{jN} i_j = p \quad (13.b)$$

Se si applica il teorema di Tellegen (12) considerando il vettore delle tensioni ed il vettore delle correnti che effettivamente sono presenti nel circuito ad un generico istante  $t$ , si ottiene la relazione (14) che, sulla base della definizione (13), mostra come la potenza elettrica assorbita da tutti i componenti del circuito risulti in ogni istante nulla.

$$\mathbf{v}(t)^T \mathbf{i}(t) = v_1(t) i_1(t) + v_2(t) i_2(t) + \dots = p_1(t) + p_2(t) + \dots = 0 \quad (14)$$

### 3. COMPONENTI

Nel seguito vengono descritte e discusse le equazioni costitutive e le proprietà fondamentali di alcuni tra i componenti di impiego più diffuso in elettrotecnica. In generale i componenti sono caratterizzati da una relazione (caratteristica o equazione costitutiva) tra la corrente che li attraversa e la tensione tra i loro terminali<sup>(o)</sup>. **Un componente in cui sia determinabile la tensione nota la corrente si dice *controllato in corrente*** (cioè, è possibile alimentarlo con un generatore di corrente con corrente impressa qualsiasi [definito nel seguito] e ad ogni valore della corrente impressa corrisponde un solo valore della tensione ai terminali); analogamente, **un componente in cui sia determinabile la corrente nota la tensione si dice *controllato in tensione*** (cioè, è possibile alimentarlo con un generatore di tensione con tensione impressa qualsiasi [definito nel seguito] e ad ogni valore della tensione impressa corrisponde un solo valore della corrente assorbita). Infine, si premette che **due componenti si dicono equivalenti quando presentano la stessa caratteristica tensione-corrente** (anche se hanno una struttura interna differente).



Caratteristica del componente:  $f(i, v) = 0$

Se il componente è *controllato in corrente*:  $v = h(i)$

Se il componente è *controllato in tensione*:  $i = g(v)$

<sup>(o)</sup> Il tempo può comparire esplicitamente nella relazione caratteristica. In tal caso il componente è detto *tempo-variante*, altrimenti il componente è detto *tempo-invariante*. Tutti i componenti trattati nel seguito sono tempo-invarianti.

## Resistore lineare

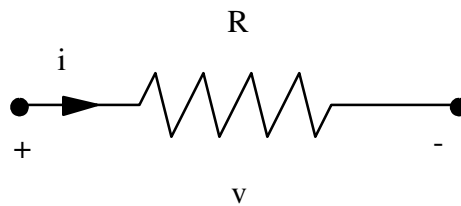


Figura 7 Simbolo del resistore lineare

Il simbolo del resistore lineare è indicato nella figura 7. Con riferimento alla scelta dell'utilizzatore per i versi positivi di tensione e corrente, la legge costitutiva del resistore è la seguente:

$$v = R i \quad (15.a)$$

o, alternativamente

$$i = G v \quad (15.b)$$

dove  $R$  è una costante chiamata resistenza (misurata in  $\Omega$  [Ohm]),  $G$  è una costante chiamata conduttanza (misurata in S [Siemens]) e risulta  $G = 1/R$ . L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (13) e risulta:

$$p = v i = (R i) i = R i^2 = i^2/G \quad (16.a)$$

o, alternativamente

$$p = v i = v (v/R) = v^2/R = G v^2 \quad (16.b)$$

Se la resistenza  $R$  è positiva, la potenza elettrica assorbita risulta essere sempre positiva, o al più nulla quando la corrente è nulla; i componenti che godono di tale proprietà vengono detti **componenti passivi**. Facendo ricorso alle conoscenze della fisica, si può dimostrare che un filo di rame di lunghezza  $L$  e sezione  $S$  può essere modellato per mezzo di un resistore di resistenza  $R$  pari a  $\rho L/S$ , in cui la potenza elettrica assorbita viene trasformata in energia termica mediante un fenomeno noto come "effetto Joule".

Dalla (15.a) segue che se è nota la corrente che circola sul resistore è nota anche la tensione ai suoi capi; quindi il resistore è un componente controllato in corrente. Inoltre, se  $R$  è diversa da zero, quando è nota la tensione è anche nota la corrente, pari a  $v/R$ ; quindi il resistore è anche un componente controllato in tensione. Pertanto, il resistore non nullo risulta un componente controllato sia in tensione che in corrente.

La connessione ideale, illustrata nella figura 3 ed anche chiamata corto circuito, può essere considerata un resistore lineare di resistenza nulla (o conduttanza infinita). Come tale risulta essere un componente controllato in corrente, ma non in tensione; infatti ad un unico valore di tensione (zero) corrispondono infiniti valori possibili della corrente. Viceversa, un circuito aperto, il cui simbolo è rappresentato nella figura 8, può essere considerato come un resistore di resistenza infinita (o conduttanza zero) e come tale è un componente controllato in tensione, ma non in corrente: infatti all'unico valore possibile della corrente (zero) corrisponde una infinità di valori possibili della tensione ai suoi capi.

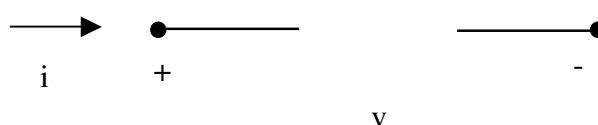


Figura 8 Simbolo del circuito aperto ( $i = 0$ )

Due resistori si dicono collegati in serie quando sono percorsi dalla stessa corrente (figura 9); dalle equazioni costitutive dei due resistori si vede che essi sono equivalenti ad un unico resistore avente una resistenza equivalente pari alla somma delle due resistenze. La relazione ottenuta è generalizzabile ad un numero qualsiasi di resistori in serie (per definizione tutti percorsi dalla stessa corrente):  $R_{eq} = \sum_k R_k$ .

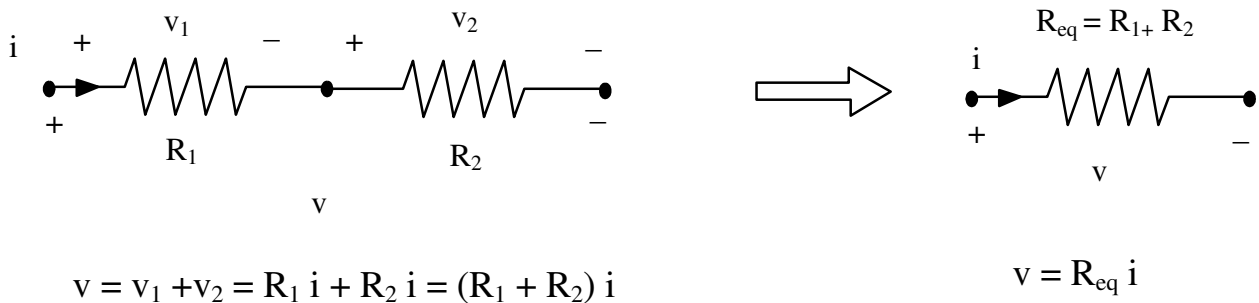


Figura 9 Resistori collegati in serie

Due resistori si dicono collegati in parallelo quando la tensione ai loro capi è la stessa (figura 10); dalle equazioni costitutive dei due resistori si vede che essi sono equivalenti ad un unico resistore avente una resistenza equivalente il cui inverso è dato dalla somma degli inversi delle due resistenze (ovvero, ricordando la definizione di conduttanza, due resistori in parallelo sono equivalenti ad un unico resistore avente una conduttanza equivalente pari alla somma delle due conduttanze:  $G_{eq} = G_1 + G_2$ ). La relazione ottenuta è generalizzabile ad un numero qualsiasi di resistori in parallelo (per definizione tutti soggetti alla stessa tensione):  $G_{eq} = \sum_k G_k$ .

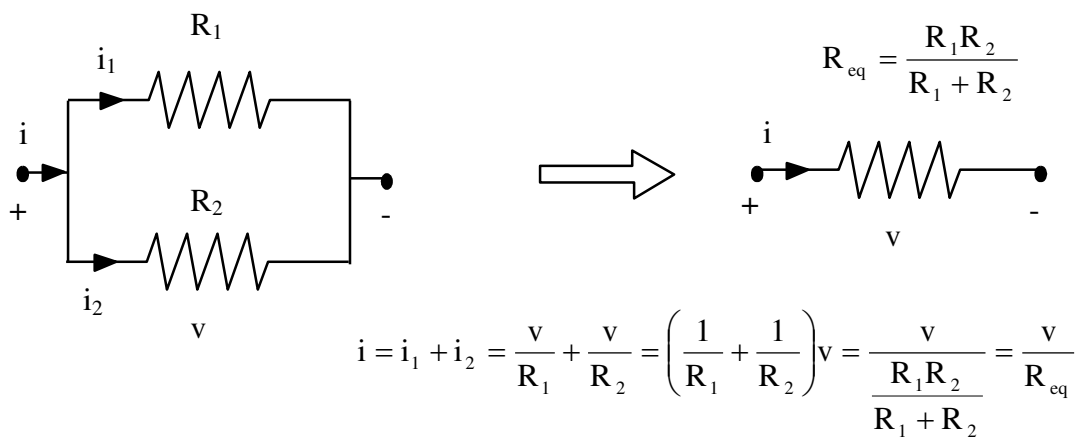


Figura 10 Resistori collegati in parallelo

### Diodo ideale

Il simbolo del diodo ideale è indicato nella figura 11. La legge costitutiva del diodo ideale è rappresentata, nel piano tensione - corrente, dal semiasse negativo delle tensioni e dal semiasse positivo delle correnti (vedi figura 12): se la tensione anodo (A) - catodo (K) è negativa, si dice che il diodo è polarizzato in inversa, in questo caso il passaggio della corrente è interdetto (per qualunque valore di tensione); viceversa, se il diodo è percorso da corrente (diodo in conduzione) la tensione ai suoi capi è nulla (per qualunque valore di corrente).

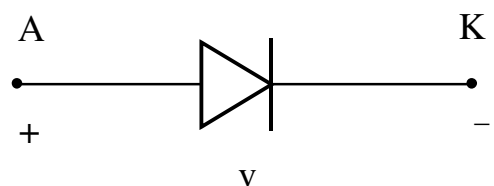


Figura 11 Simbolo del diodo ideale

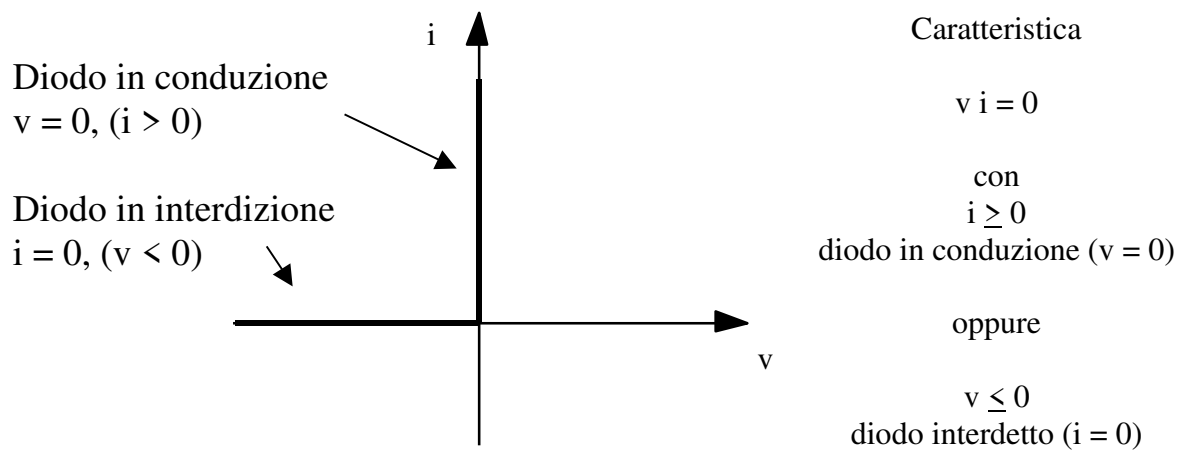


Fig. 12 Caratteristica del diodo ideale

Come si può vedere dalla caratteristica del diodo, il diodo non è controllato né in corrente, perché quando la corrente è nulla la tensione può assumere una infinità di valori (tutti quelle negativi), né in tensione, perché quando la tensione è nulla la corrente può assumere una infinità di valori, tutti quelli positivi. A seconda quindi che il diodo ideale sia polarizzato in diretta od in inversa, può essere considerato rispettivamente un corto circuito od un circuito aperto; in ogni caso la potenza elettrica assorbita dal diodo è nulla.

Un diodo reale è generalmente realizzato a partire da un cristallo di materiale semiconduttore (ad esempio Si, appartenente al IV gruppo della tavola periodica degli elementi) drogandolo con impurità di tipo p (ad esempio B, appartenente al III gruppo) e di tipo n (ad esempio P, appartenente al V gruppo), come illustrato nella figura 13. La caratteristica tensione - corrente della giunzione p-n così ottenuta è rappresentata, nella figura 13. Nella sua espressione analitica, sempre riportata nella figura 13,  $k$  è la costante di Boltzman ( $1.38 \times 10^{-23}$  J/K),  $T$  la temperatura in K,  $q$  la carica (in modulo) dell'elettrone ( $1.602 \times 10^{-19}$  C) ed  $I_0$  la corrente inversa di saturazione, che è una corrente (tipicamente molto piccola) caratteristica del dispositivo. Quando il diodo reale è in conduzione, è presente ai suoi capi una tensione positiva ( $V_d$ ) ed il diodo reale assorbe una modesta potenza elettrica dalla rete cui è collegato. Quando il diodo è polarizzato in inversa, fintanto che la tensione è inferiore, in valore assoluto, ad un valore limite (tensione di rottura o breakdown  $V_b$ ) circola una piccola corrente inversa (dal catodo all'anodo) ( $I_0$ ). Pertanto, anche in interdizione il diodo reale assorbe una potenza di modesta entità. Al superamento, in valore assoluto, della tensione di breakdown il diodo si danneggia irreparabilmente, consentendo la circolazione di una ingente corrente inversa. Il diodo reale può essere considerato come un resistore non lineare, la cui resistenza è una funzione della corrente.

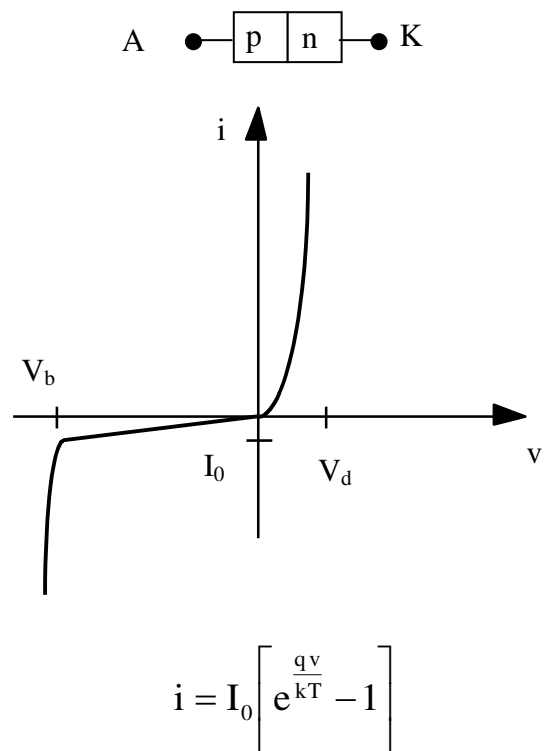


Fig. 13 Struttura e caratteristica di un diodo reale

## Induttore lineare

Si definisce induttore lineare un componente a due terminali il cui simbolo è indicato nella figura 14 caratterizzato dalla seguente legge costitutiva:

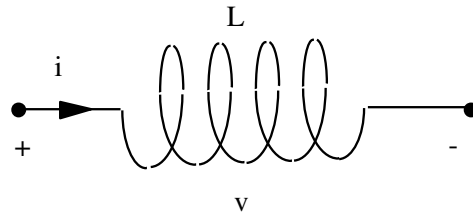


Figura 14 Simbolo dell'induttore

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (17)$$

dove  $L$  è una costante chiamata induttanza dell'induttore (misurata in H). L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (13) e risulta:

$$p = vi = L \frac{di}{dt} i = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right) \quad (18)$$

La (18) mostra come tutta la energia elettrica assorbita dall'induttore vada ad incrementare il termine  $E_m = \frac{1}{2} L i^2$  che assume quindi il significato di energia magnetica immagazzinata nell'induttore; tale energia, una volta immagazzinata, può essere interamente restituita ai componenti del circuito cui è collegato l'induttore durante un transitorio successivo. La potenza elettrica assorbita dall'induttore può quindi assumere valori sia positivi che negativi.

Un avvolgimento costituito da  $N$  spire finemente avvolte sopra un nucleo toroidale di materiale ferromagnetico dolce, qualora l'intensità della corrente che lo percorre non sia troppo elevata, in modo da poter trascurare la saturazione del materiale ferromagnetico, può essere modellato come un resistore ed un induttore collegati in serie (vedi fig. 15).

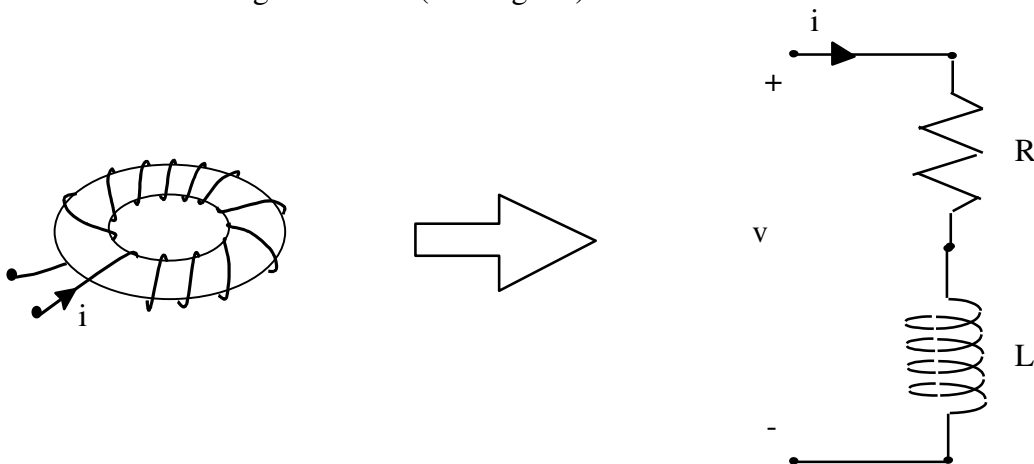


Figura 15 Induttore reale

Il campo magnetico  $H$  prodotto dalla corrente  $i$ , a causa dell'elevato valore della permeabilità magnetica ( $\mu$ ) del materiale di cui è costituito il nucleo toroidale dell'avvolgimento, tende a concentrarsi in tale regione. Si può dimostrare che, trascurando i flussi dispersi, il valore della induttanza dell'induttore è definito dalla relazione:

$$\frac{1}{2} L i^2 = \int_{V_{\text{toro}}} \frac{1}{2} \mu H^2 dV \quad (19)$$

La potenza elettrica assorbita dall'induttore reale, viene in parte trasformata in energia termica per effetto Joule ed in parte immagazzinata nel campo magnetico presente all'interno del nucleo toroidale. Per sottolineare il fatto che alla energia elettromagnetica  $E_m$  è associato un campo magnetico, tale energia viene più specificatamente chiamata energia magnetica immagazzinata nell'induttore.

L'equazione costitutiva dell'induttore (17) permette in ogni istante, se è noto il valore della tensione ai suoi capi, di calcolare la derivata temporale della corrente che lo attraversa lasciandone però completamente indeterminato il valore. Il valore della corrente individua univocamente l'energia magnetica immagazzinata nell'induttore e dipende dal transitorio subito dalla corrente nel periodo precedente all'istante di tempo che si considera. Infatti, integrando nel tempo la (17), supponendo che all'istante  $-\infty$ , quando è stato assemblato il circuito ed è iniziato il transitorio, la corrente sull'induttore fosse nulla, si ottiene:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau \quad (20)$$

La (20) mostra che il valore della corrente all'istante  $t$  dipende dal valore della tensione in tutti gli istanti precedenti. Per indicare ciò si dice che l'induttore è un componente dotato di memoria. Il valore della corrente che attraversa l'induttore individua univocamente l'energia magnetica immagazzinata al suo interno e perciò costituisce la sua variabile di stato.

### Condensatore lineare

Il simbolo del condensatore è indicato nella figura 16, la sua legge costitutiva è la seguente:

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (21)$$

dove  $C$  è una costante chiamata capacità del condensatore (misurata in F).

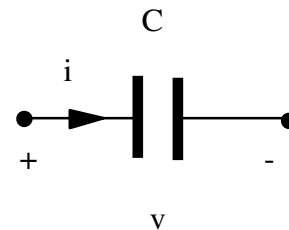


Figura 16 Simbolo del condensatore

L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (13) e risulta:

$$p = vi = vC \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} C v^2 \right) \quad (22)$$

La (22) mostra come tutta la energia elettrica assorbita dall'induttore vada ad incrementare il termine  $E_e = \frac{1}{2} C v^2$  che assume quindi il significato di energia elettromagnetica immagazzinata nel condensatore; tale energia, una volta immagazzinata, può essere interamente restituita ai componenti del circuito cui è collegato il condensatore durante un transitorio successivo. La potenza elettrica assorbita dal condensatore può quindi assumere valori sia positivi che negativi.

Un cilindro ed una corona cilindrica coassiali, costituiti di materiale conduttore, separate da una corona cilindrica, coassiale con le precedenti, costituita di materiale isolante, formano un condensatore cilindrico che può essere modellato con buona approssimazione mediante un condensatore ideale (vedi fig. 17).



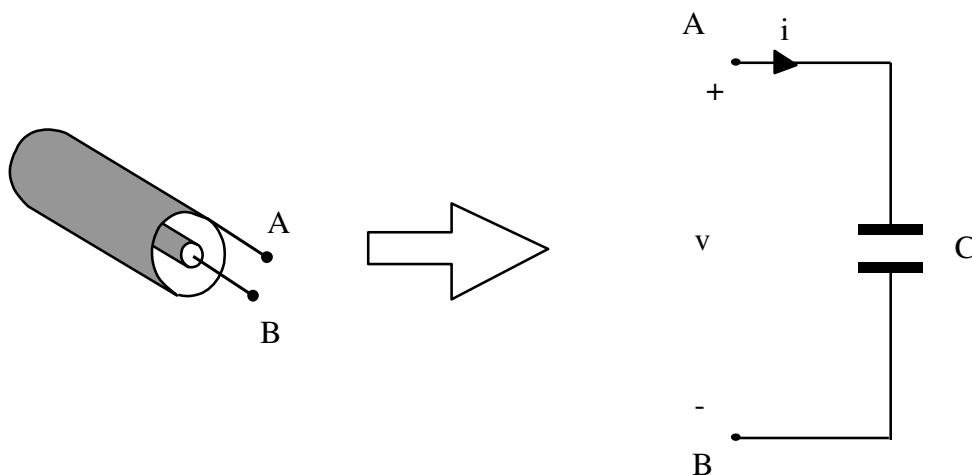


Figura 17 Condensatore cilindrico

Quando una carica  $q$  viene spostata tramite una connessione elettrica dalla armatura esterna (collegata al terminale A) a quella interna (collegata al terminale B), la regione di spazio occupata dall'isolante interposto tra le armature del condensatore è sede di un campo elettrico. Trascurando il campo elettrico all'esterno di tale regione, il valore della capacità del condensatore è definito dalla relazione:

$$\frac{1}{2} C v^2 = \int_{V_{\text{isolante}}} \frac{1}{2} \epsilon E^2 dV \quad (23)$$

dove  $\epsilon$  è la costante dielettrica dell'isolante. La potenza elettrica assorbita dal condensatore cilindrico viene immagazzinata nel campo elettrico presente nell'isolante tra le armature del condensatore. Per sottolineare il fatto che alla energia elettromagnetica  $E_e$  è associato un campo elettrico, tale energia viene più specificatamente chiamata energia elettrica immagazzinata nel condensatore.

Le relazioni (21, 22, 23) mostrano come esista una relazione di dualità tra il condensatore e l'induttore; infatti è possibile ottenere le relazioni caratteristiche di un componente da quelle dell'altro, scambiando tra di loro i simboli della tensione con la corrente, dell'induttanza con la capacità, del campo magnetico con il campo elettrico e della permeabilità magnetica con la costante dielettrica. Analogamente all'induttore, anche il condensatore è un componente con memoria; integrando la (21) dall'istante  $-\infty$ , in cui è stato assemblato il circuito ed in cui la tensione ai capi del condensatore si è supposta nulla, al generico istante  $t$  si ottiene:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad (24)$$

La (24) mostra che il valore della tensione in un generico istante  $t$  dipende dal valore della corrente in tutti gli istanti precedenti. Il valore della tensione ai capi del condensatore individua univocamente l'energia elettrica immagazzinata al suo interno e perciò rappresenta la sua variabile di stato. Infine, dalla 24, si riconosce anche che la carica  $Q$  presente sull'armatura positiva (cioè quella collegata al terminale positivo) è legata alla tensione  $v$  dalla relazione  $Q = C v$ .

## Generatore di tensione

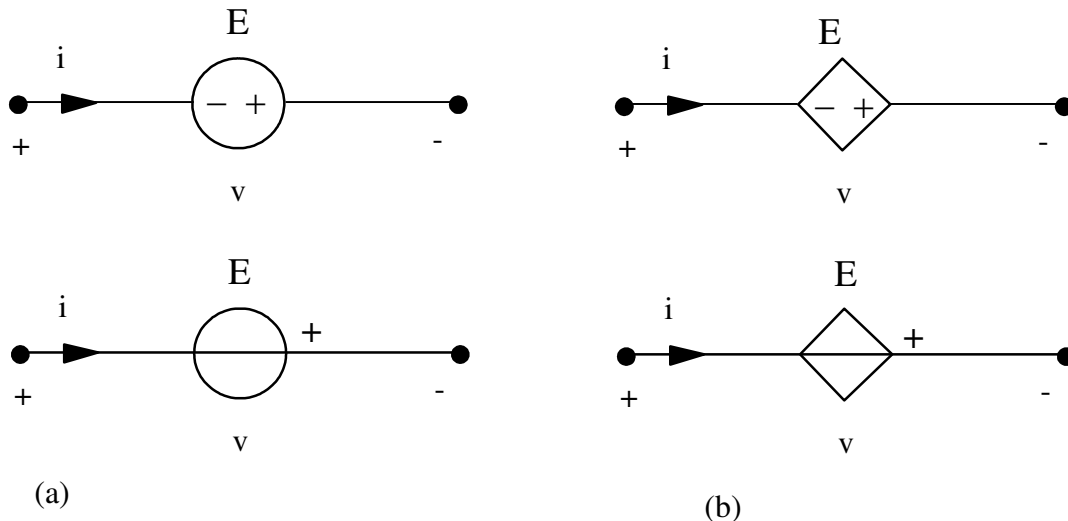
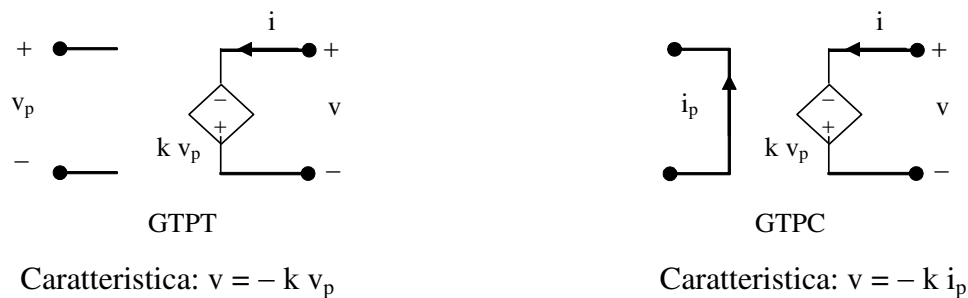


Figura 18 Simboli del generatore di tensione

I simboli che vengono utilizzati per il generatore indipendente di tensione sono indicati nella figura 18a, quelli utilizzati per il generatore di tensione pilotato (o dipendente) nella figura 18b (i due simboli vengono usati nella letteratura scientifica con uguale frequenza e sono del tutto equivalenti);. Nel caso del generatore di tensione indipendente, la tensione impressa  $E$  del generatore (o forza elettro-motrice del generatore) è una funzione nota del tempo, nel caso del generatore di tensione pilotato, la tensione impressa dipende dal valore della tensione (generatore di tensione pilotato in tensione: GTPT) o della corrente (generatore di tensione pilotato in corrente: GTPC) di un altro ramo del circuito. Con riferimento ai versi positivi delle grandezze indicati nella figura 18a, l'equazione costitutiva del generatore di tensione indipendente è la seguente:

$$v = - E \quad (25)$$

In figura sono illustrati i generatori pilotati GTPT e GTPC aventi caratteristica lineare.



L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (13) e risulta:

$$p = v i = - E i \quad (26)$$

La potenza elettrica assorbita risulta quindi positiva o negativa a seconda che la corrente attraversi il generatore nel verso associato o non associato secondo la convenzione degli utilizzatori rispetto a quello della tensione impressa. Il generatore indipendente di tensione è quindi in grado di assorbire od erogare, in dipendenza dalle condizioni di lavoro del circuito, una potenza elettrica di valore qualsiasi, mantenendo comunque inalterato il valore della tensione ai suoi capi. Il generatore indipendente di tensione è un componente controllato in corrente. Il generatore dipendente di tensione non è un componente controllato né in tensione né in corrente.

Una batteria (generatore di tensione reale) può essere modellata elettricamente mediante lo schema illustrato nella figura 19, costituito da un resistore e da un generatore indipendente di tensione collegati in serie.

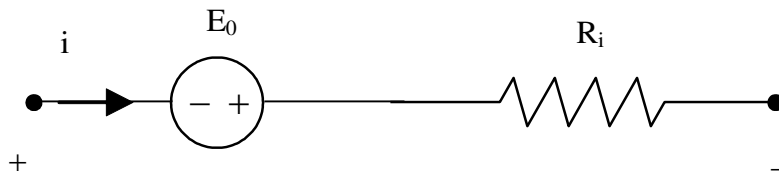


Figura 19a Modello circuitale di una batteria

Il generatore di tensione permette di simulare la trasformazione di energia chimica in elettrica e viceversa che avviene all'interno della batteria; la tensione impressa  $E_0$  è pari alla tensione ai capi della batteria durante il funzionamento a vuoto (quando non eroga corrente). La resistenza  $R_i$  del resistore, viene detta resistenza interna della batteria e permette di simulare la dissipazione di energia elettrica, per effetto Joule, in calore che viene ceduto all'ambiente circostante, che accompagna il passaggio della corrente nella batteria. A questa dissipazione è associata una caduta di tensione. La caratteristica tensione-corrente del bipolo di figura 19a è illustrata in figura 19b. Il generatore di tensione reale (la batteria) è un componente controllato sia in tensione che in corrente.

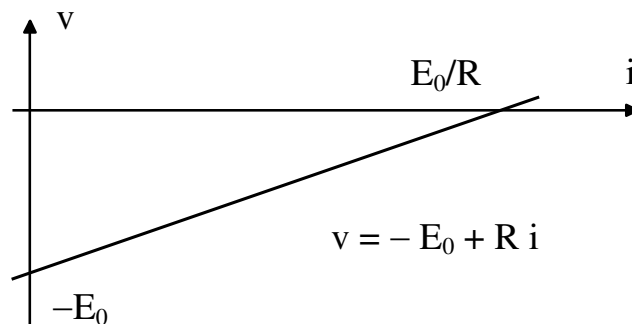


Figura 19b Caratteristica tensione-corrente di un generatore di tensione reale (batteria).

### Generatore di corrente

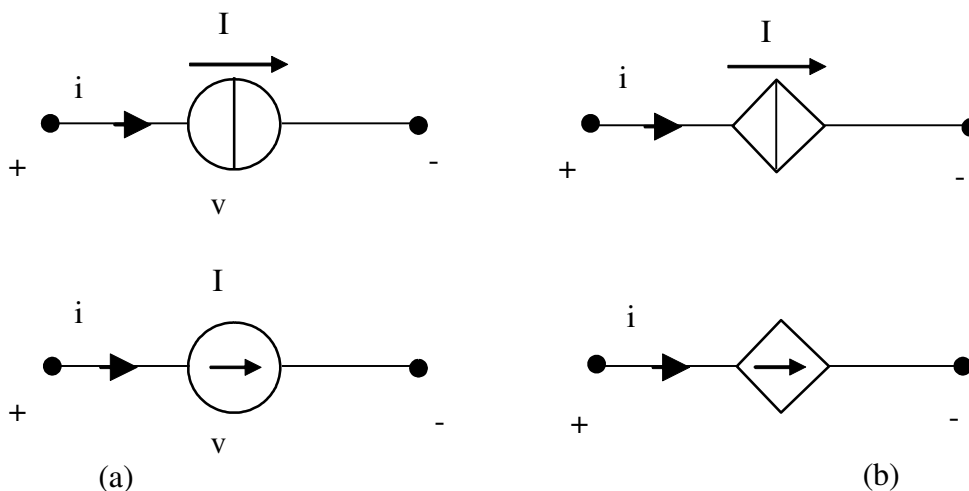
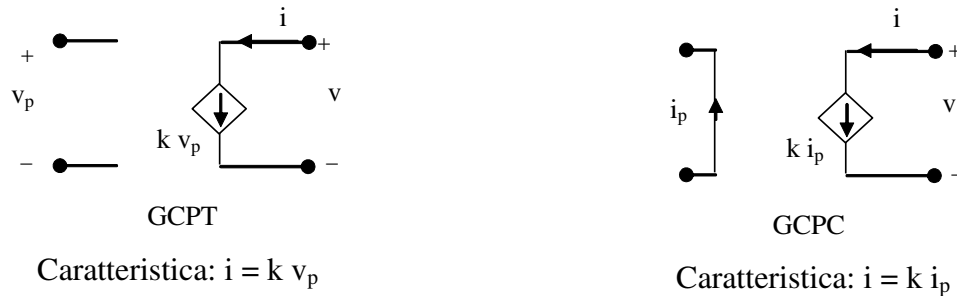


Figura 20 Simboli del generatore di corrente

I simboli che vengono utilizzati per il generatore indipendente di corrente sono indicati nella figura 20a, quelli che vengono utilizzati per il generatore di corrente pilotato (o dipendente) nella figura 20b (i due simboli vengono usati nella letteratura scientifica con uguale frequenza e sono del tutto equivalenti). Nel caso del generatore indipendente la corrente impressa ( $I$ ) è una funzione nota del tempo, mentre nel caso del generatore pilotato dipende da un'altra grandezza che può essere la corrente (generatore di corrente pilotato in corrente: GCPC) o la tensione (generatore di corrente pilotato in tensione: GCPT) di un altro componente del circuito. Con riferimento ai versi positivi delle grandezze indicati nella figura, l'equazione costitutiva del generatore di corrente è la seguente:

$$i = I \quad (27)$$

In figura sono illustrati i generatori pilotati GCPT e GCPC aventi caratteristica lineare.



L'espressione della potenza elettrica assorbita segue dalla (13) e risulta:

$$p = v i = v I \quad (28)$$

La potenza elettrica assorbita risulta quindi positiva o negativa a seconda che la tensione ai capi del generatore abbia verso associato o non associato (secondo la convenzione degli utilizzatori) rispetto a quello della corrente impressa. Il generatore indipendente di corrente è quindi in grado di assorbire od erogare, in dipendenza dalle condizioni di lavoro del circuito, una potenza elettrica di valore qualsiasi, mantenendo comunque inalterato il valore della corrente che lo attraversa. Il generatore indipendente di corrente è un componente controllato in tensione. Il generatore dipendente di corrente non è un componente controllato né in tensione né in corrente.

A differenza dei componenti visti in precedenza, non esiste un componente elettrico reale che venga modellato elettricamente, con buona approssimazione, da un solo generatore di corrente. Il generatore di corrente interviene invece nel circuito elettrico equivalente dei dispositivi elettronici. Ad esempio, è possibile realizzare un circuito complesso che modella un transistor npn in cui sono presenti due generatori di corrente pilotati in corrente.

## Il trasformatore ideale

Il trasformatore ideale è un doppio bipolo il cui funzionamento è descritto dalle seguenti relazioni lineari:

$$v_1 = K v_2 \quad (29.a)$$

$$i_2 = -K i_1 \quad (29.b)$$

Dove la costante  $K$  è detta rapporto di trasformazione. Il simbolo del trasformatore ideale è indicato nella figura 21. Si noti che in figura 21 una coppia di terminali è segnata con un punto, indicando quindi i versi di riferimento positivi delle tensioni e delle correnti per cui le equazioni costitutive (30) sono corrette. In figura 26 è mostrato inoltre uno dei possibili circuiti equivalenti del trasformatore ideale. Si noti anche che, poiché il trasformatore ideale è un componente ideale definito dalle (30), le relazioni tra tensioni e correnti a primario e secondario sono valide per tutte le forme d'onda (incluso quindi il regime stazionario).

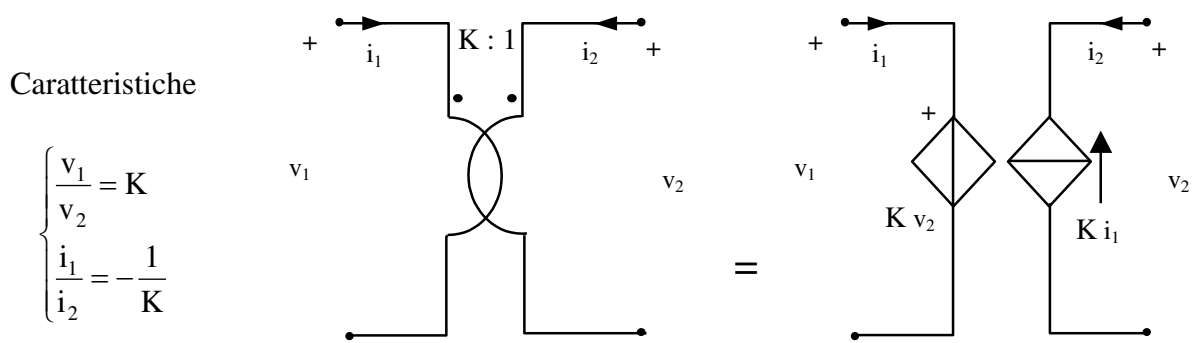


Figura 21 - Trasformatore ideale e circuito equivalente.

La potenza assorbita dal trasformatore ideale è nulla; infatti, con riferimento ai versi di riferimento positivi delle tensioni e delle correnti definiti in figura 21, si ha

$$p(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = (Kv_2(t))\left(-\frac{i_2(t)}{K}\right) + v_2(t)i_2(t) = -v_2(t)i_2(t) + v_2(t)i_2(t) = 0$$

Quindi la somma delle potenze assorbite a primario e secondario è complessivamente nulla, ovvero la potenza assorbita a primario dal trasformatore ideale ( $p_1 = v_1 i_1$ ) risulta in ogni istante uguale a quella erogata al secondario ( $p_2 = -v_2 i_2$ ). Anche se non assorbe potenza, il trasformatore ideale muta i parametri (tensione e corrente) con cui la energia elettrica viene assorbita a primario ed erogata a secondario: la tensione viene ridotta (od aumentata) di un fattore pari al rapporto di trasformazione del trasformatore  $K$  mentre la corrente viene aumentata (o diminuita) dello stesso fattore.

Quando a secondario di un trasformatore ideale è collegato un resistore di resistenza  $R$ , il primario si comporta come un resistore di resistenza equivalente  $K^2R$ . Tale equivalenza è illustrata nella figura 22 e prende il nome di “riduzione da secondario a primario”. La dimostrazione è immediata:

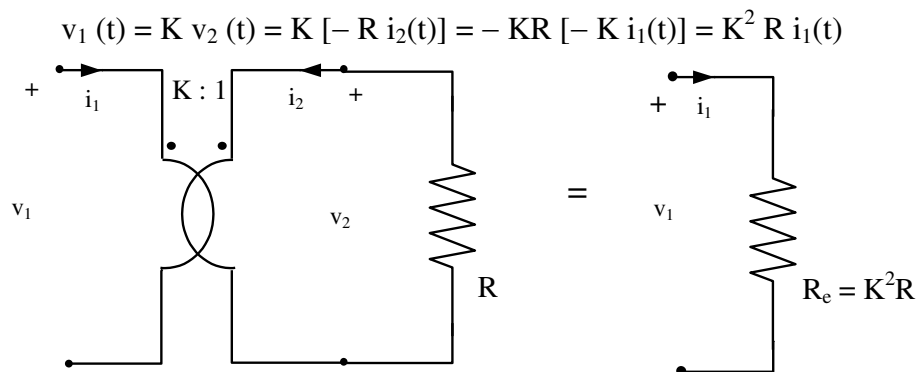


Figura 22 - Riduzione da secondario a primario.

## METODI PER L'ANALISI DEI CIRCUITI

Nel seguito vengono illustrati, mediante esempi, alcuni tra i metodi più utilizzati per l'analisi dei circuiti elettrici. Il problema che si vuole risolvere è il seguente: assegnato il circuito elettrico e le grandezze impresse dai generatori indipendenti presenti, in generale funzioni qualunque del tempo, si vuole calcolare l'andamento temporale delle correnti e delle tensioni in tutti i rami del circuito. **Come già detto, si suppone per semplicità che tutti i componenti siano dei bipoli, potendosi ricondurre alla ipotesi mediante l'introduzione di circuiti equivalenti dei componenti a più di due terminali.** Gli esempi illustrativi si riferiscono, per semplicità, a circuiti in regime stazionario (o regime di corrente continua), definito dalla condizione  $d/dt \equiv 0$ . In tal caso, ogni grandezza nel circuito si suppone tempo-invariante.

### DAI CIRCUITI AI GRAFI

È possibile associare ad ogni circuito un'entità matematica  $G$  chiamata *grafo*, formata da un insieme di nodi  $N$  (nodi del circuito) e da un insieme di rami  $R$  (rami del circuito) che collegano i nodi tra loro. Notiamo che si è così evidenziata la struttura topologica del circuito, cioè il modo in cui sono connessi i componenti tra loro, senza preoccuparsi delle caratteristiche dei componenti stessi. Ad ogni ramo sono associati una corrente di ramo ed una tensione di ramo. È possibile associare ad ogni nodo un potenziale (tensione di nodo) definita come tensione esistente tra il nodo in esame e il nodo di riferimento, il cui simbolo è  $\phi$ , scelto arbitrariamente.  $\perp$  Una proprietà del circuito che si trasferisce al corrispondente grafo è la *proprietà di connessione*, secondo la quale tutto il circuito è connesso elettricamente, e quindi per ogni nodo del circuito è possibile trovare un percorso che, seguendo i rami del grafo, connetta tale nodo al nodo di riferimento (nel caso in cui il circuito non sia connesso vedremo che è sempre possibile connetterlo interponendo un collegamento tra ogni coppia di circuiti non connessi). Ogni ramo del grafo deve essere orientato, ottenendo così un grafo orientato: questa orientazione corrisponde al verso positivo della corrente in quel ramo. L'orientazione della tensione del ramo può essere fatta indipendentemente da quella della corrente. Tuttavia, usualmente la tensione sarà orientata secondo la *convenzione degli utilizzatori* in modo che la corrente vada dal terminale positivo a quello negativo. Con questa convenzione, la potenza  $p(t) = v(t) i(t)$  è assorbita se positiva, erogata se negativa. Se la tensione è orientata in senso opposto (convenzione dei generatori), allora la potenza è assorbita se negativa, erogata se positiva.

A titolo di esempio si consideri il circuito illustrato nella figura 1 ( $N = 4$  nodi,  $R = 6$  rami), dove non sono stati indicati i versi positivi delle tensioni di ramo, perché si suppone di considerare comunque versi di riferimento associati per tensioni e correnti di ramo mediante la scelta dell'utilizzatore. Il grafo orientato corrispondente è illustrato in figura 1.a.

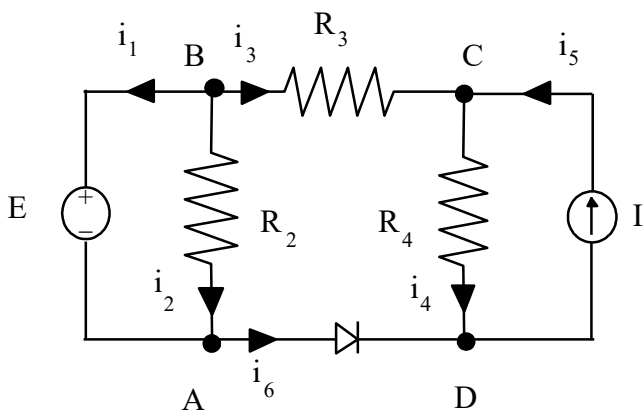


Figura 1

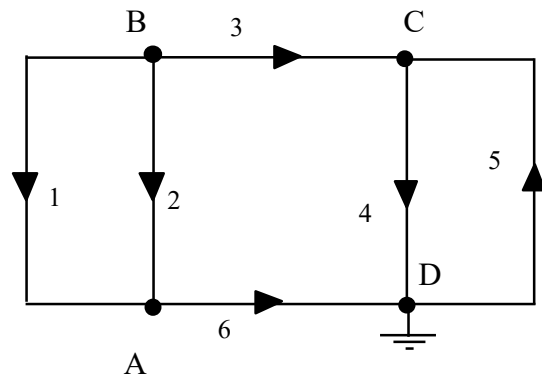


Figura 1.a

Le Leggi di Kirchhoff (delle Tensioni e delle Correnti) ci permettono di scrivere delle equazioni che descrivono la topologia del circuito, ovvero il modo in cui i componenti sono connessi tra loro:

- La Legge di Kirchhoff delle Correnti (*LKC*) afferma che la somma algebrica delle correnti in un nodo è nulla in qualsiasi istante di tempo.

- Equazione per un nodo ( $LKC_n$ ): 
$$\sum_{r=1}^n i_r = 0 \quad (1.a)$$

- La Legge di Kirchhoff delle Tensioni (*LKT*) può essere formulata in due modi equivalenti tra loro:

- La somma algebrica delle tensioni di ramo sui rami di una maglia è nulla per qualsiasi istante di tempo;

- Equazione per una maglia ( $LKT_m$ ): 
$$\sum_{r=1}^m v_r = 0 \quad (1.b)$$

- Ogni tensione di ramo è data dalla differenza dei potenziali di nodo dei suoi terminali.

- Equazione per un ramo ( $LKT_r$ ): 
$$v_{AB} = e_A - e_B \quad (1.c)$$

Scriviamo le equazioni *LKC* e *LKT* utilizzando il grafo associato al circuito. Supponiamo che il grafo associato abbia  $N$  nodi e  $R$  rami orientati. Con riferimento al grafo di figura 1.a,  $N = 4$  (A, B, C, D) e  $R = 6$ . Si scelga ad esempio il nodo D come nodo di riferimento per le tensioni e si indichino con  $e_A$ ,  $e_B$  ed  $e_C$  le tensioni dei nodi A, B e C rispetto al nodo di riferimento ( $e_D = 0$ ). Le equazioni  $LKT_r$  e  $LKC_n$  assumono allora la forma rispettivamente delle (2.i) e (2.ii):

$$\begin{aligned}
 & v_1 = e_B - e_A \\
 & v_2 = e_B - e_A \\
 LKT_r: & v_3 = e_B - e_C \\
 & v_4 = e_C \\
 & v_5 = -e_C \\
 & v_6 = e_A
 \end{aligned} \quad (2.i)$$

(una equazione per ogni ramo, quindi in generale  $R$  equazioni in cui compaiono  $R$  tensioni di ramo ed  $N - 1$  potenziali di nodo; nell'esempio in oggetto possiamo quindi scrivere 6  $LKT_r$  in cui compaiono 6 tensioni di ramo ed 3 potenziali di nodo)

$$\begin{aligned}
 & i_1 + i_2 - i_6 = 0 \\
 LKC_n: & -i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\
 & i_3 - i_4 + i_5 = 0
 \end{aligned} \quad (2.ii)$$

(una equazione per ogni nodo, meno quello di riferimento, quindi in generale  $N - 1$  equazioni in cui compaiono  $R$  correnti di ramo; nell'esempio in oggetto possiamo quindi scrivere 3  $LKC_n$  in cui compaiono 6 correnti di ramo). È ovviamente possibile scrivere una ulteriore  $LKC_n$  applicata al nodo di riferimento ( $-i_6 - i_4 + i_5 = 0$ ), ma è facile mostrare che è una combinazione lineare delle precedenti  $N - 1$ . Infatti, tale equazione si ottiene sommando le (2.ii).

Si noti che le (2.i) e le (2.ii) sono  $R + N - 1$  equazioni in  $2R + N - 1$  incognite (tensioni di ramo, potenziali di nodo e correnti di ramo): per risolvere il circuito dobbiamo aggiungere ancora  $R$  equazioni, e precisamente i modelli dei componenti.

La *LKT* può essere enunciata considerando le maglie del circuito (secondo la formulazione 1.b). Per questo, introduciamo il concetto di *albero T* associato ad un grafo  $G$ :

- $T$  è un sottografo di  $G$  con tutti i nodi e una parte dei rami; ogni ramo conserva la sua orientazione;
- $T$  è connesso;

3.  $T$  non ha maglie: c'è un solo percorso che collega ogni coppia di nodi.

Ovviamente, ad ogni grafo è associato più di un albero. Comunque, ogni albero  $T$  ha  $N - 1$  rami. I rami di  $G$  appartenenti a  $T$  sono chiamati *rami dell'albero*, mentre i rimanenti sono chiamati *rami del coalbero* (e sono  $R - N + 1$ ). Se aggiungiamo un ramo del coalbero a  $T$ , creiamo una maglia che è formata da rami dell'albero e da quell'unico ramo del coalbero (*maglia fondamentale*). Per ogni ramo del coalbero, possiamo ripetere l'operazione formando ogni volta una maglia diversa, indipendente da tutte le altre<sup>(\*)</sup>. Si può allora dimostrare che il numero di maglie indipendenti di un circuito (cioè l'insieme delle maglie fondamentali) è pari ai rami del coalbero, e precisamente  $R - (N - 1) = R - N + 1$ .

A titolo di esempio si consideri il grafo illustrato nella figura 1.a; uno dei possibili alberi è illustrato in figura 1.b (rami 2, 3 e 4). I rami tratteggiati sono quelli di coalbero (rami 1, 5 e 6). Le maglie indipendenti sono quindi  $R - N + 1 = 3$ , (in particolare  $a = A1B2A$ ,  $b = A2B3C4D6A$ ,  $c = D4C5D$ ).

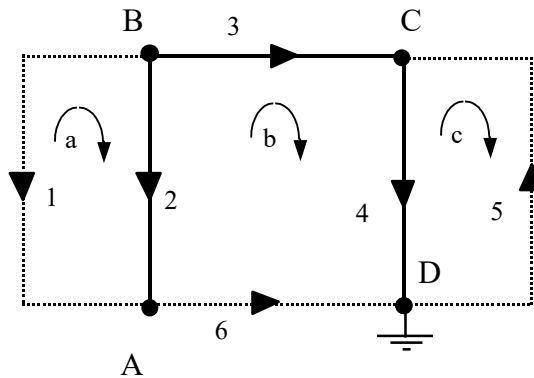


Figura 1.b

Applicando la  $LKT_m$  alle maglie così definite si ottiene il seguente sistema di equazioni lineari in cui compaiono solo le tensioni di ramo:

$$\begin{aligned}
 LKT_m: \quad & -v_1 + v_2 = 0 \\
 & -v_2 + v_3 + v_4 - v_6 = 0 \\
 & -v_4 - v_5 = 0
 \end{aligned} \tag{2.iii}$$

(una equazione per ogni maglia indipendente quindi in generale  $R - N + 1$  equazioni in cui compaiono  $R$  tensioni di ramo; nell'esempio in oggetto possiamo quindi scrivere 3  $LKT_m$  in cui compaiono 6 tensioni di ramo)

Si noti che le (2.iii) e le (2.ii) sono  $R$  equazioni in  $2R$  incognite (tensioni di ramo e correnti di ramo): per risolvere il circuito dobbiamo aggiungere ancora  $R$  equazioni, e precisamente i modelli dei componenti.

Operativamente, per trovare le maglie indipendenti di un circuito, si deve associare un albero  $T$  al grafo  $G$  del circuito, quindi scrivere la  $LKT_m$  per ogni maglia associata ad un ramo del coalbero.

## CIRCUITI PRIVI DI MEMORIA

I circuiti privi di memoria sono quelli in cui tutti i componenti del circuito sono privi di memoria ossia le loro caratteristiche tensione-corrente stabiliscono un legame istantaneo tra le due grandezze che non dipende dai valori da esse assunte in precedenza. In tal caso il sistema risolvibile del circuito stesso è costituito da un sistema di equazioni algebriche ed il valore di tutte le grandezze incognite in un generico

<sup>(\*)</sup> Un insieme di  $m$  maglie si dice indipendente se le  $m$  equazioni ottenute applicando la LKT ad ognuna di esse sono linearmente indipendenti. Pertanto, una maglia è indipendente da altre se la relativa equazione LKT è indipendente dalle equazioni LKT delle altre.



istante può essere calcolato dalla conoscenza del valore delle grandezze impresse del circuito in quello stesso istante.

### Analisi di Tableau

Il metodo più generale, per l'analisi di un circuito qualunque ( $R$  = numero di rami del circuito,  $N$  = numero di nodi del circuito), consiste nel considerare come incognite del sistema le  $R$  correnti di ramo, le  $R$  tensioni di ramo e le  $(N - 1)$  tensioni di nodo rispetto ad un nodo arbitrariamente scelto come nodo di riferimento. Il sistema risolvibile viene quindi ottenuto da  $R$  equazioni LKT<sub>r</sub> (una per ogni ramo), da  $N - 1$  equazioni LKC<sub>n</sub> (una per ogni nodo, tranne quello di riferimento) e da  $R$  equazioni costitutive dei componenti.

A titolo di esempio si consideri il circuito illustrato nella figura 1, dove non sono stati indicati i versi positivi delle tensioni di ramo, perché si suppone di considerare comunque versi di riferimento associati con la regola dell'utilizzatore per tensioni e correnti di ramo.

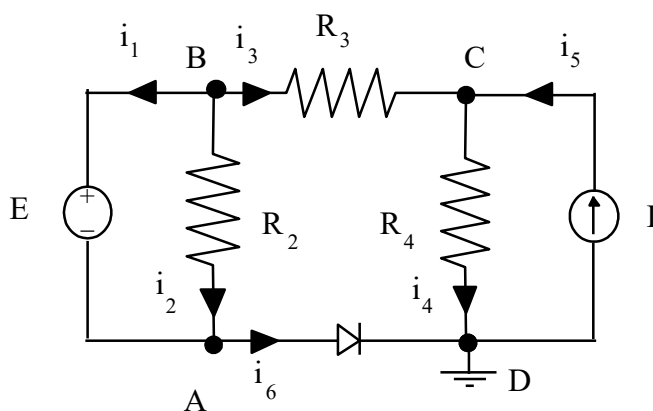


Figura 1

Si scelga arbitrariamente il nodo D come nodo di riferimento per le tensioni e si indichino con  $e_A$ ,  $e_B$  ed  $e_C$  le tensioni dei nodi A, B e C rispetto al nodo di riferimento. Le equazioni LKT<sub>r</sub> e LKC<sub>n</sub> assumono allora la forma rispettivamente delle (2.i) e (2.ii):

$$\begin{aligned}
 v_1 &= e_B - e_A \\
 v_2 &= e_B - e_A \\
 v_3 &= e_B - e_C \\
 v_4 &= e_C \\
 v_5 &= -e_C
 \end{aligned}
 \tag{2.i}$$

( $R = 6$  equazioni LKT<sub>r</sub> in cui compaiono come incognite  $R = 6$  tensioni di ramo ed  $N - 1 = 3$  potenziali di nodo)

$$\begin{aligned}
 v_6 &= e_A \\
 i_1 + i_2 - i_6 &= 0 \\
 -i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\
 i_3 - i_4 + i_5 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.ii}$$

( $N - 1 = 3$  equazioni LKC<sub>n</sub> in cui compaiono come incognite  $R = 6$  correnti di ramo)

Il sistema viene quindi chiuso dalle seguenti equazioni costitutive dei componenti:

(R = 6 equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono come incognite R = 6 tensioni di ramo ed R = 6 correnti di ramo)

$$\begin{aligned}
 v_1 &= E \\
 v_2 &= R_2 i_2 \\
 v_3 &= R_3 i_3 \\
 v_4 &= R_4 i_4 \\
 i_5 &= I \\
 v_6 i_6 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Il sistema costituito dalle equazioni (2.i), (2.ii) e (3), dove sono note le grandezze E, I, R<sub>2</sub>, R<sub>3</sub>, ed R<sub>4</sub>, costituisce un sistema di 15 equazioni nelle 15 incognite del problema che sono rispettivamente e<sub>A</sub>, e<sub>B</sub>, e<sub>C</sub>, v<sub>1</sub>, v<sub>2</sub>, v<sub>3</sub>, v<sub>4</sub>, v<sub>5</sub>, v<sub>6</sub>, i<sub>1</sub>, i<sub>2</sub>, i<sub>3</sub>, i<sub>4</sub>, i<sub>5</sub>, i<sub>6</sub>. Il sistema di equazioni risolvente è non lineare per la presenza del diodo che è un componente non lineare (ultima equazione delle (3)). Il procedimento illustrato è completamente trasferibile su un computer e la soluzione (o le soluzioni matematicamente possibili, poiché in generale, essendo il sistema non lineare, può esistere più di una soluzione) può essere ottenuta numericamente. In questo caso la soluzione può essere ottenuta eliminando la non linearità del sistema, considerando separatamente i due casi possibili: diodo in conduzione (i<sub>6</sub> ≥ 0, v<sub>6</sub> = 0) oppure diodo interdetto (i<sub>6</sub> = 0, v<sub>6</sub> ≤ 0).

**Diodo in conduzione.** Ponendo v<sub>6</sub> = 0 nelle (2.i) ed eliminando contemporaneamente l'ultima equazione delle (3) che è diventata una identità, si ottiene un sistema di 14 equazioni lineari nelle 14 incognite e<sub>A</sub>, e<sub>B</sub>, e<sub>C</sub>, v<sub>1</sub>, v<sub>2</sub>, v<sub>3</sub>, v<sub>4</sub>, v<sub>5</sub>, i<sub>1</sub>, i<sub>2</sub>, i<sub>3</sub>, i<sub>4</sub>, i<sub>5</sub>, i<sub>6</sub>, la cui soluzione è la seguente:

$$\begin{aligned}
 e_A &= 0 \quad ; \quad e_B = E \quad ; \quad e_C = R_4 \frac{E + R_3 I}{R_3 + R_4} \\
 v_1 &= E \quad ; \quad i_1 = -\frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4} - \frac{E}{R_2} \\
 v_2 &= E \quad ; \quad i_2 = \frac{E}{R_2} \\
 v_3 &= R_3 \frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4} \quad ; \quad i_3 = \frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4} \\
 v_4 &= R_4 \frac{E + R_3 I}{R_3 + R_4} \quad ; \quad i_4 = \frac{E + R_3 I}{R_3 + R_4} \\
 v_5 &= -R_4 \frac{E + R_3 I}{R_3 + R_4} \quad ; \quad i_5 = I \\
 i_6 &= -\frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4}
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Affinché la soluzione trovata non contraddica l'ipotesi di diodo in conduzione deve essere i<sub>6</sub> ≥ 0 e quindi, dalla ultima delle (4) deve essere:

$$E \leq R_4 I \tag{5}$$

**Diodo interdetto.** Ponendo i<sub>6</sub> = 0 nelle (2.ii) ed eliminando contemporaneamente l'ultima equazione delle (3) che è diventata una identità, si ottiene un sistema di 14 equazioni lineari nelle 14 incognite e<sub>A</sub>, e<sub>B</sub>, e<sub>C</sub>, v<sub>1</sub>, v<sub>2</sub>, v<sub>3</sub>, v<sub>4</sub>, v<sub>5</sub>, v<sub>6</sub>, i<sub>1</sub>, i<sub>2</sub>, i<sub>3</sub>, i<sub>4</sub>, i<sub>5</sub>, la cui soluzione è la seguente:

$$\begin{aligned}
e_A &= -E + R_4 I \quad ; \quad e_B = R_4 I \quad ; \quad e_C = R_4 I \\
v_1 &= E \quad ; \quad i_1 = -\frac{E}{R_2} \\
v_2 &= E \quad ; \quad i_2 = \frac{E}{R_2} \\
v_3 &= 0 \quad ; \quad i_3 = 0 \\
v_4 &= R_4 I \quad ; \quad i_4 = I \\
v_5 &= -R_4 I \quad ; \quad i_5 = I \\
v_6 &= -E + R_4 I
\end{aligned} \tag{6}$$

Affinché la soluzione trovata non contraddica l'ipotesi di diodo interdetto deve essere  $v_6 \leq 0$  e quindi dalla ultima delle (6) deve essere:

$$E \geq R_4 I \tag{7}$$

Dal confronto della (5) con la (7) si vede che, una volta assegnati i valori di  $E$ ,  $I$  ed  $R_4$ , una sola delle due soluzioni è accettabile.

Riassumendo, per applicare il metodo di Tableau ad un circuito connesso qualunque ( $R$  = numero di rami del circuito,  $N$  = numero di nodi del circuito), si prende arbitrariamente un nodo come nodo di riferimento del circuito, si applica la LKT<sub>r</sub> ad ogni ramo del circuito, si applica la LKC<sub>n</sub> a tutti i nodi tranne quello di riferimento e si chiude il sistema con le equazioni costitutive (caratteristiche) dei componenti:

$$\begin{array}{ll}
R \text{ equazioni LKT}_r & \mathbf{v} = \mathbf{M} \mathbf{e} \\
N - 1 \text{ equazioni LKC}_n & \mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0} \\
R \text{ equazioni caratteristiche} & \mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}
\end{array}$$

dove  $\mathbf{v}$  è il vettore delle tensioni di ramo (dimensione  $R$ ),  $\mathbf{i}$  è il vettore delle correnti di ramo (dimensione  $R$ ),  $\mathbf{e}$  è il vettore delle tensioni di nodo (dimensione  $N - 1$ ),  $\mathbf{M}$  è una matrice costante  $R \times (N - 1)$  ed  $\mathbf{A}$  è una matrice costante  $(N - 1) \times R$  [Come si è già visto, risulta che  $\mathbf{M}$  è la trasposta di  $\mathbf{A}$ , cioè:  $\mathbf{M} = \mathbf{A}^T$ ]. In generale la funzione  $\mathbf{f}$  può dipendere anche dalla variabile temporale  $t$ , ma tale dipendenza, per semplicità di notazione, non è esplicitamente indicata. Il sistema risolvibile contiene dunque  $2R + N - 1$  equazioni in  $2R + N - 1$  incognite.

Nel caso particolare in cui tutti i componenti siano resistori lineari, generatori indipendenti di tensione e di corrente oppure generatori pilotati con caratteristica lineare, la rete si definisce lineare e le equazioni delle caratteristiche possono essere scritte nella forma

$$R \text{ equazioni caratteristiche} \quad \mathbf{H} \mathbf{i} + \mathbf{K} \mathbf{v} = \mathbf{S}$$

dove  $\mathbf{H}$  è una matrice costante  $R \times R$ ,  $\mathbf{K}$  è una matrice costante  $R \times R$  ed  $\mathbf{S}$  è il vettore di dimensione  $R$  che contiene le tensioni e le correnti impresse dai generatori indipendenti (sui rami in cui sono presenti e zero altrove). In tal caso il sistema risolvibile è lineare ed è possibile esprimere ogni variabile come combinazione lineare delle sole tensioni e correnti impresse dai generatori indipendenti. Con riferimento alla corrente sul  $k$ -esimo ramo potremo quindi scrivere:

$$i_k = \sum_n \underset{\text{gen.ind.tensione}}{g_{k,n}} E_{s,n} + \sum_m \underset{\text{gen.ind.corrente}}{\alpha_{k,m}} I_{s,m} \quad \text{per ogni } k$$

Tale relazione è l'enunciato del **Principio di Sovrapposizione degli Effetti**: *In una rete lineare la corrente in un generico ramo (effetto) è uguale alla somma algebrica delle correnti che vi sarebbero prodotte dai*

singoli generatori **indipendenti** presenti nella rete se agissero separatamente. Lo stesso vale per le tensioni di ramo e di nodo<sup>(o)</sup>.

### Eliminazione delle tensioni di nodo

Le soluzioni (4) e (6) sono state ottenute risolvendo un sistema di 14 equazioni lineari in 14 incognite. Tale soluzione, anche se la matrice del sistema è sparsa, può risultare complessa. L'ordine del sistema risolvibile può essere ridotto osservando che è possibile ottenere un sistema di  $2R$  equazioni indipendenti nelle sole tensioni e correnti di ramo incognite. Si consideri infatti la figura 2 in cui sono indicate 3 ( $R - N + 1$  risulta in questo caso uguale a 3) maglie indipendenti del circuito individuate in figura 1.b.

Applicando la  $LKT_m$  alle maglie così definite si ottiene il seguente sistema di equazioni lineari in cui compaiono solo le tensioni di ramo:

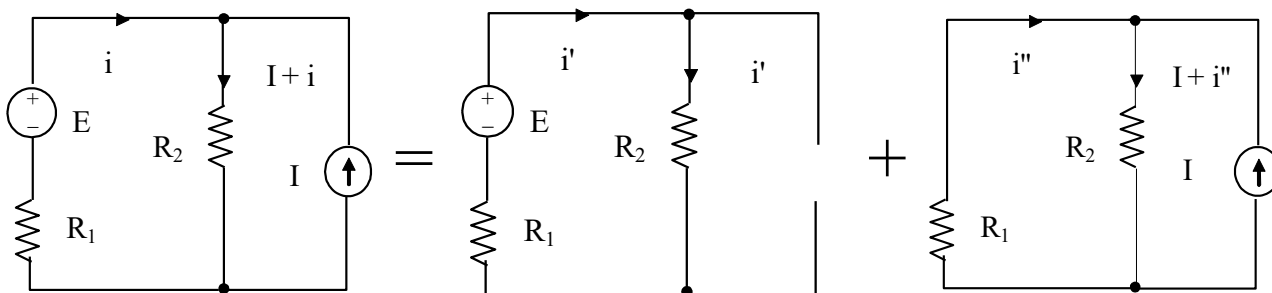
$$\begin{aligned} -v_1 + v_2 &= 0 \\ -v_2 + v_3 + v_4 - v_6 &= 0 \\ -v_4 - v_5 &= 0 \end{aligned} \quad (2.iii)$$

( $R - N + 1 = 3$  equazioni  $LKT_m$  in cui come incognite compaiono  $R = 6$  tensioni di ramo)

<sup>(o)</sup> Risolvere una rete lineare con il principio di sovrapposizione degli effetti significa allora scomporre la rete originaria in tante rete parziali quanti sono i generatori indipendenti, calcolare la corrente nei rami per ognuna di queste reti, e sommare algebricamente le correnti parziali. Si calcoli ad esempio la corrente  $i$  nella resistenza  $R_1$  della rete di figura. Si ha:

$$i = \frac{E}{R_1 + R_2} - \frac{R_2 I}{R_1 + R_2}$$

Ponendo  $i' = \frac{E}{R_1 + R_2}$  ;  $i'' = -\frac{R_2 I}{R_1 + R_2}$  si ha  $i = i' + i''$ , dove  $i'$  ed  $i''$  sono le correnti nelle due sottoreti:



La prima è la rete che si ottiene da quella originaria, annullando l'azione del generatore indipendente di corrente, la seconda quella in cui è annullata l'azione del generatore indipendente di tensione. La figura illustra il concetto mostrando, nel contempo, in che modo si esclude l'azione dei generatori: i generatori indipendenti di tensione nulla sono equivalenti a cortocircuiti, i generatori indipendenti di corrente nulla sono equivalenti a circuiti aperti.

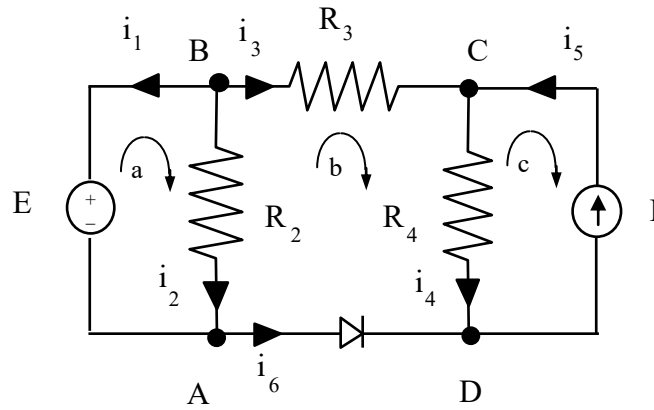


Figura 2

Le  $LKT_m$  (2.iii), le  $LKC_n$  (2.ii) e le relazioni costitutive (3) costituiscono un sistema di  $2R$  equazioni, risolvendo il quale è possibile calcolare le  $2R$  incognite tensioni e correnti di ramo.

( $N - 1 = 3$  equazioni  $LKC_n$  in cui compaiono come incognite  $R = 6$  correnti di ramo)

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 - i_6 &= 0 \\ -i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.ii)$$

$$\begin{aligned} i_3 - i_4 + i_5 &= 0 \\ v_1 &= E \end{aligned}$$

( $R = 6$  equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono come incognite  $R = 6$  tensioni di ramo ed  $R = 6$  correnti di ramo)

$$\begin{aligned} v_2 &= R_2 i_2 \\ v_3 &= R_3 i_3 \\ v_4 &= R_4 i_4 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} i_5 &= I \\ v_6 i_6 &= 0 \end{aligned}$$

Infine, per tutti i componenti controllati in tensione (in questo esempio il ramo 5) o in corrente (in questo esempio i rami 1, 2, 3, e 4), è possibile sostituire le equazioni costitutive nelle  $LKT_m$  ed  $LKC_n$ . Tale sostituzione porta ad un sistema contenente un numero di equazioni pari a  $R +$  (Numero di componenti non controllati né in tensione né in corrente), in altrettante variabili (tensioni o correnti di ramo). Nell'esempio in oggetto otterremo quindi (dato che il diodo è l'unico componente presente non controllato né in tensione né in corrente) il seguente sistema di 7 equazioni nelle incognite  $v_5, v_6, i_1, i_2, i_3, i_4, i_6$ :

$$\begin{aligned} -E + R_2 i_2 &= 0 \\ -R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4 - v_6 &= 0 \\ -R_4 i_4 - v_5 &= 0 \end{aligned} \quad (3.i)$$

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 - i_6 &= 0 \\ -i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.ii)$$

$$\begin{aligned} i_3 - i_4 + I &= 0 \\ v_6 i_6 &= 0 \end{aligned} \quad (3.iii)$$

Riassumendo, per applicare il metodo dell'eliminazione delle tensioni di nodo ad un circuito connesso qualunque ( $R =$  numero di rami del circuito,  $N =$  numero di nodi del circuito), si applica la  $LKT_m$  ad ogni maglia indipendente del circuito, si applica la  $LKC_n$  a tutti i nodi tranne uno e si chiude il sistema con le equazioni costitutive (caratteristiche) dei componenti:

$$R - N + 1 \text{ equazioni } LKT_m \quad \mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$N - 1$  equazioni LKC<sub>n</sub>

$$\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

$R$  equazioni caratteristiche

$$f(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

dove  $\mathbf{v}$  è il vettore delle tensioni di ramo (dimensione  $R$ ),  $\mathbf{i}$  è il vettore delle correnti di ramo (dimensione  $R$ ),  $\mathbf{B}$  è una matrice costante  $(R - N + 1) \times R$  ed  $\mathbf{A}$  è una matrice costante  $(N - 1) \times R$ . Il sistema risolvete contiene dunque  $2R$  equazioni in  $2R$  incognite. Tuttavia, se tutti i componenti sono controllati in tensione o in corrente è possibile sostituire le caratteristiche nelle LKT ed LKC, giungendo ad un sistema risolvete di  $R$  equazioni in  $R$  incognite.

### Metodo dei Tagli Fondamentali

Una differente semplificazione del sistema risolvete (2.iii), (2.ii), (3) si può ottenere osservando che le LKC permettono di esprimere la corrente in ciascun ramo di albero come una combinazione lineare delle correnti sui rami di coalbero. Infatti, dato che l'albero associato al grafo è, per definizione, privo di maglie, è sempre possibile associare ad ogni ramo d'albero una superficie chiusa (superficie di taglio) che intersechi, oltre ad esso, solo rami di coalbero. L'insieme dei rami intersecati da tale superficie chiusa prende il nome di taglio (la rimozione del taglio separa il grafo in due sotto-grafi non connessi). Se il taglio contiene un solo ramo di albero, esso prende il nome di taglio fondamentale relativo a quel ramo e a quell'albero. In figura 2.b sono illustrati tre superfici che individuano i tagli fondamentali associati ai rami di albero (tagli fondamentali: [1, 2, 6], [3, 6], [4, 5, 6]) da cui è possibile ricavare le (8) applicando la Legge di Kirchhoff delle Correnti su tali superfici (LKC<sub>t</sub>).

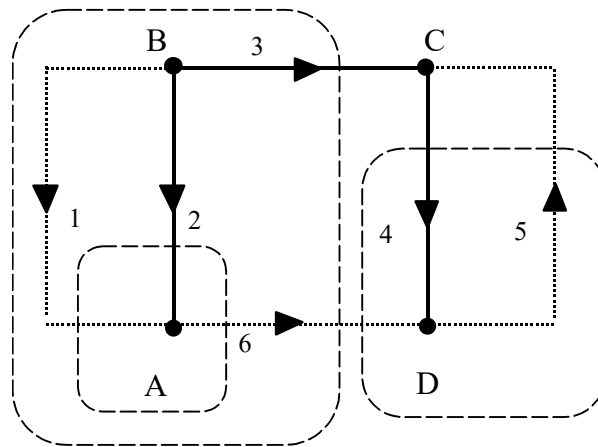


Figura 2.b

( $N - 1 = 3$  equazioni LKC<sub>t</sub> in cui compaiono come incognite  $R = 6$  correnti di ramo)

$$\begin{aligned} i_2 &= -i_1 + i_6 \\ i_3 &= -i_6 \\ i_4 &= -i_6 + i_5 \end{aligned} \quad (8)$$

(una relazione per ogni ramo di albero quindi in generale  $N - 1$  relazioni che esprimono le  $N - 1$  correnti di albero in funzione delle  $R - N + 1$  correnti sui rami di coalbero; nell'esempio in oggetto possiamo quindi scrivere 3 relazioni che esprimono le 3 correnti di albero  $i_2$ ,  $i_3$  e  $i_4$  in funzione delle 3 correnti sui rami di coalbero  $i_1$ ,  $i_5$  e  $i_6$ )

Dato che le (8) sono state ottenute applicando la Legge di Kirchhoff delle Correnti, esse risultano equivalenti alle (2.ii) (infatti sostituendo le (8) nelle (2.ii) si ottengono tre identità  $0 = 0$ ). Inoltre, per tutti i componenti sui rami di albero è possibile sostituire le relazioni (8) nelle relazioni costitutive dei

componenti. Tale sostituzione porta ad un sistema contenente un numero di equazioni pari a  $2R - N + 1$ , in altrettante variabili (tensioni di ramo e correnti di coalbero). Nell'esempio in oggetto otterremo quindi il seguente sistema di 9 equazioni nelle incognite  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, i_1, i_5, i_6$ :

$$\begin{array}{l}
 (R - N + 1 = 3 \text{ equazioni LKT}_m \text{ in cui come incognite compaiono } R = 6 \text{ tensioni di ramo}) \\
 \\
 (R = 6 \text{ equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono come incognite } R = 6 \text{ tensioni di ramo ed } R - N + 1 = 3 \text{ correnti di coalbero})
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 -v_1 + v_2 = 0 \\
 -v_2 + v_3 + v_4 - v_6 = 0 \\
 -v_4 - v_5 = 0 \\
 v_1 = E \\
 v_2 = R_2(-i_1 + i_6) \\
 v_3 = -R_3 i_6 \\
 v_4 = R_4(-i_6 + i_5) \\
 i_5 = I \\
 v_6 i_6 = 0
 \end{array}
 \quad (2.iii) \quad (8.i)$$

Infine, per tutti i componenti controllati in corrente (in questo esempio i rami 1, 2, 3, e 4), è possibile sostituire le equazioni costitutive nelle LKT<sub>m</sub>. Tale sostituzione porta ad un sistema contenente un numero di equazioni pari a  $R - N + 1 + (\text{Numero di componenti non controllati in corrente})$ , in altrettante variabili (tensioni di ramo o correnti di coalbero). Nell'esempio in oggetto otterremo quindi (dato che il diodo ed il generatore di corrente non sono controllati in corrente) il seguente sistema di 5 equazioni nelle incognite  $v_5, v_6, i_1, i_5, i_6$ :

$$\begin{array}{l}
 (R - N + 1 = 3 \text{ equazioni LKT}_m) \\
 \\
 (\text{equazione costitutive dei componenti non controllati in corrente})
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 -E + R_2(-i_1 + i_6) = 0 \\
 -R_2(-i_1 + i_6) - R_3 i_6 + R_4(-i_6 + i_5) - v_6 = 0 \\
 -R_4(-i_6 + i_5) - v_5 = 0 \\
 i_5 = I \\
 v_6 i_6 = 0
 \end{array}
 \quad (8.ii) \quad (8.iii)$$

Si noti che risulta conveniente, se possibile, scegliere i rami dell'albero escludendo quelli contenenti generatori di corrente indipendenti. In tal caso infatti, si ottengono direttamente delle equazioni del tipo  $i_5 = I$  (relazione costitutiva del generatore di corrente), che consentono di ridurre direttamente l'ordine del sistema.

Riassumendo, per applicare il metodo dei Tagli fondamentali ad un circuito connesso qualunque ( $R =$  numero di rami del circuito,  $N =$  numero di nodi del circuito), si definisce un albero (ed un coalbero), si applica la LKT<sub>m</sub> ad ogni maglia fondamentale, si applica la LKC<sub>t</sub> ad ogni taglio fondamentale e si chiude il sistema con le equazioni costitutive (caratteristiche) dei componenti:

$$\begin{array}{ll}
 R - N + 1 \text{ equazioni LKT}_m & \mathbf{B v = 0} \\
 N - 1 \text{ equazioni LKC}_t \text{ ed } R - N + 1 \text{ identità} & \mathbf{i = Q i_c} \\
 R \text{ equazioni caratteristiche} & \mathbf{f(i, v) = 0}
 \end{array}$$

dove  $\mathbf{v}$  è il vettore delle tensioni di ramo (dimensione  $R$ ),  $\mathbf{i}$  è il vettore delle correnti di ramo (dimensione  $R$ ),  $\mathbf{i_c}$  è il vettore delle correnti dei rami di coalbero (dimensione  $R - N + 1$ ),  $\mathbf{B}$  è una matrice costante  $(R - N + 1) \times R$  detta matrice delle maglie fondamentali e  $\mathbf{Q}$  è una matrice costante  $R \times (R - N + 1)$  [le prime  $R - N + 1$  righe di  $\mathbf{Q}$  corrispondono ad identità] detta matrice dei tagli fondamentali. È dunque sempre possibile sostituire le LKC nelle equazioni caratteristiche ottenendo il sistema ridotto

R - N + 1 equazioni LKT<sub>m</sub>

$$\mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

R equazioni caratteristiche

$$f(\mathbf{Q} \mathbf{i}_c, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

Il sistema risolvete contiene dunque  $2R - N + 1$  equazioni in  $2R - N + 1$  incognite. Tuttavia, se tutti i componenti sono controllati in corrente, cioè se  $f(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{v} - \mathbf{h}(\mathbf{i})$ , è possibile sostituire le caratteristiche nelle LKT, giungendo ad un sistema risolvete di  $R - N + 1$  equazioni nelle  $R - N + 1$  incognite “correnti dei rami di coalbero”.

R - N + 1 equazioni LKT<sub>m</sub>

$$\mathbf{B} \mathbf{h}(\mathbf{Q} \mathbf{i}_c) = \mathbf{0}$$

### Metodo dei potenziali di nodo

Quando il numero dei nodi N del circuito è piccolo, è possibile e conveniente utilizzare il metodo dell'analisi dei nodi per scrivere un sistema risolvete di (N - 1) equazioni nelle (N - 1) tensioni di nodo incognite del circuito. A tale scopo si considerino nuovamente le (2.i), (2.ii) e (3):

(R = 6 equazioni LKT<sub>r</sub> in cui compaiono come incognite R = 6 tensioni di ramo ed N - 1 = 3 potenziali di nodo)

$$\begin{aligned} v_1 &= e_B - e_A \\ v_2 &= e_B - e_A \\ v_3 &= e_B - e_C \\ v_4 &= e_C \\ v_5 &= -e_C \\ v_6 &= e_A \end{aligned} \quad (2.i)$$

(N - 1 = 3 equazioni LKC<sub>n</sub> in cui compaiono come incognite R = 6 correnti di ramo)

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 - i_6 &= 0 \\ -i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\ i_3 - i_4 + i_5 &= 0 \end{aligned} \quad (2.ii)$$

(R = 6 equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono come incognite R = 6 tensioni di ramo ed R = 6 correnti di ramo)

$$\begin{aligned} v_1 &= E \\ v_2 &= R_2 i_2 \\ v_3 &= R_3 i_3 \\ v_4 &= R_4 i_4 \\ i_5 &= I \\ v_6 i_6 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Per ogni ramo è possibile sostituire le relazioni (2.i) nelle relazioni costitutive dei componenti (3). Tale sostituzione porta ad un sistema contenente un numero di equazioni pari a  $R + N - 1$ , in altrettante variabili (potenziali di nodo e correnti di ramo). Nell'esempio in oggetto otterremo quindi il seguente sistema di 9 equazioni nelle incognite  $e_A, e_B, e_C, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$ :

(N - 1 = 3 equazioni LKC<sub>n</sub> in cui compaiono come incognite R = 6 correnti di ramo)

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 - i_6 &= 0 \\ -i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\ i_3 - i_4 + i_5 &= 0 \end{aligned} \quad (2.ii)$$



(R = 6 equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono come incognite R = 6 correnti di ramo ed N - 1 = 3 potenziali di nodo)

$$\begin{aligned}
 e_B - e_A &= E \\
 e_B - e_A &= R_2 i_2 \\
 e_B - e_C &= R_3 i_3 \\
 e_C &= R_4 i_4 \\
 i_5 &= I \\
 e_A i_6 &= 0
 \end{aligned} \tag{9.i}$$

Infine, per tutti i componenti controllati in tensione (in questo esempio i rami 2, 3, 4 e 5), è possibile esplicitare le correnti e sostituire le equazioni costitutive nelle LKC [ $i_2 = (e_B - e_A)/R_2$ ,  $i_3 = (e_B - e_C)/R_3$ ,  $i_4 = e_C/R_4$ ,  $i_5 = I$ ]. Tale sostituzione porta ad un sistema contenente un numero di equazioni pari a N - 1 + (Numero di componenti non controllati in tensione), in altrettante variabili (correnti di ramo o potenziali di nodo). Nell'esempio in oggetto otterremo quindi (dato che il diodo ed il generatore di tensione non sono controllati in tensione) il seguente sistema di 5 equazioni nelle incognite  $e_A, e_B, e_C, i_1, i_6$ :

$$\begin{aligned}
 i_1 + \frac{e_B - e_A}{R_2} - i_6 &= 0 \\
 -i_1 - \frac{e_B - e_A}{R_2} - \frac{e_B - e_C}{R_3} &= 0
 \end{aligned} \tag{9.ii}$$

(N - 1 = 3 equazioni LKC<sub>n</sub>)

$$\begin{aligned}
 \frac{e_B - e_C}{R_3} - \frac{e_C}{R_4} + I &= 0 \\
 e_B - e_A &= E \\
 e_A i_6 &= 0
 \end{aligned} \tag{9.iii}$$

(equazioni costitutive dei componenti non controllati in tensione)

Riassumendo, per applicare il metodo dei potenziali di nodo ad un circuito connesso qualunque (R = numero di rami del circuito, N = numero di nodi del circuito), si prende arbitrariamente un nodo come nodo di riferimento del circuito, si applica la LKT<sub>r</sub> ad ogni ramo del circuito, si applica la LKC<sub>n</sub> a tutti i nodi tranne quello di riferimento e si chiude il sistema con le equazioni costitutive (caratteristiche) dei componenti:

$$R \text{ equazioni LKT}_r \quad \mathbf{v} = \mathbf{M} \mathbf{e}$$

$$N - 1 \text{ equazioni LKC}_n \quad \mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

$$R \text{ equazioni caratteristiche} \quad \mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

dove  $\mathbf{v}$  è il vettore delle tensioni di ramo (dimensione R),  $\mathbf{i}$  è il vettore delle correnti di ramo (dimensione R),  $\mathbf{e}$  è il vettore delle tensioni di nodo (dimensione N - 1),  $\mathbf{M}$  è una matrice costante R × (N - 1) ed  $\mathbf{A}$  è una matrice costante (N - 1) × R. È dunque sempre possibile sostituire le LKT nelle equazioni caratteristiche ottenendo il sistema ridotto

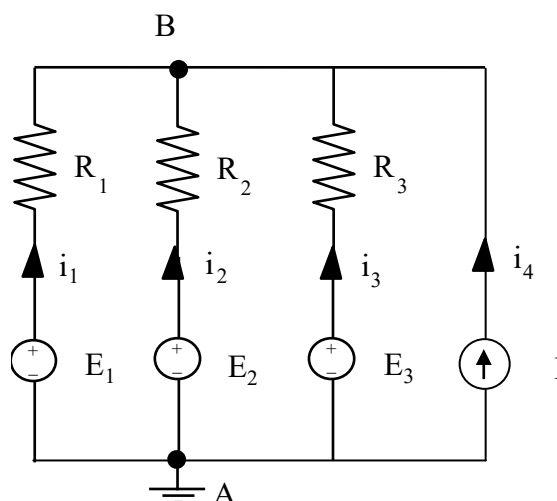
$$N - 1 \text{ equazioni LKC}_n \quad \mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

$$R \text{ equazioni caratteristiche} \quad \mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{M} \mathbf{e}) = \mathbf{0}$$

Il sistema risolvibile contiene dunque R + N - 1 equazioni in R + N - 1 incognite. Tuttavia, se tutti i componenti sono controllati in tensione, cioè se  $\mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{i} - \mathbf{g}(\mathbf{v})$ , è possibile sostituire le caratteristiche nelle LKC, giungendo ad un sistema risolvibile di N - 1 equazioni nelle N - 1 incognite "tensioni di nodo".

$$N - 1 \text{ equazioni LKC}_n \quad \mathbf{A} \mathbf{g}(\mathbf{M} \mathbf{e}) = \mathbf{0}$$

Il metodo dei potenziali di nodo è particolarmente utile quando il numero di nodi è piccolo e tutti i componenti sono controllati in tensione. Come esempio limite si consideri il circuito illustrato nella figura, che contiene un solo nodo indipendente ( $N - 1 = 1$ ). Tre componenti, costituiti ciascuno da un generatore indipendente di tensione e da un resistore collegati in serie (generatore di tensione reale), sono collegati in parallelo a un generatore di corrente. Prendendo il nodo A come nodo di riferimento, è presente una sola tensione di nodo  $e_B = v_{BA}$  incognita.



Ciascuno dei componenti è controllato in tensione. Infatti, dalla legge costitutiva dei componenti, si può esprimere la corrente in ogni ramo del circuito in funzione della tensione ai suoi capi:

$$v_{BA} = E_k - R_k i_k \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} i_k &= G_k (E_k - v_{BA}) & , k = 1, 2, 3 \\ i_4 &= I \end{aligned} \quad (12)$$

La tensione ai capi di ciascun ramo, dalle LKT<sub>r</sub> può essere espressa come differenza delle tensioni di nodo dei nodi cui il ramo è collegato. Il sistema risolvibile si ottiene scrivendo la LKC<sub>n</sub> per ogni nodo del circuito, escluso quello di riferimento, e risulta quindi costituito da  $(N - 1) = 1$  equazioni nelle  $(N - 1) = 1$  tensioni di nodo incognite. Con riferimento all'esempio di figura risulta:

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^3 G_k (E_k - v_{BA}) + I = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{BA} = \frac{\sum_{k=1}^3 G_k E_k + I}{\sum_{k=1}^3 G_k} = \frac{\sum_{k=1}^3 \frac{E_k}{R_k} + I}{\sum_{k=1}^3 \frac{1}{R_k}} \quad (13)$$

L'ultima relazione delle (13), che mostra la relazione tra la tensione di nodo  $v_{BA}$ , le tensioni e la corrente impressa dei generatori e le resistenze dei rami stessi; viene anche indicata col nome di **Teorema di Millman**, e può essere estesa ad un numero qualsiasi di generatori reali in parallelo.

Supponendo, ad esempio, che i dati del problema siano:  $E_1 = 110 \text{ V}$ ,  $E_2 = 105 \text{ V}$ ,  $E_3 = 0 \text{ V}$ ,  $R_1 = 0.5 \Omega$ ,  $R_2 = 0.5 \Omega$ ,  $R_3 = 5 \Omega$ ,  $I = 3 \text{ A}$  dalla (13) si ottiene  $v_{BA} = 103.1 \text{ V}$  e sostituendo nelle (12)  $i_1 = 13.8 \text{ A}$ ,  $i_2 = 3.8 \text{ A}$ ,  $i_3 = -20.6 \text{ A}$ .

### Teorema di Thevenin

*Ipotesi.* Sono dati due bipoli, L ed N collegati come illustrato nella figura 3. Il bipolo L è una rete lineare e controllato in corrente, mentre il bipolo N può essere qualsiasi, anche non lineare.

*Tesi.* Limitatamente alla corrente  $i$  ed alla tensione  $v_{AB}$  alla porta, il circuito che si ottiene sostituendo il bipolo L (quello lineare) con un generatore di tensione ed un bipolo L' collegati in serie, è equivalente in ogni istante al circuito originale. Il bipolo L' si ottiene dal bipolo L annullando le grandezze impressa dei generatori indipendenti di tensione e di corrente eventualmente presenti (i generatori indipendenti di tensione vengono quindi sostituiti con dei corto-circuiti ed i generatori indipendenti di corrente vengono

sostituiti con dei circuiti aperti). La tensione impressa  $E_0$  del generatore di tensione di Thevenin è pari al valore della tensione  $v_{AB}$  alla porta del bipolo  $L$  quando la corrente  $i$  è nulla (È da notare che il verso positivo di  $E_0$  è arbitrario: una volta scelto il verso positivo, il valore di  $E_0$  è pari alla tensione  $v_{AB}$  se il terminale positivo è  $A$ , è pari invece a  $-v_{AB}$  se il terminale positivo è  $B$ )

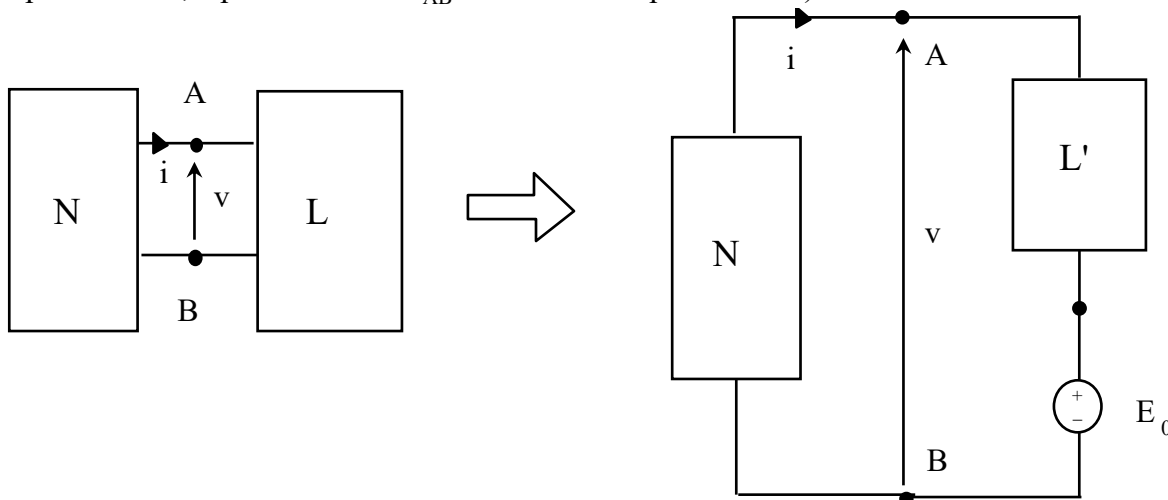
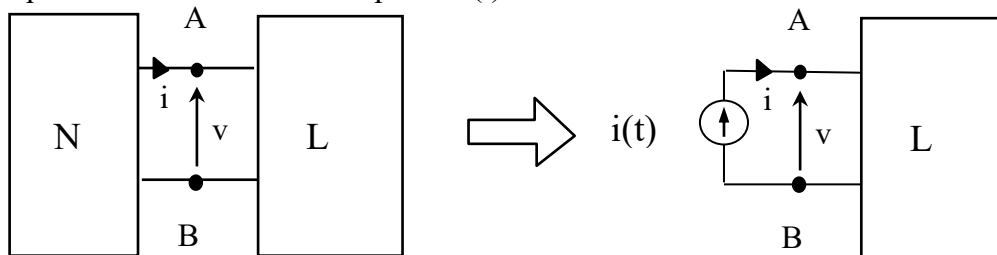
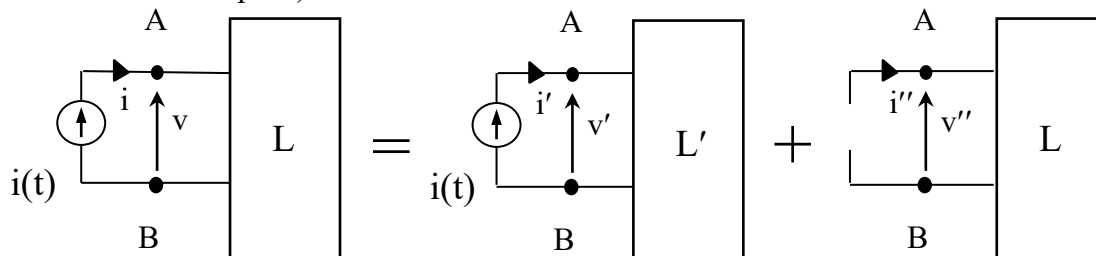


Figura 3 Teorema di Thevenin

Dimostrazione: poiché il bipolo  $L$  è controllato in corrente (data la corrente è possibile determinare la tensione ai terminali), è possibile, ai fini del calcolo della tensione  $v$ , sostituire al bipolo  $N$  un generatore di corrente indipendente la cui corrente impressa  $i(t)$  coincide con la corrente assorbita dal bipolo  $L$ .



Dato che il bipolo  $L$  è lineare, è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. In particolare, consideriamo due circuiti: nel primo azzeriamo i generatori indipendenti in  $L$  (e indicheremo tale bipolo con  $L'$ ), nel secondo azzeriamo il generatore indipendente di corrente (come già visto, i generatori indipendenti di tensione nulla sono equivalenti a cortocircuiti, i generatori indipendenti di corrente nulla sono equivalenti a circuiti aperti).



Si ha:

$$i = i' + i'', \text{ dove } i' \text{ ed } i'' \text{ sono le correnti nelle due sottoreti:}$$

e

$$v = v' + v'', \text{ dove } v' \text{ ed } v'' \text{ sono le tensioni nelle due sottoreti:}$$

È evidente tuttavia che  $i' = i(t)$  e che  $i'' = 0$ . Inoltre, applicando la LKT alle due sottoreti otteniamo (si ricordi che per ipotesi L è controllato in corrente):

$$v' = V_{L'}(i') = V_{L'}(i)$$

$$v'' = V_L(i'') = V_L(0)$$

dove  $V_{L'}()$  ed  $V_L()$  rappresentano le caratteristiche dei bipoli  $L'$  ed  $L$ , rispettivamente. Infine, definendo  $E_0 = V_L(0) = v_{AB}|_{L \text{ a vuoto}}$  si ottiene:

$$v = V_{L'}(i) + E_0$$

che è proprio la caratteristica del bipolo equivalente mostrato in figura 3. Il teorema di Thevenin, come enunciato, è valido in regime qualsiasi. In particolare, in regime stazionario (corrente continua) si ha che “Un circuito lineare L con due terminali controllato in corrente è equivalente a un generatore di tensione reale (bipolo di Thevenin) formato da un generatore indipendente di tensione  $E_0$  in serie con un resistore  $R_e$ , in cui  $E_0$  è la tensione a vuoto ai terminali e  $R_e$  è la resistenza vista ai terminali quando i generatori indipendenti sono spenti”. Infatti, poiché il bipolo L è lineare e controllato in corrente, la sua relazione costitutiva è esprimibile per ipotesi come  $V_{L'}(i) = R_e i$ . Questo è sufficiente a definire univocamente il valore di  $R_e$ . Risulta infatti:

$$R_e = V_{L'}(i) / i = (v_{AB} / i)_{\text{Generatori Indipendenti di L Spenti}}$$

Si può applicare il teorema di Thevenin alla soluzione del circuito di figura 1 considerando come bipolo N il diodo ideale e quindi come bipolo L l'insieme di tutti gli altri componenti del circuito (vedi figura 4.a). Il bipolo  $L'$  è quello indicato nella figura 4.b, mentre il valore della tensione  $E_0$  viene calcolato risolvendo il circuito riportato nella figura 4.c ed è dato dalla relazione (10).

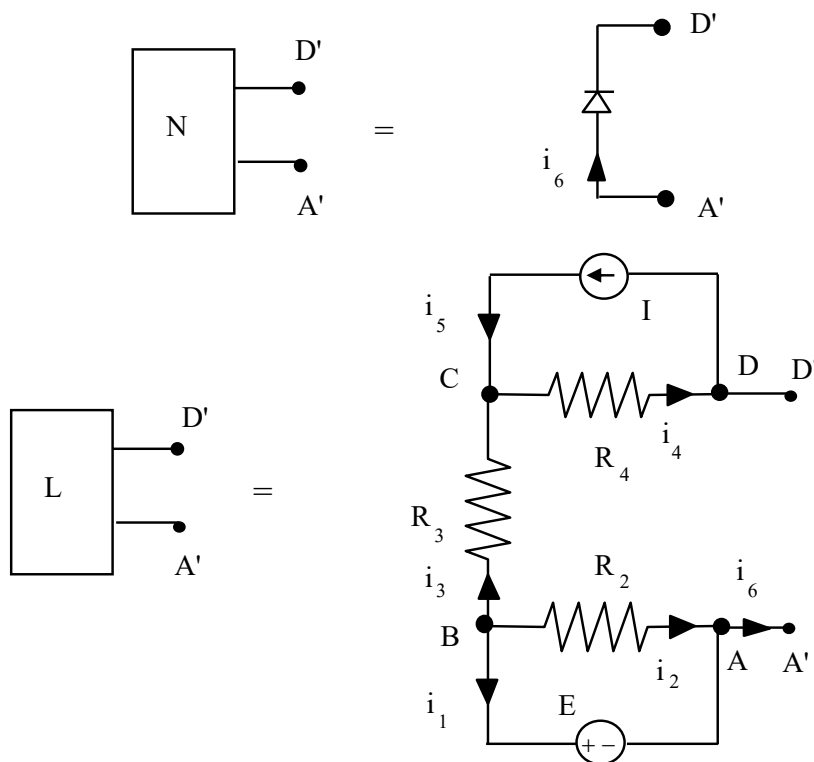


Figura 4.a

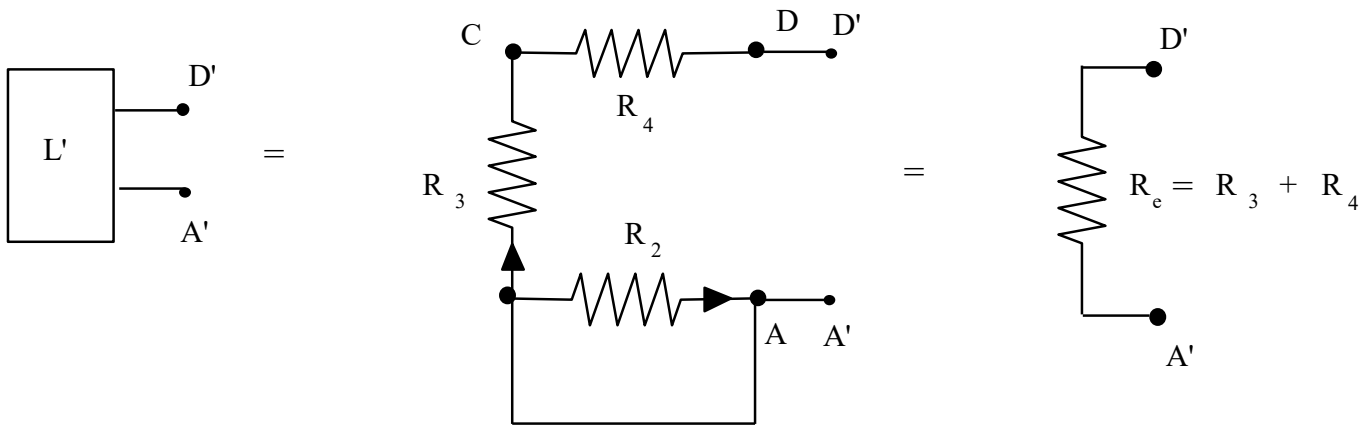
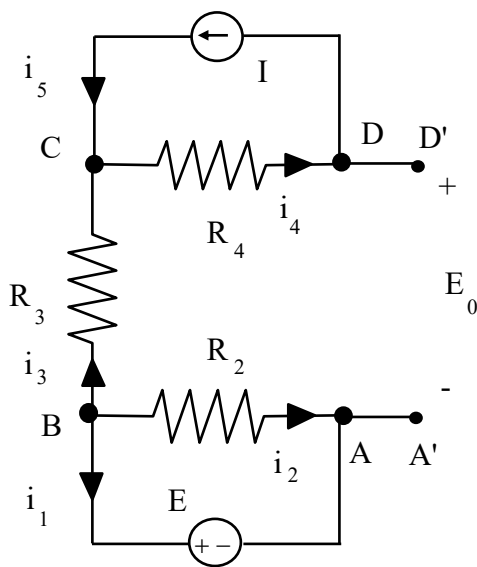


Figura 4.b



$$E_0 = E - R_4 I \quad (10)$$

Figura 4.c – La soluzione del circuito di figura è immediata notando che il ramo 3 costituisce un taglio fondamentale. Pertanto  $i_3 = 0$ , e dunque si ha che

$$i_4 = i_5 = I$$

ed

$$i_2 = -i_1 = E/R_2$$

Infine la valutazione di  $E_0$  si ottiene applicando la LKT alla sequenza ABCDA:

$$0 = -R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4 + E_0$$

ovvero

$$E_0 = E - R_4 I$$

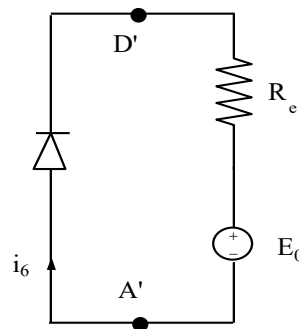


Figura 5

Infine il valore della corrente  $i_6$  viene ottenuto risolvendo il circuito illustrato nella figura 5, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo circuito equivalente di Thevenin.

Si ritrova quindi che sono possibili due casi: diodo interdetto oppure diodo in conduzione. Se il diodo è interdetto allora la corrente  $i_6$  è nulla e la tensione  $v_{A'D'}$ , che essendo nulla la caduta di tensione sulla resistenza  $R_e$  (corrente nulla) coincide con  $-E_0$ , deve essere minore od uguale a zero, da cui scende ancora la relazione (7). Se il diodo è in conduzione allora la corrente  $i_6$  è pari a  $-E_0/R_e$  e deve risultare maggiore od uguale a zero, da cui si ricava nuovamente la (5).

Supponendo ad esempio che i dati del problema siano i seguenti:  $E = 24 \text{ V}$ ,  $I = 4 \text{ A}$ ,  $R_2 = 2 \text{ } \Omega$ ,  $R_3 = 12 \text{ } \Omega$ ,  $R_4 = 8 \text{ } \Omega$  risulta:

$$E = 24 \quad \rightarrow \quad E < R_4 \cdot I \quad \rightarrow \quad \text{diodo in conduzione}$$

$$R_4 \cdot I = 32$$

e quindi dalla soluzione del circuito di figura 5 e dalle leggi di Kirchhoff per il circuito di figura 1 si ottiene:

$$v_6 = 0$$

$$i_6 = -\frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4} = 0.4 \text{ A}$$

$$i_4 = I - i_6 = 3.6 \text{ A}$$

$$v_4 = R_4 i_4 = 28.8 \text{ V}$$

$$i_5 = I = 4 \text{ A}$$

$$v_5 = -v_4 = -28.8 \text{ V}$$

$$i_3 = -i_6 = -0.4 \text{ A}$$

$$v_3 = R_3 i_3 = -4.8 \text{ V}$$

$$v_2 = E = 24 \text{ V}$$

$$i_2 = \frac{v_2}{R_2} = 12 \text{ A}$$

$$v_1 = E = 24 \text{ V}$$

$$i_1 = i_6 - i_2 = -11.6 \text{ A}$$

È da notare che la soluzione del circuito di figura 1 in cui sono presenti solo generatori e resistori (lineari e non), cioè elementi privi di memoria, si ottiene mediante relazioni algebriche, in ogni istante, dal valore che in quell'istante hanno le eccitazioni del sistema, cioè le grandezze impresse dei generatori.

Analogo al teorema di Thevenin, con ipotesi simili e le stesse possibilità di applicazione è il teorema di Norton.

### Teorema di Norton

*Ipotesi.* Sono dati due bipoli, L ed N collegati come illustrato nella figura 6. Il bipolo L è una rete lineare e controllato in tensione, mentre il bipolo N può essere qualsiasi, anche non lineare.

*Tesi.* Limitatamente alla corrente  $i$  ed alla tensione  $v_{AB}$  alla porta, il circuito che si ottiene sostituendo il bipolo L (quello lineare) con un generatore di corrente ed un bipolo L' collegati in parallelo, è equivalente in ogni istante al circuito originale. Il bipolo L' si ottiene dal bipolo L annullando le grandezze impresse dei generatori indipendenti di tensione e di corrente eventualmente presenti (il bipolo L' è lo stesso che interviene nel teorema di Thevenin). La corrente impressa  $I_c$  del generatore di corrente di Norton è pari al valore della corrente  $i$  alla porta del bipolo L quando la tensione  $v_{AB}$  è nulla (E' da notare che il verso positivo di  $I_c$  è arbitrario: una volta scelto il verso positivo il valore di  $I_c$  è pari alla corrente  $i$  se la freccia punta verso il terminale dove la corrente  $i$  esce da L, è pari invece a  $-i$  se la freccia punta verso il terminale dove la corrente  $i$  entra in L)

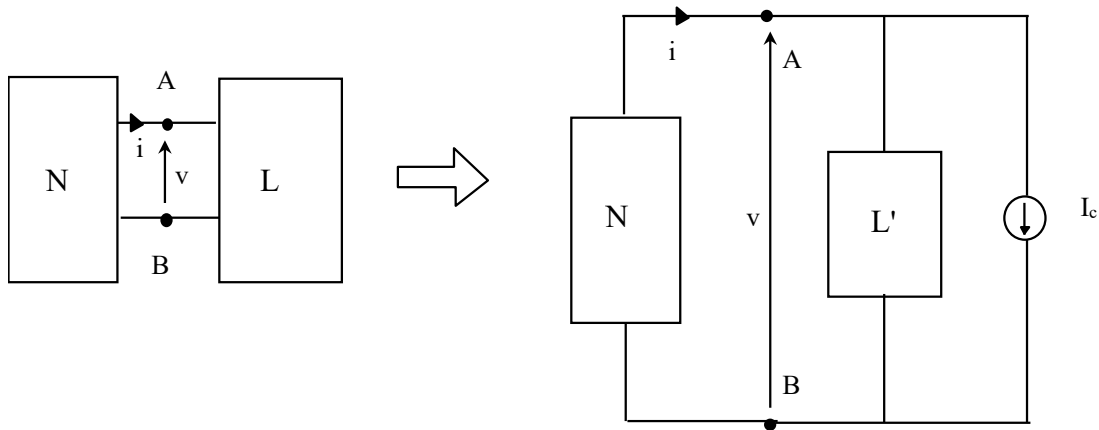
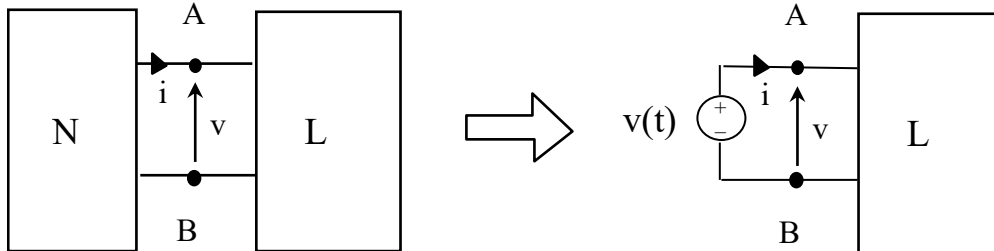
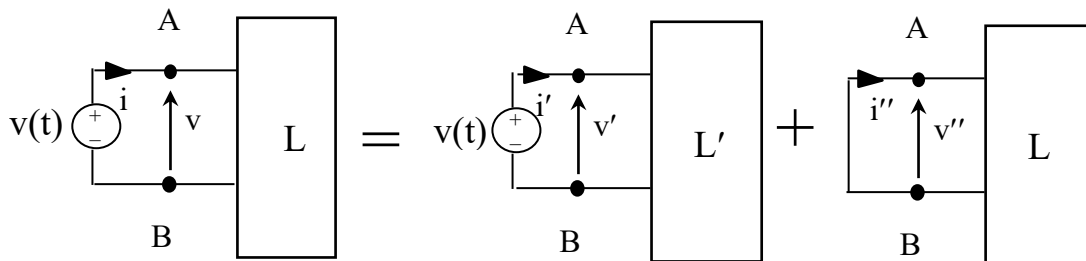


Figura 6 Teorema di Norton

Dimostrazione: poiché il bipolo L è controllato in tensione (data la tensione è possibile determinare la corrente assorbita), è possibile, ai fini del calcolo della corrente  $i$ , sostituire al bipolo N un generatore di tensione indipendente la cui tensione impressa  $v(t)$  coincide con la tensione ai terminali del bipolo L.



Dato che il bipolo L è lineare, è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. In particolare, consideriamo due circuiti: nel primo azzeriamo i generatori indipendenti in L (e indicheremo tale bipolo con L', nel secondo azzeriamo il generatore indipendente di tensione (come già visto, i generatori indipendenti di tensione nulla sono equivalenti a cortocircuiti, i generatori indipendenti di corrente nulla sono equivalenti a circuiti aperti.).



Si ha:

$$i = i' + i'', \text{ dove } i' \text{ ed } i'' \text{ sono le correnti nelle due sottoreti:}$$

e

$$v = v' + v'', \text{ dove } v' \text{ ed } v'' \text{ sono le tensioni nelle due sottoreti:}$$

È evidente tuttavia che  $v' = v(t)$  e che  $v'' = 0$ . Inoltre, applicando la LKC alle due sottoreti otteniamo (si ricordi che per ipotesi L è controllato in tensione):

$$i' = I_{L'}(v') = I_{L'}(v)$$

$$i'' = I_L(v'') = I_L(0)$$

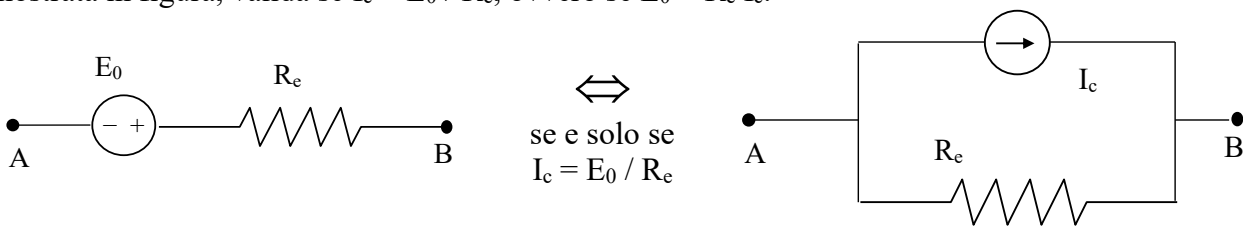
dove  $I_{L'}( )$  ed  $I_L( )$  rappresentano le caratteristiche dei bipoli L' ed L, rispettivamente. Infine, definendo  $I_c = I_L(0) = i|_L$  in cortocircuito si ottiene:

$$i = I_{L'}(v) + I_c$$

che è proprio la caratteristica del bipolo equivalente mostrato in figura 6. Il teorema di Norton, come enunciato, è valido in regime qualsiasi. In particolare, in regime stazionario (corrente continua) si ha che “Un circuito lineare L con due terminali controllato in tensione è equivalente a un bipolo (bipolo di Norton) formato da un generatore indipendente di corrente  $I_c$  in parallelo con un resistore  $R_e$ , in cui  $I_c$  è la corrente di cortocircuito tra i terminali e  $R_e$  è la resistenza vista ai terminali quando i generatori indipendenti sono spenti”. Infatti, poiché il bipolo L è lineare e controllato in tensione, la sua relazione costitutiva è esprimibile per ipotesi come  $I_{L'}(v) = v/R_e$ . Questo è sufficiente a definire univocamente il valore di  $R_e$ . Risulta infatti:

$$R_e = v/I_{L'}(v) = (v_{AB}/i)_{\text{Generatori indipendenti di L Spenti}}$$

Si noti che tale espressione coincide con quella trovata nel teorema di Thevenin. Infatti, applicando il teorema di Norton al bipolo di Thevenin in regime stazionario (corrente continua) si ottiene l'equivalenza mostrata in figura, valida se  $I_c = E_0 / R_e$ , ovvero se  $E_0 = R_e I_c$ .



Infine, i teoremi di Thevenin e di Norton, possono essere enunciati anche se nel bipolo L sono presenti induttori lineari e condensatori lineari.

Si può applicare il teorema di Norton alla soluzione del circuito di figura 1 considerando come bipolo N il diodo ideale e quindi come bipolo L l'insieme di tutti gli altri componenti del circuito (vedi figura 7.a). Il bipolo L' è quello indicato nella figura 7.b, mentre il valore della corrente  $I_c$  viene calcolata risolvendo il circuito riportato nella figura 7.c ed è dato dalla relazione (11).



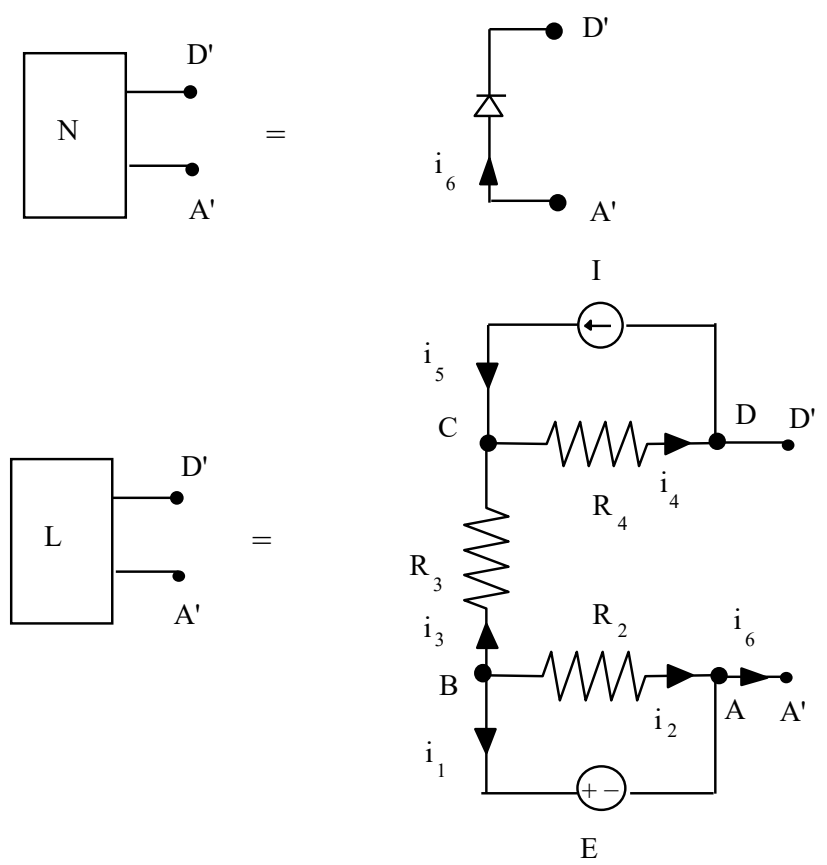


Figura 7.a

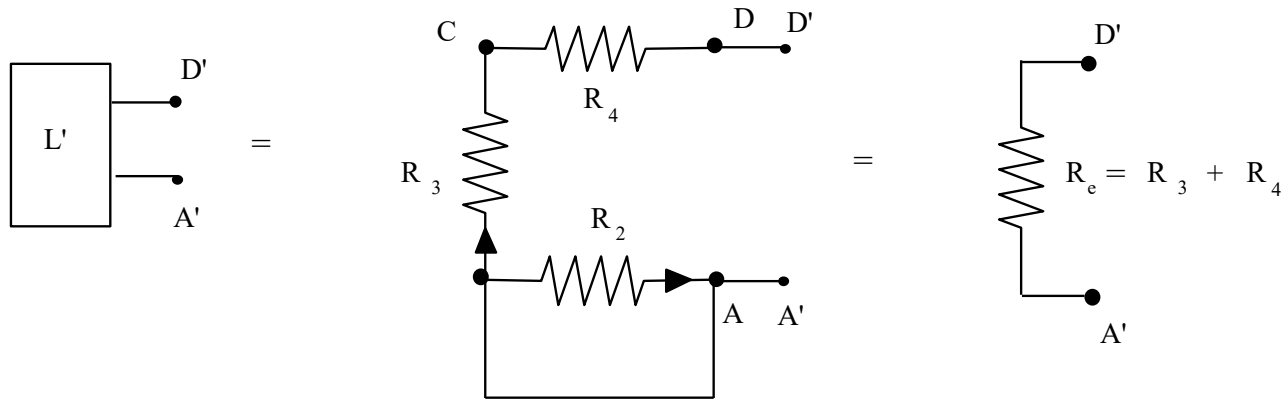


Figura 7.b

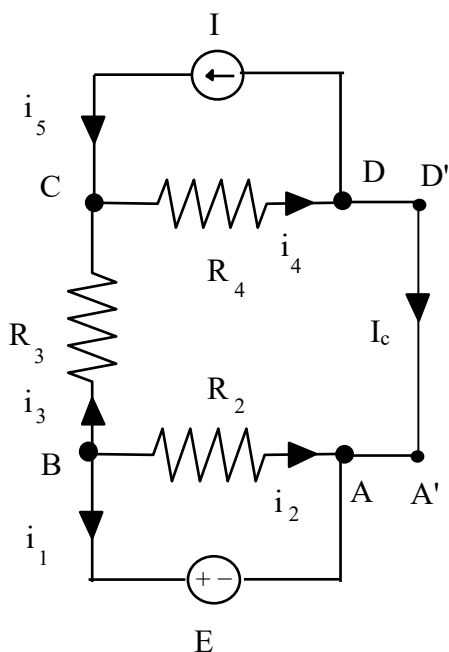


Figura 7.c – La soluzione del circuito di figura è immediata notando che:

$$\begin{aligned}
 i_5 &= I \\
 i_4 &= I + I_c \\
 i_3 &= I_c \\
 i_2 &= E/R_2 \\
 i_1 &= -I_c - E/R_2
 \end{aligned}$$

Infine la valutazione di  $I_c$  si ottiene applicando la LKT alla sequenza ABCDA:

$$\begin{aligned}
 0 &= -R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4 \\
 0 &= -E + R_3 I_c + R_4 (I + I_c)
 \end{aligned}$$

ovvero  $(R_3 + R_4) I_c = E - R_4 I$

$$I_c = \frac{E - R_4 I}{R_3 + R_4} \quad (11)$$

Infine il valore della corrente  $i_6$  viene ottenuto risolvendo il circuito illustrato nella figura 8, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo circuito equivalente di Norton.

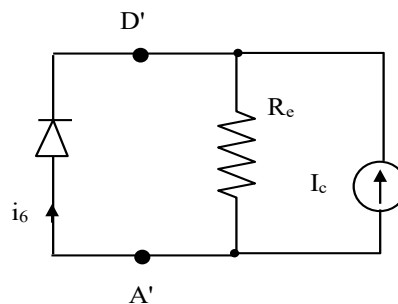


Figura 8

Si ritrova quindi che sono possibili due casi: diodo interdetto oppure diodo in conduzione. Se il diodo è interdetto allora la corrente  $i_6$  è nulla e la tensione  $v_{A'D'}$ , che coincide con la caduta di tensione sulla resistenza  $R_e$ , cioè con  $-R_e I_c$ , deve essere minore od uguale a zero, da cui discende ancora la relazione (7). Se il diodo è in conduzione allora la corrente  $i_6$  è pari a  $-I_c$  e deve risultare maggiore od uguale a zero, da cui si ricava nuovamente la (5).

### Trasformazioni stella-triangolo e triangolo-stella

Nella figura 9 sono mostrati tre resistori collegati a stella; nella figura 10 sono mostrati tre resistori collegati a triangolo. Entrambi i sistemi costituiscono un tripolo che viene collegato al circuito esterno attraverso i tre terminali A, B e C. Facendo uso delle Leggi di Kirchhoff e delle relazioni costitutive dei resistori è possibile dimostrare che, per quanto riguarda le tensioni e le correnti ai terminali ( $i_A$ ,  $i_B$  e  $i_C$ ), è possibile sostituire tre resistori collegati a stella con tre resistori, di resistenza opportuna, collegati a triangolo e viceversa. La sostituzione va intesa nel senso che qualunque sia il sistema di tensioni applicate ai terminali A, B e C il sistema di correnti assorbito dai due carichi è lo stesso.

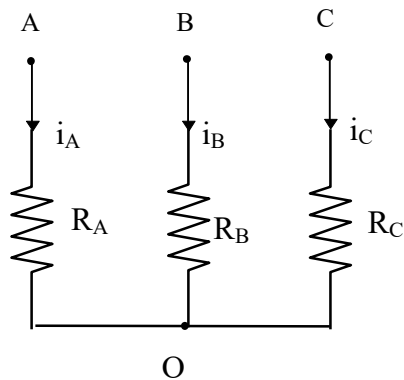


Figura 9

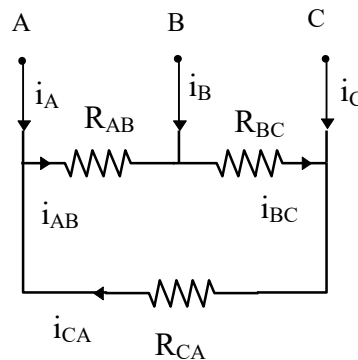


Figura 10

Con riferimento alle figure 9 e 10, le espressioni delle resistenze equivalenti per le trasformazioni stella-triangolo e triangolo-stella sono le seguenti dove è indicata con  $G$  la conduttanza, cioè l'inverso della resistenza  $R$ .

#### Trasformazione triangolo-stella

$$R_A = \frac{R_{AB} R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$$R_B = \frac{R_{BC} R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$$R_C = \frac{R_{CA} R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

#### Trasformazione stella-triangolo

$$G_{AB} = \frac{G_A G_B}{G_A + G_B + G_C}$$

$$G_{BC} = \frac{G_B G_C}{G_A + G_B + G_C}$$

$$G_{CA} = \frac{G_C G_A}{G_A + G_B + G_C}$$

### CIRCUITI NON CONNESSI

Tutti i circuiti visti sinora godono della *proprietà di connessione*, secondo la quale tutto il circuito è connesso elettricamente, e quindi per ogni coppia di nodi del circuito è possibile trovare un percorso che li connetta seguendo i rami del grafo. Consideriamo ora il caso in cui il circuito da studiare sia costituito da due o più sottoreti non connesse. Si consideri ad esempio il circuito di figura 19.a. Sostituendo al trasformatore ideale il suo circuito equivalente si ottiene la rete elettrica non connessa di figura 19.b. Dato che la rete non è connessa, non è possibile per ogni nodo del circuito trovare un percorso che, seguendo i rami del grafo, connetta tale nodo al nodo di riferimento. Analogamente, non è possibile definire un albero per l'intero circuito. I metodi di Tableau, delle tensioni di nodo e delle correnti di coalbero non sono quindi direttamente applicabili. Possiamo però applicare il metodo dell'eliminazione delle tensioni di nodo (in cui le variabili sono le tensioni e le correnti di ramo) ad ogni sottorete. In particolare, per il circuito di figura 19.b, la sottorete di sinistra (1) ha  $R_1 = 2$  rami e  $N_1 = 2$  nodi, e la sottorete di destra (2) ha  $R_2 = 2$  rami e  $N_2 = 2$  nodi.

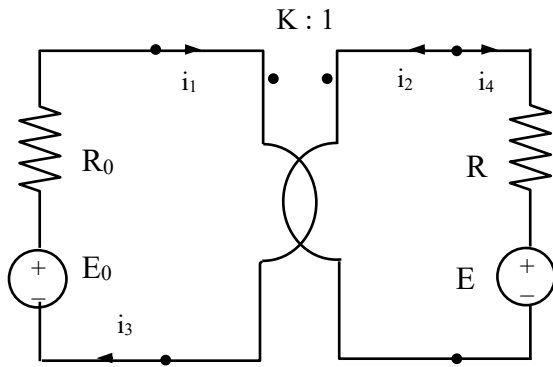


Figura 19.a

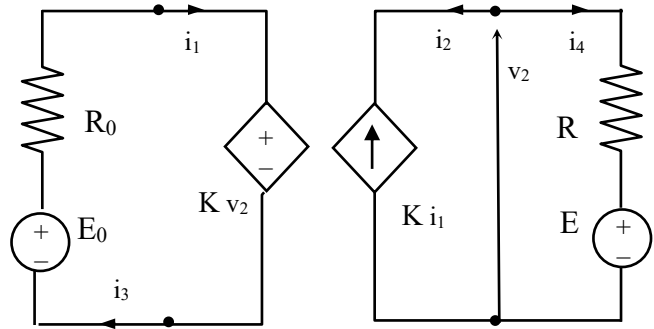


Figura 19.b

Le LKT<sub>m</sub>, le LKC<sub>n</sub> e le relazioni costitutive della sottorete di sinistra (1) costituiscono un sistema di  $2 R_1$  equazioni in cui compaiono le  $2 (R_1 + R_2)$  tensioni e le correnti di ramo di tutta la rete:

$$(R_1 - N_1 + 1 = 1 \text{ equazioni LKT}_m \text{ per la sottorete (1)}) \quad v_1 + v_3 = 0 \quad (22.i)$$

$$(N_1 - 1 = 1 \text{ equazioni LKC}_n \text{ per la sottorete (1)}) \quad i_1 - i_3 = 0 \quad (22.ii)$$

$$(R_1 = 2 \text{ caratteristiche dei componenti della sottorete (1)}) \quad \begin{aligned} v_1 &= K v_2 \\ v_3 &= -E_0 + R_0 i_3 \end{aligned} \quad (22.iii)$$

Le LKT<sub>m</sub>, le LKC<sub>n</sub> e le relazioni costitutive della sottorete di destra (2) costituiscono un sistema di  $2 R_2$  equazioni in cui compaiono le  $2 (R_1 + R_2)$  tensioni e le correnti di ramo di tutta la rete:

$$(R_2 - N_2 + 1 = 1 \text{ equazioni LKT}_m \text{ per la sottorete (2)}) \quad v_2 - v_4 = 0 \quad (23.i)$$

$$(N_2 - 1 = 1 \text{ equazioni LKC}_n \text{ per la sottorete (2)}) \quad i_2 + i_4 = 0 \quad (23.ii)$$

$$(R_2 = 2 \text{ caratteristiche dei componenti della sottorete (2)}) \quad \begin{aligned} i_2 &= -K i_1 \\ v_4 &= R i_4 + E \end{aligned} \quad (23.iii)$$

Pertanto, le (22), (23), costituiscono un sistema di  $2 (R_1 + R_2)$  equazioni in cui compaiono le  $2 (R_1 + R_2)$  tensioni e le correnti di ramo di tutta la rete. Analogamente quindi ai circuiti connessi, le LKT<sub>m</sub>, le LKC<sub>n</sub> (applicate ad ogni sottorete) e le relazioni costitutive costituiscono un sistema di  $2R$  equazioni, risolvendo il quale è possibile calcolare le  $2R$  incognite tensioni e correnti di ramo.<sup>(6)</sup>

La soluzione del sistema (22-23) è la seguente:

$$\begin{aligned} i_1 = i_3 &= \frac{E_0 - KE}{R_0 + K^2 R} & i_2 = -i_4 &= -K \frac{E_0 - KE}{R_0 + K^2 R} \\ v_1 = -v_3 &= K \frac{KRE_0 + R_0 E}{R_0 + K^2 R} & v_2 = v_4 &= \frac{KRE_0 + R_0 E}{R_0 + K^2 R} \end{aligned}$$

Supponendo, ad esempio, che i dati del problema siano:  $E_0 = 100 \text{ V}$ ,  $E = 12 \text{ V}$ ,  $K = 10 \text{ V}$ ,  $R_0 = 0.5 \Omega$ ,  $R = 0.1 \Omega$  si ottiene  $i_1 = -1.905 \text{ A}$ ,  $i_2 = 19.05 \text{ A}$ ,  $i_3 = -1.905 \text{ A}$ ,  $i_4 = -19.05 \text{ A}$ , ottiene  $v_1 = 100.9 \text{ A}$ ,  $v_2 = 10.09 \text{ A}$ ,  $v_3 = -100.9 \text{ A}$ ,  $v_4 = 10.09 \text{ A}$ .

<sup>(6)</sup> Si noti che è fondamentale applicare le Leggi di Kirchhoff ad ogni sottorete separatamente. In caso contrario, con riferimento alla figura 19.b, detti  $R = 4$  i rami del circuito e  $N = 4$  i nodi, si sarebbe tentati di scrivere sbagliando  $R - N + 1 = 1$  equazioni LKT<sub>m</sub> ed  $N - 1 = 3$  equazioni LKC<sub>n</sub>. Come si vede dalle (22) e (23) si sono applicate invece 2 equazioni LKT<sub>m</sub> ed 2 equazioni LKC<sub>n</sub>.

Dato che, come si è visto il metodo dell'eliminazione delle tensioni di nodo porta a scrivere un sistema di  $2R$  equazioni, è lecito chiedersi se non sia possibile, modificando la topologia del circuito, applicare i metodi delle tensioni di nodo e delle correnti di coalbero anche ai circuiti non connessi. A tale scopo, consideriamo il grafo di figura 20.a: in assenza di informazioni sui componenti presenti sui rami potremmo definire due riferimenti (più in generale, uno per ogni sottorete connessa). La difficoltà in tal caso è dovuta al fatto che, mentre per il primo riferimento (Ref 1) possiamo annullare la tensione del nodo corrispondente, per il secondo riferimento (Ref 2) la tensione del nodo corrispondente è incognita (rispetto al primo riferimento). Dal grafo di figura 20.a è inoltre chiaro che non c'è scambio di corrente tra le due sottoreti. Consideriamo ora il grafo di figura 20.b, in cui si è inserito il ramo 5 tra i nodi di riferimento delle due sottoreti (e dunque se ne è lasciato uno solo per tutta la rete). Il ramo 5 è un taglio fondamentale e dunque  $i_5 = 0$  (e non c'è scambio di corrente tra le due sottoreti).

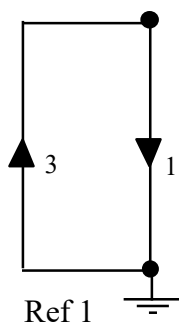


Figura 20.a

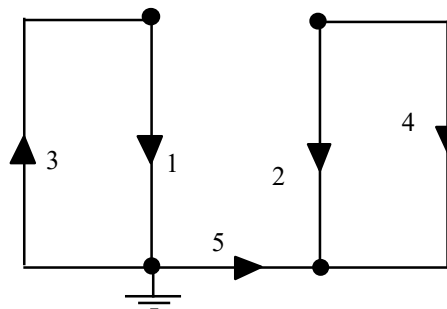


Figura 20.b

Il componente più opportuno da inserire sul ramo 5 dipende anche dalle informazioni disponibili: se si conosce (ed è un dato aggiuntivo) la tensione tra i due riferimenti ( $E_{Ref}$ ), è possibile inserire un generatore di tensione indipendente (come in figura 21.a). In caso contrario la tensione tra i riferimenti è incognita e possiamo inserire un cortocircuito (equivalente a supporre  $E_{Ref} = 0$ ) con l'avvertenza che la differenza tra potenziali di nodi appartenenti a due reti diverse non ha logicamente senso. In entrambi i casi il circuito è connesso e possiamo utilizzare ogni metodo già visto per la sua soluzione.

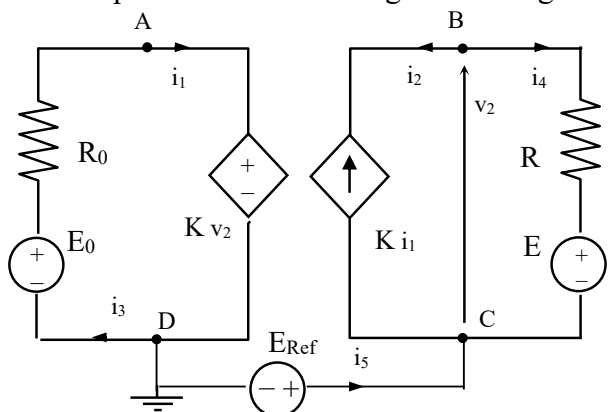


Figura 21.a

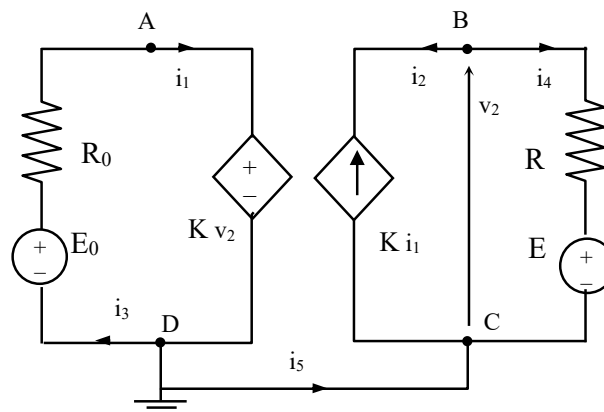


Figura 21.b

Con riferimento al circuito di figura 21.b, con  $R = 5$  rami ed  $N = 4$  nodi, si ha:

**Metodo dei Tagli Fondamentali** [albero = 1, 5, 2] (sistema di  $R - N + 1 + (\text{Numero di componenti non controllati in corrente}) = 4$  equazioni)

$$\begin{aligned}
 (R - N + 1 = 2 \text{ equazioni LKT}_m) \quad & -E_0 + R_0 i_1 + v_1 = 0 \\
 & -E + R i_2 + v_2 = 0
 \end{aligned} \tag{24.i}$$

(equazione costitutive dei componenti non controllati in corrente)

$$\begin{aligned}v_1 &= Kv_2 \\ i_2 &= -Ki_1\end{aligned}\quad (24.ii)$$

**Metodo dei potenziali di nodo** [ $e_D = 0$ ] (sistema di  $N - 1 +$  (Numero di componenti non controllati in tensione) = 6 equazioni)

( $N - 1 = 3$  equazioni LKC<sub>n</sub>)

$$\begin{aligned}\frac{E_0 - e_A}{R_0} - i_1 &= 0 \\ \frac{e_B - E}{R} + i_2 &= 0 \\ -\frac{e_B - E}{R} - i_2 - i_5 &= 0\end{aligned}\quad (25.i)$$

(equazioni costitutive dei componenti non controllati in tensione)

$$\begin{aligned}e_A &= Ke_B \\ i_2 &= -Ki_1 \\ e_C &= 0\end{aligned}\quad (25.ii)$$

La soluzione del sistema (25) è la seguente:

$$\begin{aligned}i_1 &= \frac{E_0 - KE}{R_0 + K^2R} & i_2 &= -K \frac{E_0 - KE}{R_0 + K^2R} & i_5 &= 0 \\ e_A &= K \frac{KRE_0 + R_0E}{R_0 + K^2R} & e_B &= \frac{KRE_0 + R_0E}{R_0 + K^2R} & e_C &= 0\end{aligned}$$

## CIRCUITI CON MEMORIA

Vengono detti circuiti con memoria quelli in cui è presente almeno un componente dotato di memoria; in questo caso il sistema risolvibile del circuito stesso è costituito da un sistema di equazioni non più algebriche, come nel caso dei circuiti senza memoria, ma, in generale integro-differenziali ed il valore di tutte le grandezze incognite in un generico istante può essere calcolato dalla conoscenza del valore delle grandezze impresse del circuito in tutto l'intervallo temporale precedente all'istante considerato, a partire da un istante iniziale in cui sono note le variabili di stato del sistema (quelle grandezze cui è associata una energia elettromagnetica immagazzinata nel circuito: tensione ai capi dei condensatori e corrente attraverso gli induttori). Tutti i metodi precedentemente descritti per il caso dei circuiti senza memoria, sono applicabili in questo caso, con le stesse ipotesi, compresi i teoremi di Thevenin e di Norton, la cui formulazione, infatti, non fa alcun riferimento alle caratteristiche di memoria del circuito, ma portano a scrivere un sistema di equazioni integro-differenziali. In particolare, per quanto riguarda l'analisi di Tableau, le equazioni costituite dalle LKC e LKT rimangono un sistema di equazioni algebriche lineari che viene però chiuso dalle equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono i termini integro-differenziali.

### Metodo delle equazioni di stato

Si consideri un circuito in cui gli unici componenti dotati di memoria siano induttori e condensatori, è possibile pervenire con un procedimento automatico ad un sistema risolvibile costituito da tante equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, quanti sono i condensatori e gli induttori presenti nel circuito, in cui le incognite sono le variabili di stato del circuito, e cioè le tensioni ai capi dei condensatori e le correnti attraverso gli induttori. Si consideri ad esempio il circuito illustrato nella figura 22.a. Le equazioni costitutive del condensatore e dell'induttore portano a scrivere le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{dv_C}{dt} &= \frac{i_C}{C} \\ \frac{di_L}{dt} &= \frac{v_L}{L} \end{aligned} \quad (26)$$

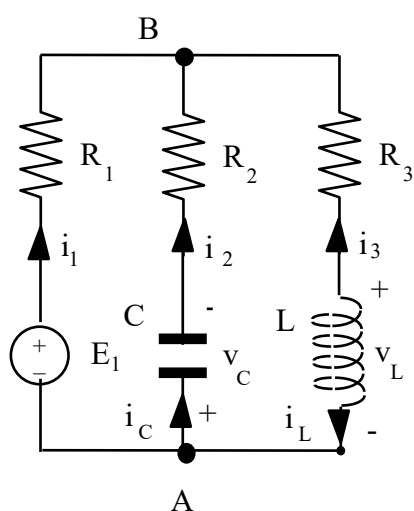


Figura 22.a

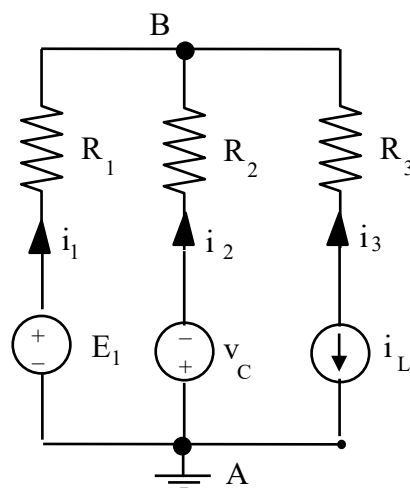


Figura 22.b

La corrente attraverso il condensatore  $i_C$  e la tensione ai capi dell'induttore  $v_L$  possono essere espresse in funzione delle variabili di stato  $v_C$  ed  $i_L$  risolvendo, con una qualsiasi delle metodologie già viste, il circuito privo di memoria illustrato nella figura 22.b, ottenuto dal circuito originale sostituendo l'induttore con un generatore di corrente con corrente impressa  $i_L$  ed il condensatore con un generatore di tensione con tensione impressa  $v_C$ .

La soluzione del circuito di figura 22.b può essere ottenuta mediante il metodo dell'analisi dei nodi, calcolando prima la tensione del nodo B rispetto al nodo A. In questo caso la formula di Millman è direttamente applicabile; il procedimento seguito per ottenere la formula di Millman porta a scrivere le seguenti relazioni:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \frac{E_1 - v_{BA}}{R_1} \\ i_2 &= \frac{-v_C - v_{BA}}{R_2} \\ i_3 &= -i_L \\ i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_{BA} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{v_C}{R_2} - i_L}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad (27)$$

È quindi possibile esprimere la corrente  $i_C$  e la tensione  $v_L$  in funzione delle variabili di stato del sistema (la (27) esprime infatti la tensione  $v_{BA}$  in funzione delle variabili di stato):

$$\begin{aligned} i_C &= \frac{-v_C - v_{BA}}{R_2} \\ v_L &= v_{BA} - R_3 i_L \end{aligned} \quad (28)$$

Supponendo, ad esempio, che i dati del problema siano:  $E_1 = 110 \text{ V}$ ,  $E_2 = 105 \text{ V}$ ,  $R_1 = 0.5 \text{ } \Omega$ ,  $R_2 = 0.5 \text{ } \Omega$ ,  $R_3 = 5 \text{ } \Omega$ ,  $C = 2 \times 10^{-4} \text{ F}$ ,  $L = 3 \times 10^{-3} \text{ H}$ , dalla (27) si ottiene:

$$v_{BA} = 55 - 0.5v_C - 0.25i_L \quad (29)$$

sostituendo la (29) nelle (28):

$$\begin{aligned} i_C &= -v_C + 0.5i_L - 110 \\ v_L &= -0.5v_C - 5.25i_L + 55 \end{aligned} \quad (30)$$

Infine, sostituendo le (30) nelle (26) si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{dv_C}{dt} &= \frac{-v_C + 0.5i_L - 110}{2 \cdot 10^{-4}} \\ \frac{di_L}{dt} &= \frac{-0.5v_C - 5.25i_L + 55}{3 \cdot 10^{-3}} \end{aligned} \quad (31)$$

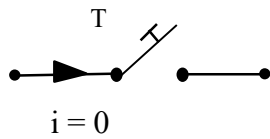
La soluzione del sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine (31) può essere ottenuta, eventualmente per via numerica, a partire dall'istante iniziale in cui sono noti i valori  $v_{C0}$  ed  $i_{L0}$  delle variabili di stato (condizioni iniziali):

$$\begin{aligned} v_C(0) &= v_{C0} \\ i_L(0) &= i_{L0} \end{aligned} \quad (32)$$

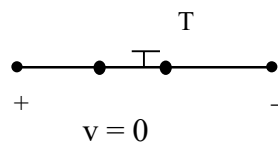
In generale si ha interesse a studiare circuiti in cui interviene una istantanea variazione della topologia, ossia circuiti in cui sono presenti interruttori ideali che si aprono e si chiudono istantaneamente. Quando l'interruttore ideale è aperto esso equivale ad un circuito aperto e quindi la corrente che lo attraversa è nulla ( $i = 0$ ). Viceversa quando l'interruttore è chiuso esso equivale ad un corto circuito e la tensione ai suoi capi è nulla ( $v = 0$ ).



### Interruttore aperto



### Interruttore chiuso



Interruttore ideale aperto e chiuso

L'interruzione o l'instaurarsi di una corrente elettrica in un interruttore "reale" è un fenomeno molto complesso che non avviene istantaneamente; avviene comunque in un tempo molto piccolo che può risultare trascurabile ai fini del transitorio che si vuole studiare, in questo caso è possibile descrivere il processo mediante l'interruttore ideale.

Per determinare l'evoluzione delle grandezze elettriche in circuiti con interruttori ideali, è necessario conoscere i valori delle variabili di stato nell'istante iniziale ( $t = 0$ ), ossia nell'istante in cui si modifica la topologia del circuito e inizia il transitorio. Si consideri ad esempio il circuito rappresentato nella figura 23 in cui è presente l'interruttore ideale T che si chiude istantaneamente all'istante  $t = 0$ .

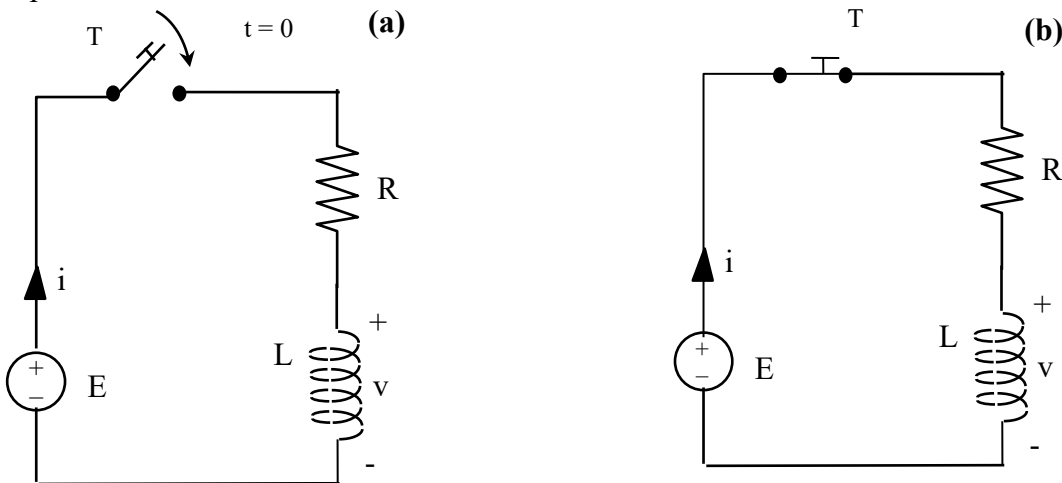


Figura 23 Circuito con interruttore ideale aperto (a) e chiuso (b)

All'istante  $t = 0^-$ , cioè un istante prima che l'interruttore si chiuda, il circuito si trova in regime stazionario; la corrente è nulla e quindi è nulla anche la tensione ai capi dell'induttore e del resistore. Un istante dopo che l'interruttore si è chiuso ( $t = 0^+$ ) le grandezze del circuito hanno in generale, essendo cambiata in maniera discontinua la topologia del circuito, valori diversi da quelli relativi all'istante  $t = 0^-$ . Ad esempio, la tensione ai capi della serie resistore induttore, nulla all'istante  $t = 0^-$  risulta pari ad E all'istante  $t = 0^+$ . Non risultano però cambiati i valori di quelle grandezze a cui è associata una energia del circuito, cioè le correnti degli induttori e le tensioni dei condensatori (le variabili di stato); nel caso specifico il valore della corrente  $i$  nullo all'istante  $t = 0^-$  risulta quindi nullo anche all'istante  $t = 0^+$ . Il **Postulato di Continuità dell'Energia** afferma infatti che **l'energia non può subire discontinuità nel tempo**. Una discontinuità dell'energia in un intervallo di tempo infinitesimo equivarrebbe, infatti, all'intervento di una sorgente di potenza infinita, il che non è fisicamente accettabile. Come conseguenza di tale postulato si deduce che i valori delle grandezze cui è associata una energia nel circuito sono funzioni continue del tempo e, in particolare, che:

- la *corrente* non può subire discontinuità in un ramo contenente un'induttanza;
- la *tensione* non può subire discontinuità in un ramo contenente un condensatore.

Questo consente di risolvere il circuito all'istante  $t = 0^+$  a partire dalla conoscenza dei valori delle variabili di stato (cioè tensione ai capi dei condensatori e corrente attraverso gli induttori) all'istante  $t = 0^-$  e quindi

permette di determinare le condizioni iniziali necessarie per risolvere il sistema di equazioni integro - differenziali che modella il circuito.

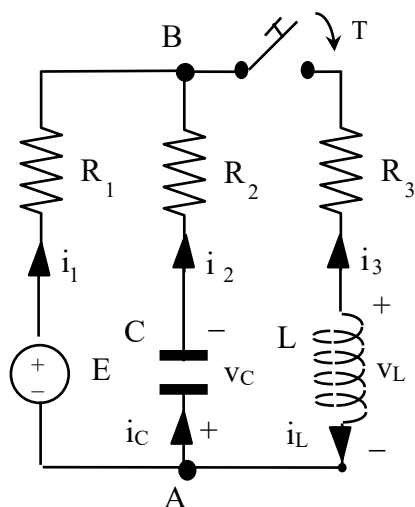


Figura 24.a

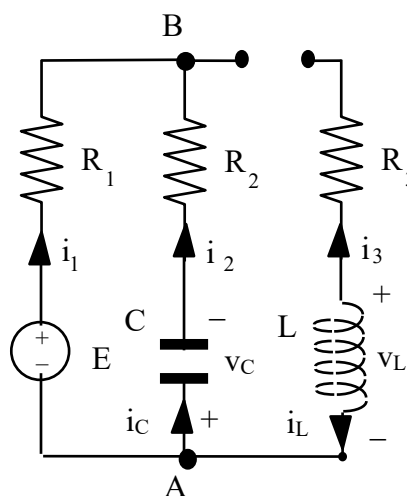


Figura 24.b - Schema circuitale per  $t < 0$

Si vuole ora studiare l'evoluzione delle grandezze elettriche nel circuito rappresentato in figura 22.a, nelle condizioni definite dalla chiusura dell'interruttore T, posizionato come illustrato in figura 24.a. Per calcolare le condizioni iniziali (cioè all'istante immediatamente successivo alla chiusura di T) è sufficiente dunque considerare il circuito di figura 24.b, cioè prima della chiusura dell'interruttore T ( $t < 0$ ). Infatti, è chiaro che  $i_L(0^-) = 0$ , visto che l'interruttore T è aperto, e che  $v_C(0^-) = -E$ , poiché il condensatore si comporta in continua come un circuito aperto. Utilizzando ora il postulato di continuità dell'energia è possibile affermare che  $i_L(0^+) = 0$  e che  $v_C(0^+) = -E$ . Il sistema (31) viene quindi completato dalle condizioni iniziali e può essere risolto:

$$\begin{cases} \frac{dv_C}{dt} = -5 \cdot 10^3 v_C + 2.5 \cdot 10^3 i_L - 5.5 \cdot 10^5 \\ \frac{di_L}{dt} = -1.66 \cdot 10^2 v_C - 1.75 \cdot 10^3 i_L + 1.826 \cdot 10^4 \\ v_C(0) = -1.1 \cdot 10^2, \quad i_L(0) = 0 \end{cases} \quad (33)$$

In forma vettoriale il sistema (33) si scrive come:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} v_C \\ i_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \cdot 10^3 & 2.5 \cdot 10^3 \\ -1.66 \cdot 10^2 & -1.75 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_C \\ i_L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -5.5 \cdot 10^5 \\ 1.826 \cdot 10^4 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} v_C \\ i_L \end{Bmatrix} (t=0) = \begin{Bmatrix} -1.1 \cdot 10^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (34)$$

Il sistema differenziale da risolvere utilizzando il metodo delle equazioni di stato è sempre simile al (34) e cioè, indicando con  $x$  il vettore delle variabili di stato, un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = [\mathbf{A}] \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (35)$$

L'integrale generale di un sistema di equazioni differenziali lineari come questo è la somma di un integrale particolare (soluzione di regime, se il regime esiste) e dell'integrale generale del sistema omogeneo associato (soluzione transitoria):  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{x}_0(t)$ . Se il termine noto è costante, per calcolare l'integrale particolare è sufficiente annullare le derivate e quindi risolvere il sistema  $[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{x}_p + \mathbf{b} = 0$ . Per quanto riguarda l'integrale generale del sistema omogeneo associato (cioè con  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ), esso va sempre cercato nella forma di un esponenziale reale o immaginario. La sostituzione dell'esponenziale  $e^{\lambda t}$  nel sistema omogeneo associato del (35) porta a scrivere l'equazione caratteristica  $\det[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}] = 0$  che permette di determinare, calcolando gli autovalori di  $[\mathbf{A}]$ , le costanti di tempo del sistema. L'analisi matematica approfondita di sistemi differenziali in questa forma esula dagli scopi di questa trattazione. In ogni caso il sistema (35) è solubile tramite svariati metodi ampiamente trattati in letteratura.

Gli autovalori di  $[\mathbf{A}]$  sono particolarmente rilevanti nello studio della stabilità delle reti (Un circuito si dice stabile se, sottoposto ad una eccitazione esterna di durata limitata, ha risposta che rimane limitata nel tempo dopo che la sollecitazione esterna ha finito di agire). Si può dimostrare infatti che un circuito è stabile se  $\Re(\lambda) \leq 0$ , per ogni  $\lambda$  autovalore di  $[\mathbf{A}]$ . In particolare, i circuiti lineari, tempo invarianti, contenenti solo elementi privi di memoria passivi ed elementi con memoria sono stabili.

Nel seguito vengono illustrati alcuni esempi di soluzione di circuiti con memoria. Il problema che si vuole risolvere è il seguente: assegnato il circuito elettrico e le grandezze impresse dei generatori indipendenti presenti, si vuole calcolare l'andamento temporale delle correnti di ramo e delle tensioni di ramo. Si suppone per semplicità che tutti i componenti siano dei bipoli, potendosi ricondurre all'ipotesi mediante l'introduzione di circuiti equivalenti dei componenti a più di due terminali.

Si consideri, ad esempio, il circuito in figura 23, che è un circuito del 1° ordine, cioè un circuito caratterizzato da un'equazione differenziale del primo ordine (cioè contenente un solo elemento con memoria). Applicando la Legge di Kirchhoff delle Tensioni (LKT) all'istante  $t = 0^+$  (cioè un istante dopo la chiusura dell'interruttore T), si ottiene:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E \quad (36)$$

L'integrale generale di una equazione differenziale lineare è la somma di un integrale particolare (soluzione di regime, se esiste il regime) e dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata (soluzione transitoria):  $i(t) = i_p(t) + i_0(t)$ . Se si assume che E sia costante, per calcolare l'integrale particolare è sufficiente annullare la derivata:  $i_p(t) = E/R$ . Per quanto riguarda l'integrale generale dell'equazione omogenea associata, esso va sempre cercato nella forma di un esponenziale reale o immaginario. La sostituzione dell'esponenziale  $e^{\lambda t}$  nella omogenea associata della (36) porta a scrivere l'equazione caratteristica:

$$L \lambda + R = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -R/L \quad \Rightarrow \quad i(t) = E/R + I e^{-Rt/L}$$

La determinazione della costante I può essere effettuata se è noto il valore iniziale:

$$i(0^+) = i_0 \quad (37)$$

Per calcolare il valore iniziale è sufficiente considerare il circuito di figura 23.a, cioè prima della chiusura dell'interruttore T ( $t < 0$ ). È evidente che  $i(0^-) = 0$ , visto che l'interruttore T è aperto. Utilizzando ora il postulato di continuità dell'energia è possibile affermare che  $i(0^+) = 0$ . Risulta quindi:

$$0 = E/R + I \quad \Rightarrow \quad I = -E/R$$

In conclusione, l'andamento temporale della corrente  $i$  è stato calcolato tramite la soluzione della seguente equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti con il valore iniziale di corrente nulla.

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + Ri = E \\ i(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (38)$$

Il parametro  $\tau = L/R$  è detto costante di tempo del circuito. La costante di tempo rappresenta l'intervallo di tempo necessario perché la risposta transitoria raggiunga il 63% del suo valore di regime. Dopo un tempo pari a  $5\tau$  la risposta transitoria supera il 99% del suo valore di regime. Dalla figura 25 emerge una interpretazione del parametro  $\tau$  che può essere assunto ad indicare la maggiore o minore "rapidità" del fenomeno transitorio.

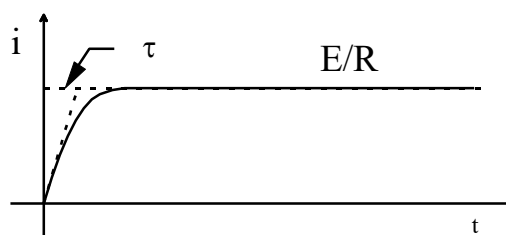


Figura 25

Si consideri ora il circuito rappresentato nella figura 26.a in cui è presente l'interruttore ideale  $T$  che si chiude istantaneamente all'istante  $t = 0$ . La LKT nel ramo considerato ha la forma:

$$E = Ri + v_C \Rightarrow i = \frac{E - v_C}{R}$$

ossia:

$$\begin{cases} C \frac{dv_C}{dt} = \frac{E - v_C}{R} \\ v_C(0) = v_{C,0} \end{cases} \quad (39)$$

ove  $v_{C,0}$  è il valore della tensione iniziale ai capi del condensatore (che si mantiene uguale a  $t = 0^-$  e a  $t = 0^+$  per il postulato di continuità dell'energia). Dalla (39) si ottiene la seguente equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti:

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{\tau} = \frac{E}{\tau} \Rightarrow v_C(t) = E + Ae^{-t/\tau} \quad (40)$$

dove  $\tau = RC$  è la costante di tempo del circuito. Per la determinazione della costante  $A$  si considera il valore iniziale e si scrive la (40) per  $t = 0^+$ :

$$v_C(0^+) = v_{C,0} = E + A \Rightarrow v_C(t) = E + (v_{C,0} - E)e^{-t/\tau} \Rightarrow i(t) = \frac{E - v_{C,0}}{R} e^{-t/\tau} \quad (41)$$

Il grafico della (41) è mostrato in figura 26.b. Si noti che anche in questo caso emerge una interpretazione del parametro  $\tau$  che può essere assunto ad indicare la maggiore o minore "rapidità" del fenomeno transitorio. In particolare, per  $t > 5\tau$  si può assumere che il transitorio sia esaurito e che si sia raggiunta la soluzione di regime (che in questo caso è  $i(t) = 0$ ).

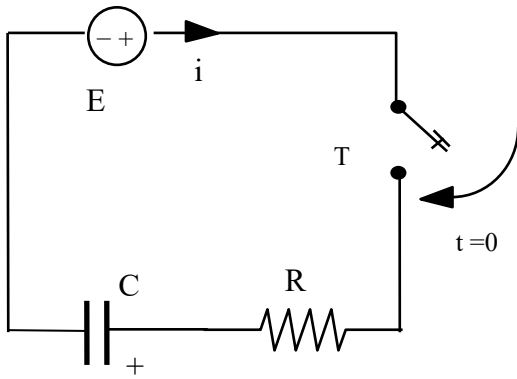


Figura 26.a

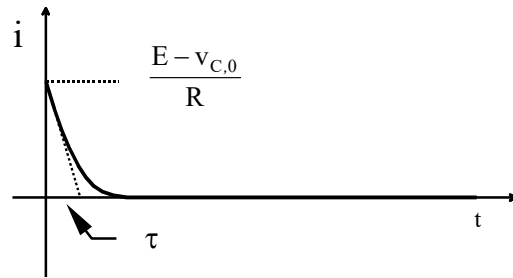


Figura 26.b

I circuiti contenenti componenti attivi (cioè in grado di erogare potenza) non sono necessariamente stabili. A titolo di esempio si consideri il circuito di figura 27, in cui l'interruttore T si chiude all'istante  $t = 0$  e si riapre all'istante  $t = t_0$ .

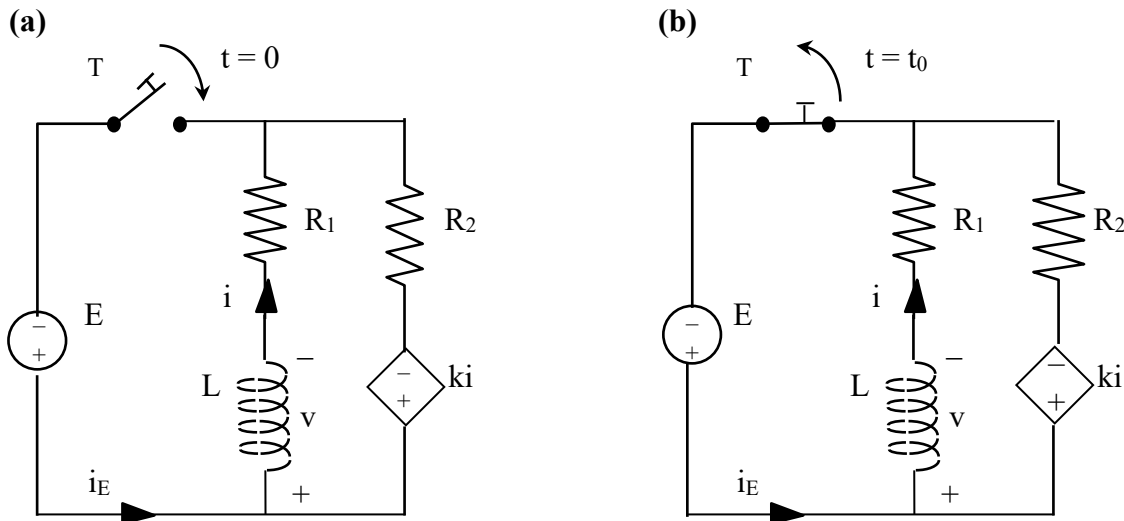


Figura 27

L'andamento temporale della corrente  $i$ , per  $0 \leq t \leq t_0$ , è calcolabile risolvendo il seguente sistema, con il valore iniziale di corrente nulla (supponendo che  $k \neq R_1 + R_2$ ).

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + R_1 i = E \\ i(0) = 0 \\ E + R_2 (i - i_E) - ki = 0 \end{cases} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R_1} \left( 1 - e^{-\frac{R_1}{L} t} \right) \quad (42)$$

L'andamento temporale della corrente  $i$ , per  $t \geq t_0$ , è calcolabile risolvendo il seguente sistema, con il valore iniziale di corrente  $i_0 = i(t = t_0)$ .

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + (R_1 + R_2 - k)i = 0 \\ i(t_0) = i_0 \end{cases} \Rightarrow i(t) = i_0 e^{\frac{k - R_1 - R_2}{L} (t - t_0)} \quad (43)$$

La (43) mostra che il circuito è stabile solo se  $k \leq R_1 + R_2$ . Nel caso contrario la corrente  $i$  cresce esponenzialmente. Pertanto, se il circuito di figura 27 rappresenta il modello un dispositivo fisico, al crescere della

i si raggiungeranno i limiti tecnologici del dispositivo (che si guasterà); oppure, se il circuito di figura 27 rappresenta il modello un dispositivo fisico solo in un certo regime di funzionamento, al crescere della  $i$  si raggiungeranno i limiti del modello e sarà necessario modificare la struttura del circuito.

Come caso limite di stabilità, si consideri il circuito illustrato in figura 28. Per  $t < 0$ , si ha:  $i = i_L = E/R$ ,  $i_C = 0$ ,  $v_L = v_C = 0$ . Dopo l'apertura dell'interruttore T, per  $t > 0$ , il circuito è costituito dal parallelo dell'induttore con il condensatore. Pertanto, il sistema risolvibile è dato da:

$$\begin{aligned} \frac{dv_C}{dt} &= \frac{i_C}{C} = \frac{i_L}{C} \\ \frac{di_L}{dt} &= \frac{v_L}{L} = -\frac{v_C}{L} \end{aligned} \quad (44)$$

con le condizioni iniziali  $v_C(0) = 0$ ,  $i_L(0) = E/R$ .

Sostituendo la prima delle (44) nella seconda e cercando una soluzione nella forma di un esponenziale reale o immaginario ( $e^{\lambda t}$ ) si ottiene la relazione  $\lambda^2 + 1/LC = 0$ . Posto  $\omega_0^2 = 1/LC$ , si ottengono le due radici, puramente immaginarie,  $\lambda = \pm j \omega_0$ .<sup>(6)</sup> Si noti quindi che  $\Re(\lambda) = 0$  e le soluzioni del problema non tendono a zero, nè divergono, ma sono oscillanti:

$$i_L(t) = \frac{E}{R} \cos(\omega_0 t) \quad , \quad v_C(t) = \frac{E}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \sin(\omega_0 t)$$

Nel circuito si instaurerà quindi un regime sinusoidale permanente.

### Regime di corrente alternata

Si può dimostrare che sotto alcune deboli ipotesi di stabilità del circuito, se il circuito è lineare e le eccitazioni presenti sono funzioni sinusoidali isofrequenziali del tempo, dopo un transitorio di durata dipendente dai parametri del circuito stesso, si raggiunge una soluzione di regime in cui tutte le grandezze del circuito sono funzioni sinusoidali isofrequenziali, con frequenza pari a quella dei generatori. Per calcolare la soluzione di regime, si può applicare il metodo simbolico che considera le grandezze e le equazioni del circuito trasformate mediante la trasformata di Steinmetz e perviene ad un sistema risolutivo algebrico nello spazio dei numeri complessi. Il sistema risolvibile si può ottenere sostituendo i condensatori e gli induttori con dei "resistori" con resistenza complessa (impedenza). Per la descrizione dettagliata del metodo si rimanda ai capitoli successivi. Per la soluzione del circuito simbolico sopramenzionato si applicano tutti i metodi precedentemente visti per i circuiti privi di memoria.

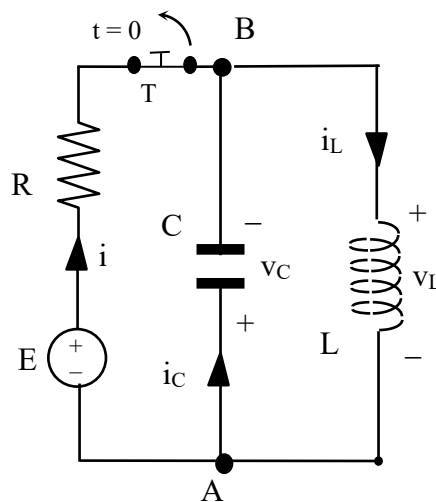


Figura 28

<sup>(6)</sup> Al fine di evitare possibili fraintendimenti, a differenza di quanto accade usualmente, è consuetudine in elettrotecnica indicare con la lettera "j" l'unità immaginaria ( $j^2 = -1$ ), riservando il simbolo "i" per le correnti.

## GRANDEZZE PERIODICHE

### INTRODUZIONE

Una grandezza tempodipendente  $a(t)$  si definisce **periodica** quando ad uguali intervalli  $T$  assume valori uguali, cioè quando vale la relazione (con  $n$  intero qualsiasi):

$$a(t) = a(t + nT) \quad (1)$$

- Il tempo  $T$  si definisce **periodo**;

- La grandezza  $f = 1/T$ , che rappresenta il numero di periodi contenuti nell'unità di tempo, si definisce **frequenza**. La frequenza si misura in Hertz [Hz] (periodi/secondo);

- Si definisce **valore medio** di  $a(t)$  la media di  $a(t)$  eseguita sul periodo  $T$ :

$$A_m = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a(t) dt \quad (2)$$

- Si definisce **valore efficace** di  $a(t)$  la radice quadrata della media dei quadrati dei valori istantanei di  $a(t)$  eseguita su un periodo  $T$ :

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a^2(t) dt} \quad (3)$$

- Una grandezza periodica si definisce **alternata** quando il suo valore medio è nullo;

### GRANDEZZE SINUSOIDALI

Una grandezza alternata del tipo:

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha) \quad (4)$$

si dice **sinusoidale**.

- La grandezza  $A_M$  che compare nella (4) è detta **ampiezza**, ed è pari al valore massimo di  $a(t)$ ;

- La grandezza  $\omega$  è detta **pulsazione**, ha le dimensioni di una velocità angolare (radianti/secondo) ed è pari a  $2\pi/T$ ;

- La grandezza  $\alpha$  è detta **fase**. La fase dipende dal valore che  $a(t)$  assume all'istante  $t = 0$ .

Il valore medio di una grandezza sinusoidale è pari a zero (per ogni valore di  $A_M$  e  $\alpha$ ).

Il valore efficace di una grandezza sinusoidale è pari a:

$$A = \sqrt{\frac{A_M^2}{T} \int_t^{t+T} \cos^2(\omega t) dt} = \frac{A_M}{\sqrt{2}} \cong 0.707 A_M \quad (5)$$

Una grandezza sinusoidale è quindi completamente definita da tre parametri:

- 1) L'ampiezza  $A_M$ , o il valore efficace,  $A$ .
- 2) La pulsazione  $\omega$ , o la frequenza  $f$ , o il periodo  $T$ .
- 3) La fase  $\alpha$ , o la differenza di fase con un'altra grandezza sinusoidale nota di uguale pulsazione.

Siano  $a(t)$  e  $b(t)$  due grandezze sinusoidali isofrequenziali (vedi figura 1):

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha_a)$$

$$b(t) = B_M \cos(\omega t + \alpha_b)$$

Si definisce **differenza di fase** tra  $a$  e  $b$  l'angolo

$$\phi = \alpha_a - \alpha_b$$

L'angolo  $\phi$  è chiaramente indipendente dall'istante iniziale di riferimento.

- Se  $\phi = 0$ ,  $a(t)$  e  $b(t)$  si dicono in **fase** (vedi figura 2.a);
- Se  $\phi > 0$ ,  $a(t)$  è in **anticipo di fase** rispetto a  $b(t)$ , che è a sua volta in **ritardo di fase** rispetto ad  $a(t)$ . Se  $\phi < 0$  la situazione si inverte;
- Se  $\phi = \pm \pi$ ,  $a(t)$  e  $b(t)$  si dicono in **opposizione** (vedi figura 2.b);
- Se  $\phi = \pm \pi/2$ ,  $a(t)$  e  $b(t)$  si dicono in **quadratura** (vedi figura 2.c).

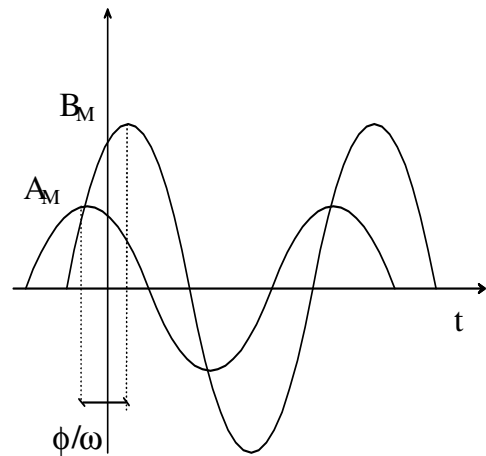


Figura 1. -  $a(t)$  è in anticipo rispetto a  $b(t)$ .

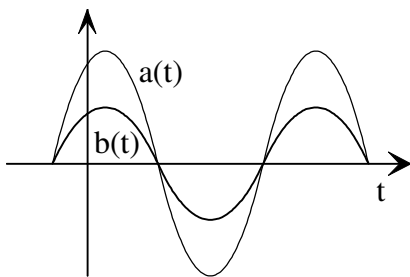


Figura 2.a -  $a(t)$  e  $b(t)$  sono in fase.

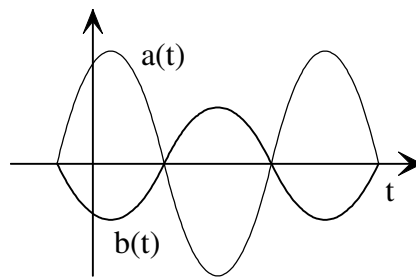


Figura 2.b -  $a(t)$  e  $b(t)$  sono in opposizione.

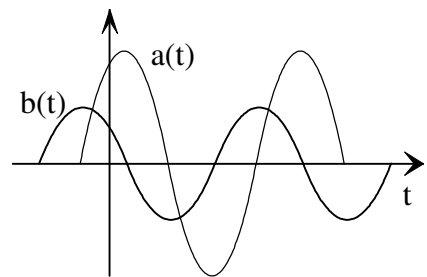


Figura 2.c -  $a(t)$  e  $b(t)$  sono in quadratura.

### OPERAZIONI SU GRANDEZZE SINUSOIDALI

Il **prodotto** di una grandezza sinusoidale

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha)$$

per uno scalare  $m$  è una grandezza sinusoidale  $c(t)$  con ampiezza pari a  $mA_M$ , con pulsazione  $\omega$ , e con fase pari a  $\alpha$  ( $c(t)$  e  $a(t)$  in fase) se  $m > 0$ , o a  $\alpha + \pi$  ( $c(t)$  e  $a(t)$  in opposizione) se  $m < 0$ .

La **somma di due grandezze sinusoidali** isofrequenziali è ancora una grandezza isofrequenziale. Si ha infatti:

$$A_M \cos(\omega t + \alpha_a) + B_M \cos(\omega t + \alpha_b) = C_M \cos(\omega t + \alpha_c) \quad (6)$$

dove:

$$C_M = \sqrt{A_M^2 + B_M^2 + 2A_M B_M \cos(\alpha_a - \alpha_b)}; \quad \alpha_c = \arctg\left(\frac{A_M \sin \alpha_a + B_M \sin \alpha_b}{A_M \cos \alpha_a + B_M \cos \alpha_b}\right)$$



La **derivata** di una grandezza sinusoidale  $a(t)$  è pari a:

$$\frac{d}{dt} [A_M \cos(\omega t + \alpha)] = -\omega A_M \sin(\omega t + \alpha) = \omega A_M \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad (7)$$

La derivata di  $a(t)$  è quindi una grandezza sinusoidale di pulsazione  $\omega$  con ampiezza pari a  $\omega A_M$  e con un anticipo di fase pari a  $\pi/2$  (quindi in quadratura anticipo).

### **RAPPRESENTAZIONE DI GRANDEZZE SINUSOIDALI CON I NUMERI COMPLESSI (TRASFORMATA DI STEINMETZ)**

Si riporta la formula di Eulero:

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x) \quad (8)$$

da cui:

$$\cos(x) = \Re [e^{jx}] \quad (9)$$

dove con  $\Re$  si indica l'operatore "parte reale". La grandezza sinusoidale:

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha) = \Re [A_M e^{j(\omega t + \alpha)}] = \Re [\sqrt{2} A e^{j\omega t} e^{j\alpha}] \quad (10)$$

può essere quindi interpretata come componente reale di un opportuno numero complesso. Ponendo:

$$\underline{A} = A e^{j\alpha} = \frac{A_M}{\sqrt{2}} e^{j\alpha} \quad (11)$$

Il numero complesso  $\underline{A}$ , detto **fasore**, individua univocamente la grandezza sinusoidale  $a(t)$ . La (10) definisce quindi una corrispondenza biunivoca tra grandezze sinusoidali e numeri complessi (trasformata di Steinmetz). Il numero complesso  $\underline{A}$  può essere scritto nella forma:

$$\underline{A} = M + j N$$

dove  $M$  ed  $N$  sono la componente reale ed immaginaria di  $\underline{A}$  (vedi figura 3); modulo e fase sono dunque:

$$|\underline{A}| = \sqrt{M^2 + N^2}$$

$$\alpha = \begin{cases} \arctg\left(\frac{N}{M}\right), & \text{se } M > 0 \\ \pi + \arctg\left(\frac{N}{M}\right), & \text{se } M < 0 \end{cases}$$

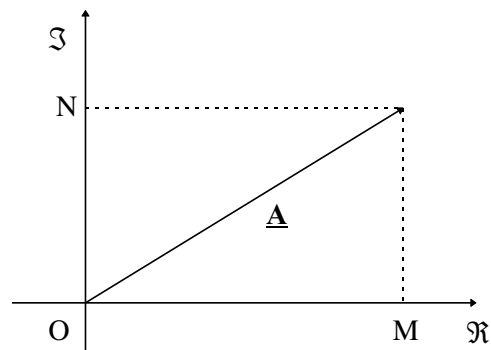


Figura 3.

#### • Operazioni con il metodo simbolico

- **SOMMA:** Date due grandezze sinusoidali rappresentate dai numeri complessi  $\underline{A}e^{j\omega t} = (M_1 + j N_1)e^{j\omega t}$  e  $\underline{B}e^{j\omega t} = (M_2 + j N_2)e^{j\omega t}$  è facile verificare la grandezza sinusoidale  $a(t) + b(t)$  è rappresentata da un numero complesso  $\underline{C}e^{j\omega t}$ , dove:

$$\underline{C} = (M_1 + M_2) + j (N_1 + N_2)$$

$$\underline{C} = \underline{A} + \underline{B}$$

- **PRODOTTO PER UN NUMERO REALE:** Data una grandezza sinusoidale  $a(t)$  rappresentata dal numero complesso  $\underline{A}e^{j\omega t}$  ed un numero reale  $m$ , si verifica immediatamente che il numero complesso  $\underline{C}e^{j\omega t}$  che rappresenta il prodotto  $m a(t)$  è tale che:

$$\underline{C} = m \underline{A}$$

- Prodotto per il numero immaginario puro  $j$ :

Data una grandezza sinusoidale  $a(t)$  rappresentata dal numero complesso  $\underline{A} e^{j\omega t}$  e tenendo conto che  $j = e^{j\pi/2}$ , si ha che:

$$j \underline{A} e^{j\omega t} = A e^{j(\alpha + \pi/2)} e^{j\omega t}$$

Sul piano di Gauss,  $\underline{A} e^{j\omega t}$  moltiplicato per  $j$  viene ruotato di  $\pi/2$  nel senso positivo di rotazione come mostrato in figura 4.

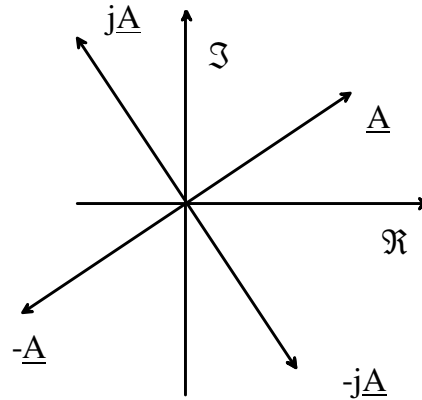


Figura 4.

- DERIVAZIONE: La derivata di  $\underline{A} e^{j\omega t}$  è pari a  $\underline{D} e^{j\omega t}$ . Infatti:

$$\frac{d}{dt}(\underline{A} e^{j\omega t}) = j\omega \underline{A} e^{j\omega t}, \text{ dove: } \underline{D} = j\omega \underline{A}$$

Sul piano complesso quindi la derivata di  $\underline{A} e^{j\omega t}$  è rappresentata da un vettore di modulo pari a  $\omega A$  e ruotato rispetto a  $\underline{A} e^{j\omega t}$  di un angolo pari a  $\pi/2$  in senso positivo.

### RAPPRESENTAZIONE SIMBOLICA DI GRANDEZZE SINUSOIDALI ISOFREQUENZIALI

In modo del tutto equivalente a quanto è stato fatto per i fasori, nella rappresentazione simbolica di più grandezze sinusoidali isofrequenziali è lecito omettere il fattore rotante  $e^{j\omega t}$ , poiché generalmente interessa conoscere la posizione reciproca dei vettori rappresentativi. Una qualsiasi grandezza sinusoidale:

$$a(t) = \sqrt{2}A \cos(\omega t + \alpha)$$

può quindi essere rappresentata dal numero complesso:

$$\underline{A} = A e^{j\alpha}$$

In ogni problema, si può assumere una grandezza sinusoidale arbitraria come riferimento di fase, ponendo il suo angolo di fase pari a 0. In tal modo, la grandezza assunta come riferimento di fase sarà rappresentata da un numero reale puro. Quanto detto finora ci permette di esprimere le seguenti corrispondenze:

$$\begin{array}{ll} a(t) \Leftrightarrow \underline{A} & a(t) + b(t) \Leftrightarrow \underline{A} + \underline{B} \\ \frac{da}{dt} \Leftrightarrow j\omega \underline{A} & m a(t) \Leftrightarrow m \underline{A} \\ \frac{d^2 a}{dt^2} \Leftrightarrow -\omega^2 \underline{A} & \int_{-\infty}^t a(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{\underline{A}}{j\omega} \end{array}$$

#### • Complesso coniugato

Dato un numero complesso  $\underline{A} = A e^{j\alpha}$ , si definisce “complesso coniugato di  $\underline{A}$ ” il numero  $\underline{A}^*$ , avente modulo uguale e fase opposta:

$$\underline{A}^* = A e^{-j\alpha} \quad (12)$$

Si verifica facilmente che il prodotto di un numero complesso per il suo coniugato è pari al quadrato del modulo:

$$\underline{A} \underline{A}^* = A^2 \quad (13)$$

# CIRCUITI IN REGIME SINUSOIDALE PERMANENTE

## METODO SIMBOLICO PER LA SOLUZIONE DI CIRCUITI LINEARI IN CORRENTE ALTERNATA

In figura 1 è illustrato lo schema generalmente utilizzato per determinare la soluzione di regime di circuiti lineari in corrente alternata (c.a.). Il metodo consiste nel trasformare il sistema di equazioni differenziali per i valori istantanei delle tensioni e delle correnti in un sistema algebrico di più agevole soluzione.

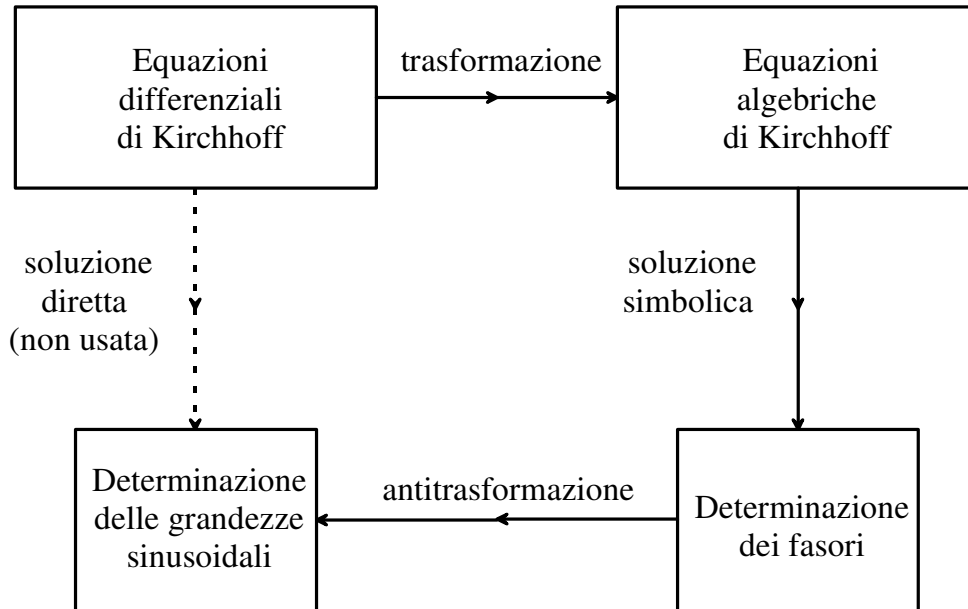


Figura 1. - Schema di risoluzione di circuiti in c.a.

Una volta scritte le equazioni di Kirchhoff ai valori istantanei, il metodo prevede tre passi:

- 1) Trasformazione delle equazioni di Kirchhoff differenziali in equazioni di Kirchhoff simboliche (algebriche). Come si vedrà tra breve, l'operazione di trasformazione permette di risolvere il circuito con i metodi visti per la soluzione dei circuiti in corrente continua.
- 2) Risoluzione delle equazioni simboliche e determinazione dei numeri complessi rappresentativi delle varie incognite.
- 3) Determinazione delle correnti e delle tensioni istantanee a partire dalle grandezze simboliche che le rappresentano. Quest'ultima fase è del tutto immediata, tanto che viene normalmente sottintesa.

### TRASFORMAZIONE DELLE EQUAZIONI DI KIRCHHOFF DIFFERENZIALI IN EQUAZIONI ALGEBRICHE (LEGGE DI OHM SIMBOLICA)

Si consideri un generico ramo di circuito, caratterizzato da una resistenza  $R$ , un'induttanza  $L$  e una capacità  $C$ . Il ramo è alimentato da una tensione  $v(t)$  sinusoidale (vedi figura 2):

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \alpha_v)$$

dove i valori  $V_M$  e  $\alpha_v$  sono da considerarsi noti. La legge di Ohm per i valori istantanei nel ramo considerato ha la forma:

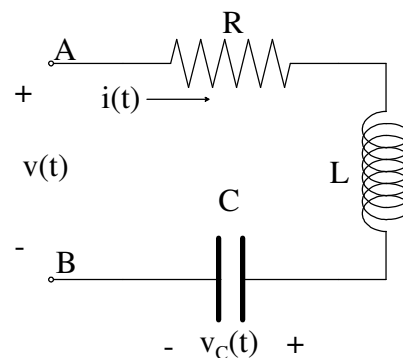


Figura 2.

$v(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt}(t) + v_c(t)$ . Derivando una volta rispetto al tempo e considerando che

$\frac{dv_c}{dt} = \frac{i(t)}{C}$ , si ottiene:

$$R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

La soluzione della (1) è costituita dalla somma dell'integrale dell'equazione omogenea associata e di un integrale particolare. E' possibile dimostrare che l'integrale dell'equazione omogenea associata costituisce una componente transitoria della corrente, che tende ad zero all'aumentare del tempo. L'integrale particolare rappresenta quindi la soluzione di regime. Per determinare la soluzione di regime che soddisfa la (1) si cerca una corrente  $i(t)$  che soddisfi la (1) e che abbia un andamento sinusoidale con la stessa pulsazione di  $v(t)$ :

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \alpha_1)$$

Ricordando quanto detto riguardo alla corrispondenza tra grandezze sinusoidali e numeri complessi, la (1) si può riscrivere come segue:

$$\Re \left[ -\omega^2 L \sqrt{2} \underline{I} e^{j\omega t} \right] + \Re \left[ j\omega R \sqrt{2} \underline{I} e^{j\omega t} \right] + \Re \left[ \frac{1}{C} \sqrt{2} \underline{I} e^{j\omega t} \right] = \Re \left[ j\omega \sqrt{2} \underline{V} e^{j\omega t} \right]$$

con:

$$\underline{I} = I e^{j\alpha_1}, \quad \underline{V} = V e^{j\alpha_v}$$

da cui:

$$\Re \left[ \left( -\omega^2 L + j\omega R + \frac{1}{C} \right) \sqrt{2} \underline{I} e^{j\omega t} \right] = \Re \left[ j\omega \sqrt{2} \underline{V} e^{j\omega t} \right] \quad (2)$$

La (2) può essere interpretata come una relazione di uguaglianza tra due grandezze sinusoidali con identica pulsazione. Per la già citata corrispondenza biunivoca esistente tra grandezze sinusoidali isofrequenziali e numeri complessi, devono risultare uguali i numeri complessi che rappresentano le due grandezze al primo e secondo membro della (2). Si ha quindi:

$$\left( -\omega^2 L + j\omega R + \frac{1}{C} \right) \underline{I} = j\omega \underline{V}$$

da cui:

$$\left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \underline{I} = \underline{V} \quad (3)$$

La grandezza:

$$\underline{Z} = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (4)$$

viene detta **impedenza** del ramo AB considerato. Si definisce quindi impedenza  $\underline{Z}$  un operatore complesso uguale al rapporto fra i numeri complessi associati alla tensione e alla corrente:  $\underline{Z} = \underline{V} / \underline{I}$ . Tenendo conto della (4) e della definizione data, la (3) diventa:

$$\underline{V} = \underline{Z} \underline{I} \quad (5)$$

La (5) viene detta **equazione di Ohm simbolica**.

La definizione di impedenza (4) può essere riscritta come:

$$\underline{Z} = R + j X \quad (6)$$

avendo posto:

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (7)$$

La grandezza  $X$  è detta **reattanza** del ramo, e costituisce la parte immaginaria dell'impedenza. La reattanza dipende dalla capacità e dall'induttanza del ramo, e dalla pulsazione  $\omega$  di alimentazione. La reattanza viene distinta in reattanza induttiva  $X_L$  e capacitiva  $X_C$  secondo il seguente schema:

$$X_L = \omega L \qquad X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

$$X = X_L + X_C$$

L'inverso dell'impedenza viene definito **ammettenza**:

$$\underline{Y} = 1/\underline{Z} \quad (8)$$

In base alla legge di Ohm simbolica, si ha:

$$\underline{I} = \underline{Y} \underline{V} \quad (9)$$

da cui si ricava che  $\underline{I}$  è un numero complesso di modulo:

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

L'argomento di  $\underline{Z}$  determina lo sfasamento ( $\varphi$ ) tra il fasore della tensione ed il fasore della corrente. Risulta infatti:

$$\varphi = \arg[\underline{V}] - \arg[\underline{I}] = \alpha_V - \alpha_I = \arg[\underline{Z}] = \text{Arctg} \frac{X}{R}$$

Lo sfasamento  $\varphi$  è positivo quando  $\alpha_V > \alpha_I$ , cioè quando la tensione è in anticipo rispetto alla corrente. Si noti che, essendo la resistenza  $R$  positiva o nulla, risulta  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ . Infine è possibile determinare  $i(t)$ :

$$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + X^2}} \cos\left(\omega t + \alpha_V - \text{Arctg} \frac{X}{R}\right)$$

### TRASFORMAZIONE SIMBOLICA DELLE EQUAZIONI DI KIRCHHOFF

Sia dato un circuito caratterizzato da  $R$  rami ed  $N$  nodi. Per ciascun ramo si assumano versi positivi per la tensione di ramo e la corrente di ramo associati secondo la scelta dell'utilizzatore. Preso arbitrariamente un nodo come nodo di riferimento del circuito, la LKT permette di scrivere  $R$  relazioni linearmente indipendenti tra tensioni di ramo e tensioni di nodo che, in forma matriciale, assumono la forma:

$$\mathbf{v} = \mathbf{M} \mathbf{e}$$

dove  $\mathbf{v}$  è il vettore delle tensioni di ramo,  $\mathbf{e}$  è il vettore delle tensioni di nodo ed  $\mathbf{M}$  è una matrice avente  $R$  righe ed  $(N - 1)$  colonne, il cui generico elemento  $M_{hk}$  risulta nullo se il ramo  $h$  non è collegato al nodo  $k$ , uguale a  $+1$  se la corrente del ramo  $h$  esce dal nodo  $k$ ,  $-1$  se la corrente del ramo  $h$  entra nel nodo  $k$ .

La LKC applicata a tutti i nodi tranne quello di riferimento permette di scrivere  $(N - 1)$  equazioni che in forma matriciale assumono la forma:

$$\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

dove  $\mathbf{i}$  è il vettore delle correnti di ramo ed  $\mathbf{A}$  è una matrice, chiamata matrice di incidenza ridotta, avente  $(N - 1)$  righe ed  $R$  colonne, il cui generico elemento  $A_{hk}$  risulta nullo se il ramo  $k$  non è col-

legato al nodo  $h$ , uguale a  $+1$  se la corrente del ramo  $k$  esce dal nodo  $h$ ,  $-1$  se la corrente del ramo  $k$  entra nel nodo  $h$ . Risulta quindi che  $\mathbf{M}$  è la trasposta di  $\mathbf{A}$ , cioè:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^T$$

È possibile trasformare le equazioni di Kirchhoff ai valori istantanei con un procedimento del tutto analogo a quello seguito per ricavare la legge di Ohm simbolica. Mediante tale trasformazione si perviene alle seguenti relazioni:

$$\underline{\mathbf{V}} = \mathbf{A}^T \underline{\mathbf{E}} \quad (10)$$

$$\mathbf{A} \underline{\mathbf{I}} = \mathbf{0} \quad (11)$$

dove  $\underline{\mathbf{V}}$  è il vettore dei numeri complessi associati alle tensioni di ramo,  $\underline{\mathbf{E}}$  è il vettore dei numeri complessi associati alle tensioni di nodo e  $\underline{\mathbf{I}}$  è il vettore dei numeri complessi associati alle correnti di ramo.

Le Leggi di Kirchhoff (delle Tensioni e delle Correnti) ci permettono di scrivere delle equazioni che descrivono la topologia del circuito, ovvero il modo in cui i componenti sono connessi tra loro:

- La Legge di Kirchhoff delle Correnti (*LKC*) afferma che la somma algebrica dei numeri complessi associati alle correnti in un nodo è nulla.

- Equazione simbolica per un nodo ( $LKC_n$ ): 
$$\sum_{r=1}^n \underline{I}_r = 0 \quad (12.a)$$

- La Legge di Kirchhoff delle Tensioni (*LKT*) può essere formulata in due modi equivalenti tra loro:

- La somma algebrica dei numeri complessi associati alle tensioni di ramo sui rami di una maglia è nulla;

- Equazione simbolica per una maglia ( $LKT_m$ ): 
$$\sum_{r=1}^m \underline{V}_r = 0 \quad (12.b)$$

- Ogni numero complesso associato ad una tensione di ramo è dato dalla differenza dei numeri complessi associati ai potenziali di nodo dei suoi terminali.

- Equazione simbolica per un ramo ( $LKT_r$ ): 
$$\underline{V}_{AB} = \underline{E}_A - \underline{E}_B \quad (12.c)$$

Le (12) sono formalmente identiche alle leggi di Kirchhoff per circuiti in regime di corrente continua salvo il fatto che in luogo delle grandezze effettive compaiono i numeri complessi che le rappresentano ed in luogo delle resistenze le impedenze. Questa constatazione permette di affermare che la tecnica risolutiva dei circuiti in regime sinusoidale resta la stessa vista per i circuiti in continua salvo l'impiego dei numeri complessi. Valgono, inoltre, tutti i teoremi sulle reti in continua (Teoremi di Thevenin, di Norton, di Millman, di Tellegen, etc.). Quanto detto mostra anche come non sia necessario, ogni volta che si risolve un circuito, procedere alla "trasformazione" delle equazioni differenziali in simboliche, potendosi scrivere direttamente queste ultime tramite le (12). In definitiva quindi l'operazione di trasformazione è di regola omessa. Anche l'operazione di antitrasformazione si può di solito sottintendere essendo del tutto ovvio il passaggio dai numeri complessi alle grandezze sinusoidali che essi rappresentano. Tale passaggio infatti implica semplicemente che si prendano modulo e argomento del numero complesso e si identifichino con l'ampiezza e la fase della grandezza sinusoidale.

È da notare che una qualsiasi delle correnti o tensioni incognite del problema può essere presa come grandezza di riferimento per gli angoli di fase, cioè è possibile porre uguale a zero la sua fase. Ciò equivale infatti a scegliere una opportuna origine dei tempi.

- **Esempio 1:** I circuiti costituiti da una sola maglia si risolvono tramite la (5), che può scriversi, separando il calcolo del modulo  $I$  e dell'argomento  $\alpha_i$ :

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} ;$$

$$\alpha_I = \alpha_V - \varphi \quad ; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

• **Esempio 2:** Tutti i metodi illustrati precedentemente sono generalmente applicabili. A titolo di esempio si consideri il circuito illustrato nella figura 3.a, in cui si intende calcolare la corrente circolante sul condensatore C. Sia D il nodo di riferimento. Non sono stati indicati i versi positivi delle tensioni di ramo, perché si suppone di considerare comunque versi di riferimento associati con la regola dell'utilizzatore per tensioni e correnti di ramo. Il circuito è costituito da  $R = 6$  rami e da  $N = 4$  nodi. La figura 3.b mostra lo stesso circuito nel dominio simbolico (i fasori rappresentativi dei generatori indipendenti sono  $\underline{E}_S = E_S/\sqrt{2}$  ed  $\underline{I}_S = (I_S/\sqrt{2}) e^{j\alpha_S}$ ). Uno dei possibili alberi è illustrato in figura 3.c (rami 4, 5 e 6). I rami tratteggiati sono quelli di coalbero (rami 1, 2 e 3).

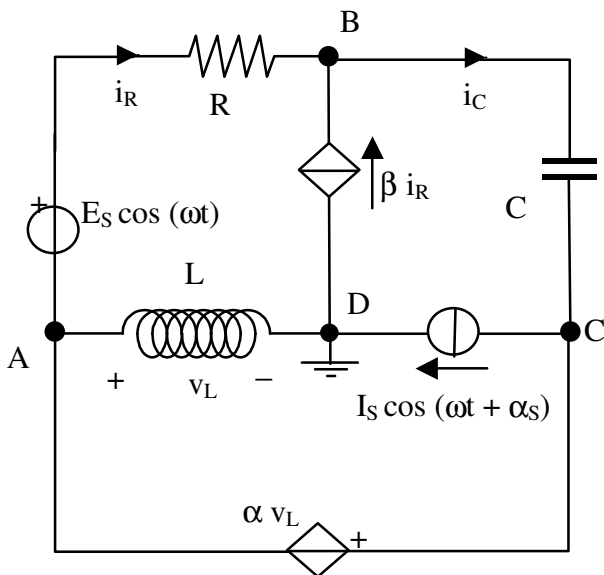


Figura 3a.

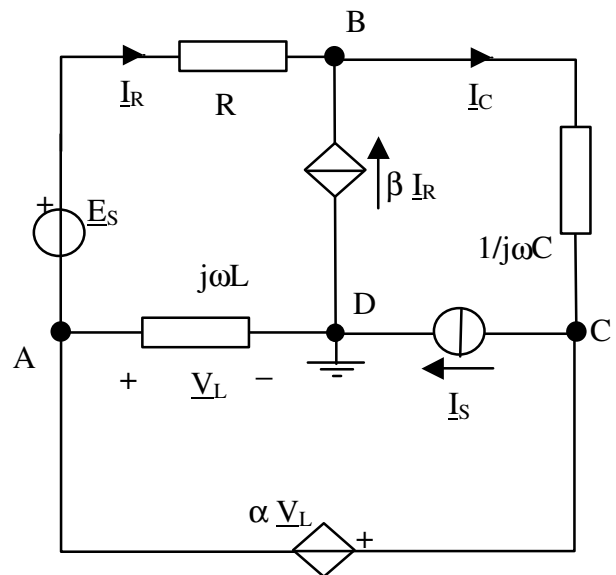


Figura 3b.

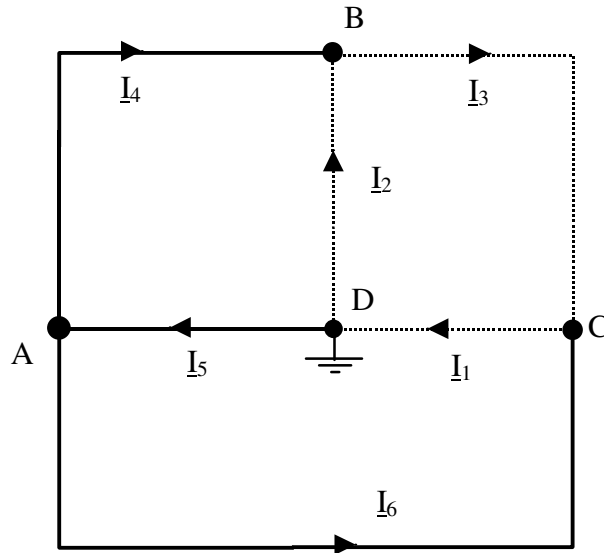


Figura 3c.

**Analisi di Tableau** (sistema di  $2R + N - 1 = 15$  equazioni)

( $R = 6$  equazioni LKT<sub>r</sub> in cui compaiono come incognite  $R = 6$  tensioni di ramo ed  $N - 1 = 3$  potenziali di nodo)

$$\begin{aligned}
 \underline{V}_1 &= \underline{E}_C \\
 \underline{V}_2 &= -\underline{E}_B \\
 \underline{V}_3 &= \underline{E}_B - \underline{E}_C \\
 \underline{V}_4 &= \underline{E}_A - \underline{E}_B \\
 \underline{V}_5 &= -\underline{E}_A \\
 \underline{V}_6 &= \underline{E}_A - \underline{E}_C
 \end{aligned} \tag{13.i}$$

( $N - 1 = 3$  equazioni LKC<sub>n</sub> in cui compaiono come incognite  $R = 6$  correnti di ramo)

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_5 - \underline{I}_4 - \underline{I}_6 &= 0 \\
 \underline{I}_3 - \underline{I}_4 - \underline{I}_2 &= 0 \\
 \underline{I}_1 - \underline{I}_3 - \underline{I}_6 &= 0
 \end{aligned} \tag{13.ii}$$

( $R = 6$  equazioni costitutive dei componenti in cui compaiono come incognite  $R = 6$  tensioni di ramo ed  $R = 6$  correnti di ramo)

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_1 &= \underline{I}_S \\
 \underline{I}_2 &= \beta \underline{I}_4 \\
 \underline{V}_3 &= \underline{I}_3 / j\omega C \\
 \underline{V}_4 &= -\underline{E}_S + R \underline{I}_4 \\
 \underline{V}_5 &= j\omega L \underline{I}_5 \\
 \underline{V}_6 &= \alpha \underline{V}_5
 \end{aligned} \tag{13.iii}$$

La soluzione del sistema (13) consente di determinare  $\underline{I}_3$ : 
$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{E}_S + \alpha j\omega L \underline{I}_S}{\frac{1}{j\omega C} + \frac{R + \alpha\beta j\omega L}{1 + \beta}}$$

Supponendo che i dati siano:  $E_S = 10$  V,  $I_S = 5$  A,  $\alpha_S = 50^\circ$ ,  $R = 2$   $\Omega$ ,  $L = 0.5$  mH,  $C = 4$   $\mu$ F,  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 20$ ,  $f = 50$  Hz si ottiene  $\underline{I}_3 = 6.203 - j 18.07$  e quindi  $i_3(t) = 27.02 \cos(\omega t - 1.240)$  [A].



**Eliminazione delle tensioni di nodo** (sistema di  $R + (\text{Numero di componenti non controllati né in tensione né in corrente}) = 8$  equazioni)

$$\begin{aligned} & \underline{V}_1 + j\omega L \underline{I}_5 + \underline{V}_6 = 0 \\ (R - N + 1 = 3 \text{ equazioni LKT}_m) & \underline{V}_2 - R \underline{I}_4 + \underline{E}_S - j\omega L \underline{I}_5 = 0 \\ & -\frac{\underline{I}_3}{j\omega C} - \underline{V}_6 - \underline{E}_S + R \underline{I}_4 = 0 \end{aligned} \quad (14.i)$$

$$\begin{aligned} (N - 1 = 3 \text{ equazioni LKC}_n) & \underline{I}_5 - \underline{I}_4 - \underline{I}_6 = 0 \\ & \underline{I}_3 - \underline{I}_4 - \underline{I}_2 = 0 \\ & \underline{I}_S - \underline{I}_3 - \underline{I}_6 = 0 \end{aligned} \quad (14.ii)$$

(equazione costitutive dei componenti non controllati né in tensione né in corrente)

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \beta \underline{I}_4 \\ \underline{V}_6 &= \alpha j\omega L \underline{I}_5 \end{aligned} \quad (14.iii)$$

**Metodo dei Tagli Fondamentali** (sistema di  $R - N + 1 + (\text{Numero di componenti non controllati in corrente}) = 5$  equazioni)

$$\begin{aligned} & \underline{V}_1 + j\omega L (\underline{I}_S - \underline{I}_2) + \underline{V}_6 = 0 \\ (R - N + 1 = 3 \text{ equazioni LKT}_m) & \underline{V}_2 - R (\underline{I}_3 - \underline{I}_2) + \underline{E}_S - j\omega L (\underline{I}_S - \underline{I}_2) = 0 \\ & -\frac{\underline{I}_3}{j\omega C} - \underline{V}_6 - \underline{E}_S + R (\underline{I}_3 - \underline{I}_2) = 0 \end{aligned} \quad (15.i)$$

(equazione costitutive dei componenti non controllati in corrente)

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \beta (\underline{I}_3 - \underline{I}_2) \\ \underline{V}_6 &= \alpha j\omega L (\underline{I}_S - \underline{I}_2) \end{aligned} \quad (15.ii)$$

**Metodo dei potenziali di nodo** (sistema di  $N - 1 + (\text{Numero di componenti non controllati in tensione}) = 5$  equazioni)

$$\begin{aligned} & -\frac{\underline{E}_A}{j\omega L} - \frac{\underline{E}_A - \underline{E}_B + \underline{E}_S}{R} - \underline{I}_6 = 0 \\ (N - 1 = 3 \text{ equazioni LKC}_n) & j\omega C (\underline{E}_B - \underline{E}_C) - \frac{\underline{E}_A - \underline{E}_B + \underline{E}_S}{R} - \underline{I}_2 = 0 \\ & \underline{I}_S - j\omega C (\underline{E}_B - \underline{E}_C) - \underline{I}_6 = 0 \end{aligned} \quad (16.i)$$

(equazioni costitutive dei componenti non controllati in tensione)

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \beta \frac{\underline{E}_A - \underline{E}_B + \underline{E}_S}{R} \\ \underline{E}_A - \underline{E}_C &= -\alpha \underline{E}_A \end{aligned} \quad (16.ii)$$

In questo caso, non essendo  $\underline{I}_3$  tra le incognite del sistema, è necessario scrivere separatamente la relazione che la lega ai potenziali di nodo:  $\underline{I}_3 = j\omega C (\underline{E}_B - \underline{E}_C)$ .

### Teorema di Thevenin

Si può applicare il teorema di Thevenin alla soluzione del circuito di figura 3.b considerando come bipolo N il condensatore C e quindi come bipolo L l'insieme di tutti gli altri componenti del circuito (vedi figura 3.d). Il bipolo L' è quello indicato nella figura 3.e, mentre il valore della tensione  $\underline{E}_0$  viene calcolato risolvendo il circuito riportato nella figura 3.f ed è dato dalla relazione (19). Infine il valore della corrente  $\underline{I}_3$  viene ottenuto risolvendo il circuito illustrato nella figura 3.g, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo circuito equivalente di Thevenin.

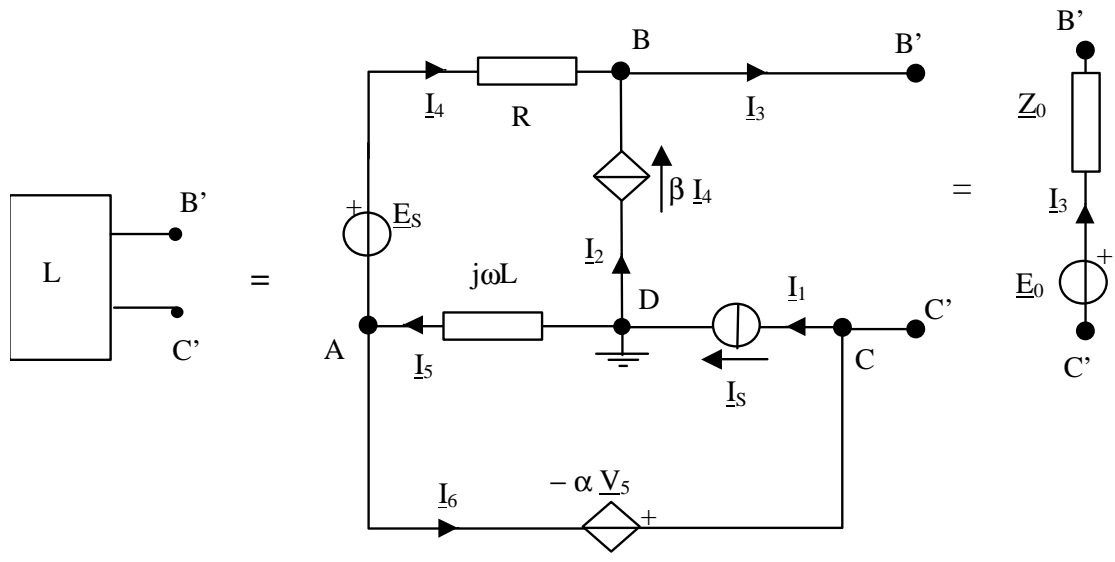
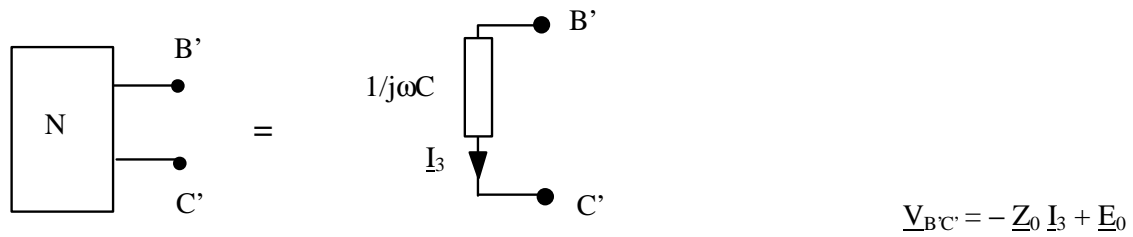


Figura 3.d

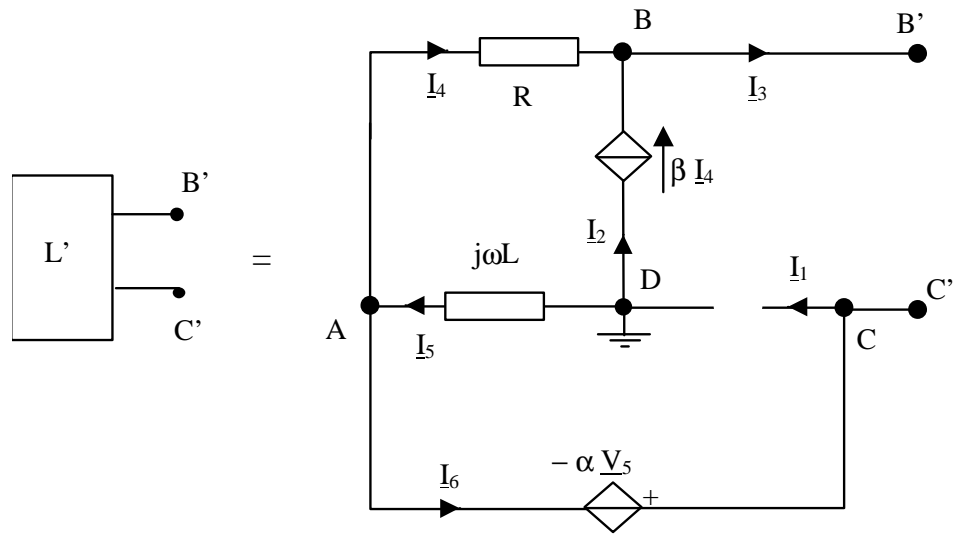


Figura 3.e

La soluzione del circuito di figura 3.e, finalizzata alla determinazione della caratteristica tensione-corrente del bipolo B'C' (cioè della tensione  $\underline{V}_{BC}$  in funzione della corrente  $\underline{I}_3$ ) si può effettuare con uno qualsiasi dei metodi precedentemente illustrati. Ad esempio, utilizzando il metodo dei potenziali di nodo si ottiene il seguente sistema di  $N-1+(\text{Numero di componenti non controllati in tensione}) = 5$  equazioni. Supponendo nota  $\underline{I}_3$ , è possibile calcolare  $\underline{E}_A$ ,  $\underline{E}_B$ ,  $\underline{E}_C$ ,  $\underline{I}_2$  ed  $\underline{I}_6$ , che risultano pari a  $\underline{E}_A = \beta j\omega L \underline{I}_3 / (\beta + 1)$ ,  $\underline{E}_B = (\beta j\omega L - R) \underline{I}_3 / (\beta + 1)$ ,  $\underline{E}_C = (\alpha + 1) \beta j\omega L \underline{I}_3 / (\beta + 1)$ ,  $\underline{I}_2 = \beta \underline{I}_3 / (\beta + 1)$  ed  $\underline{I}_6 = -\underline{I}_3$ .

Pertanto  $\underline{V}_{BC} = \underline{E}_B - \underline{E}_C = -(\alpha\beta j\omega L + R)\underline{I}_3/(\beta + 1)$  ed il circuito equivalente del bipolo L' è una impedenza pari a

$$\underline{Z}_0 = \frac{R + \alpha\beta j\omega L}{1 + \beta}$$

(N - 1 = 3 equazioni LKC<sub>n</sub>)

$$\frac{-\underline{E}_A}{j\omega L} - \frac{\underline{E}_A - \underline{E}_B}{R} - \underline{I}_6 = 0$$

$$\underline{I}_3 - \frac{\underline{E}_A - \underline{E}_B}{R} - \underline{I}_2 = 0$$

$$-\underline{I}_3 - \underline{I}_6 = 0$$

(17.i)

(equazioni costitutive dei componenti non controllati in tensione)

$$\underline{I}_2 = \beta \frac{\underline{E}_A - \underline{E}_B}{R}$$

$$\underline{E}_A - \underline{E}_C = -\alpha \underline{E}_A$$

(17.ii)

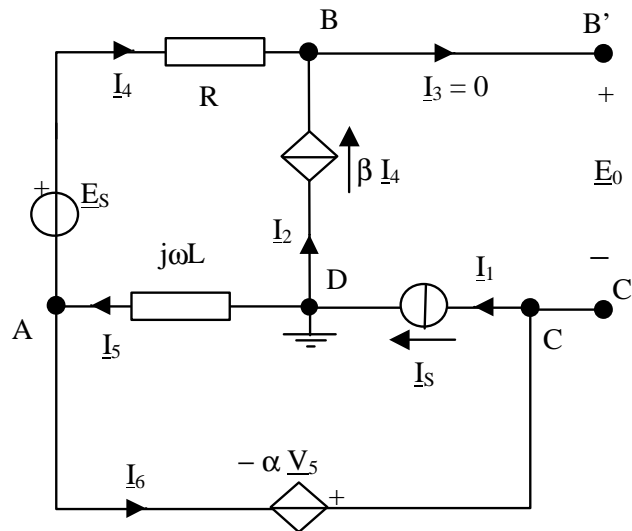


Figura 3.f

La soluzione del circuito di figura 3.f, finalizzata alla determinazione della tensione  $\underline{E}_0$  tra i terminali B' e C' si può effettuare con uno qualsiasi dei metodi precedentemente illustrati. Ad esempio, utilizzando il metodo dei Tagli Fondamentali si ottiene il seguente sistema di  $R - N + 1 + (\text{Numero di componenti non controllati in corrente}) = 5$  equazioni.

(R - N + 1 = 3 equazioni LKT<sub>m</sub>)

$$\underline{V}_1 + j\omega L(\underline{I}_S - \underline{I}_2) + \underline{V}_6 = 0$$

$$\underline{V}_2 - R(-\underline{I}_2) + \underline{E}_S - j\omega L(\underline{I}_S - \underline{I}_2) = 0$$

$$\underline{E}_0 - \underline{V}_6 - \underline{E}_S + R(-\underline{I}_2) = 0$$

(18.i)

(equazione costitutive dei componenti non controllati in corrente)

$$\underline{I}_2 = \beta(-\underline{I}_2)$$

$$\underline{V}_6 = \alpha j\omega L(\underline{I}_S - \underline{I}_2)$$

(18.ii)

Risolvendo le (18) il valore della tensione  $\underline{E}_0$  risulta essere:

$$\underline{E}_0 = \underline{E}_S + \alpha j\omega L \underline{I}_S$$

(19)

Infine il valore della corrente  $I_3$  viene ottenuto risolvendo il circuito illustrato nella figura 3.g, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo circuito equivalente di Thevenin. In questo caso, la corrente  $I_3$  risulta essere:

$$I_3 = \frac{\underline{E}_0}{\frac{1}{j\omega C} + Z_0} = \frac{\underline{E}_S + \alpha j\omega L I_S}{\frac{1}{j\omega C} + \frac{R + \alpha\beta j\omega L}{1 + \beta}}$$

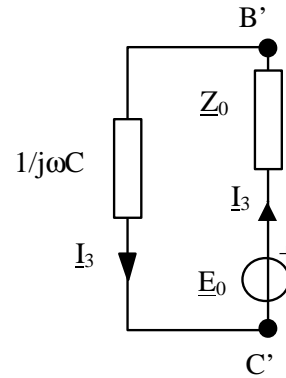


Figura 3.g

### Teorema di Norton

Si può applicare il teorema di Norton alla soluzione del circuito di figura 3.b considerando come bipolo N il condensatore C e quindi come bipolo L l'insieme di tutti gli altri componenti del circuito (vedi figura 3.h). Il bipolo L' è quello indicato nella figura 3.e, mentre il valore della corrente  $I_0$  viene calcolato risolvendo il circuito riportato nella figura 3.i ed è dato dalla relazione (21). Infine il valore della corrente  $I_3$  viene ottenuto risolvendo il circuito illustrato nella figura 3.j, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo circuito equivalente di Norton.

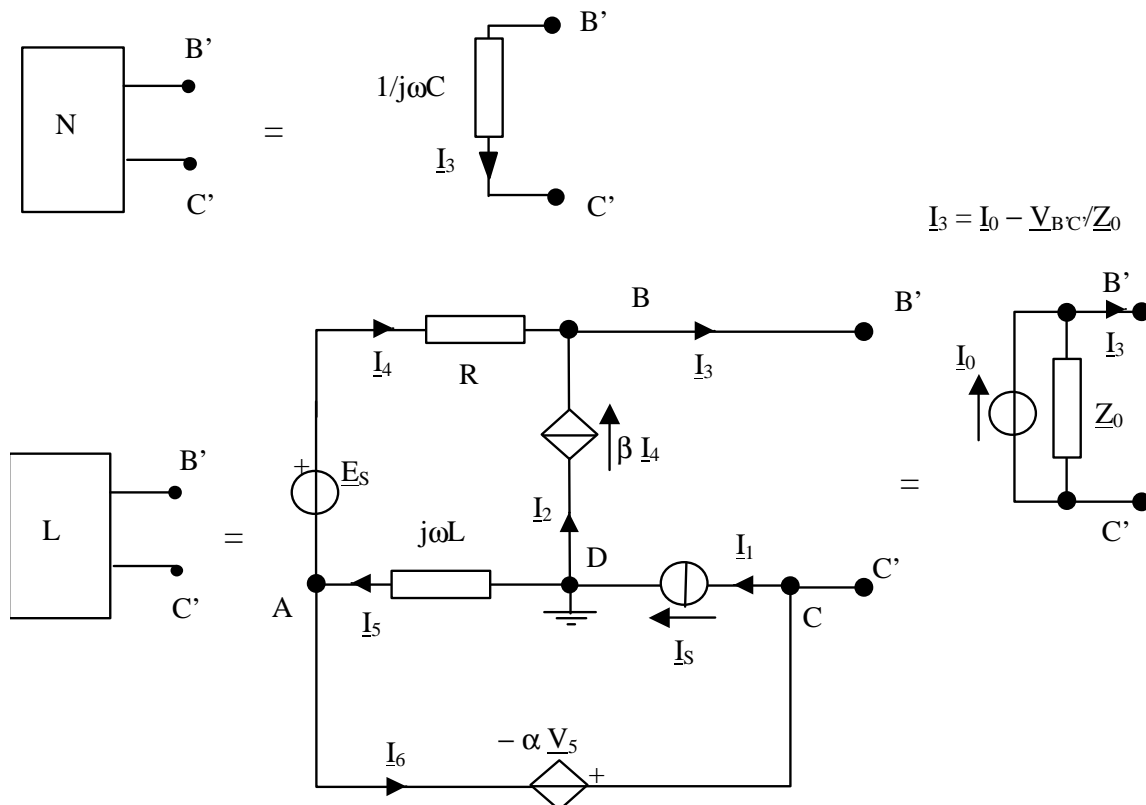


Figura 3.h

La soluzione del circuito di figura 3.e, finalizzata alla determinazione della impedenza equivalente del bipolo B'C', è già stata ottenuta:

$$Z_0 = \frac{R + \alpha\beta j\omega L}{1 + \beta}$$

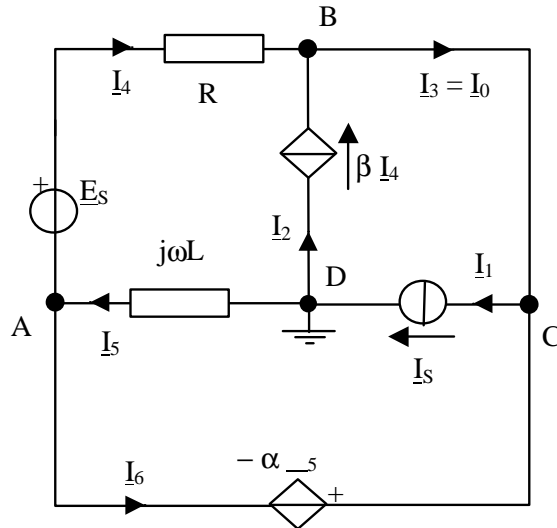


Figura 3.i

La soluzione del circuito di figura 3.i, finalizzata alla determinazione della corrente  $I_0$  tra i terminali B' e C' si può effettuare con uno qualsiasi dei metodi precedentemente illustrati. Ad esempio, utilizzando il metodo dei Tagli Fondamentali si ottiene il seguente sistema di  $R - N + 1 + (\text{Numero di componenti non controllati in corrente}) = 5$  equazioni.

$$\begin{aligned}
 & \underline{V}_1 + j\omega L(\underline{I}_S - \underline{I}_2) + \underline{V}_6 = 0 \\
 (R - N + 1 = 3 \text{ equazioni LKT}_m) & \quad \underline{V}_2 - R(\underline{I}_0 - \underline{I}_2) + \underline{E}_S - j\omega L(\underline{I}_S - \underline{I}_2) = 0 \\
 & \quad -\underline{V}_6 - \underline{E}_S + R(\underline{I}_0 - \underline{I}_2) = 0
 \end{aligned} \tag{20.i}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{equazione costitutive dei componenti non controllati in corrente}) & \quad \underline{I}_2 = \beta(\underline{I}_0 - \underline{I}_2) \\
 & \quad \underline{V}_6 = \alpha j\omega L(\underline{I}_S - \underline{I}_2)
 \end{aligned} \tag{20.ii}$$

Risolvendo le (20) il valore della corrente  $I_0$  risulta essere:

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{E}_S + \alpha j\omega L \underline{I}_S}{R + \alpha \beta j\omega L} = \frac{\underline{E}_S + \alpha j\omega L \underline{I}_S}{\underline{Z}_0} \tag{21}$$

Infine il valore della corrente  $I_3$  viene ottenuto risolvendo il circuito illustrato nella figura 3.j, ottenuto sostituendo il bipolo L con il suo circuito equivalente di Norton. In questo caso, la corrente  $I_3$  risulta essere:

$$\underline{I}_3 = j\omega C \frac{\underline{I}_0}{j\omega C + \frac{1}{\underline{Z}_0}} = \frac{\underline{Z}_0 \underline{I}_0}{\underline{Z}_0 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\underline{E}_S + \alpha j\omega L \underline{I}_S}{\frac{1}{j\omega C} + \frac{R + \alpha \beta j\omega L}{1 + \beta}}$$

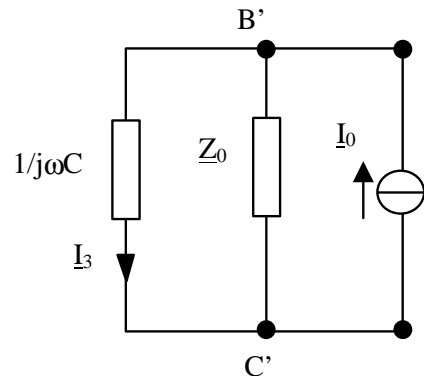
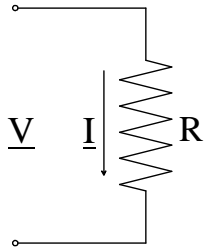
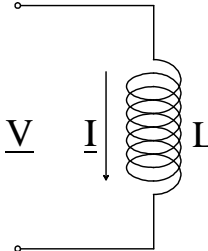
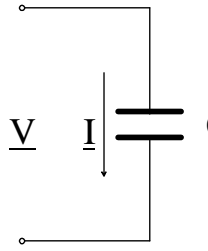
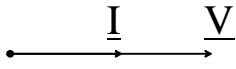


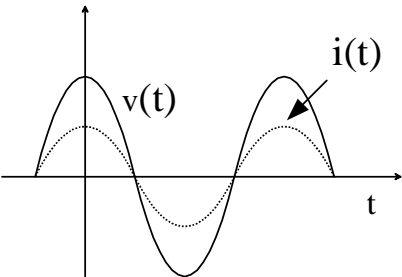
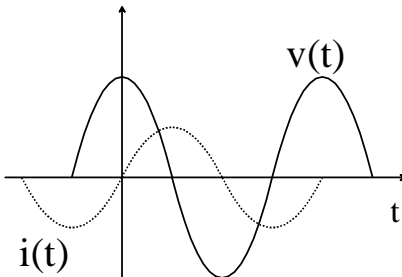
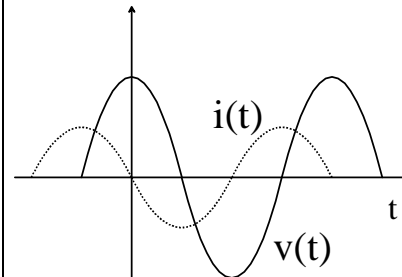


Figura 3.j

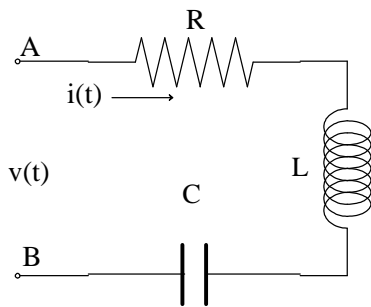
## STUDIO DI CIRCUITI ELEMENTARI

Si considerino i tre semplici circuiti raffigurati in figura 4. Per la soluzione di tali circuiti è sufficiente l'applicazione della legge di Ohm simbolica (5). La tabella riassume i risultati ottenuti. La tensione è stata scelta come riferimento di fase, cosicché  $\alpha_V = 0$ ; lo sfasamento è quindi  $\varphi = -\alpha_I$ . Gli sfasamenti tra fasori sono illustrati in figura 5. L'andamento delle corrispondenti grandezze sinusoidali è mostrato in figura 6.

|   |   |  |
|---|---|--|
|      |                                    |                                   |
| <i>Figura 4.a</i>   | <i>Figura 4.b</i>   | <i>Figura 4.c</i>  |
| $Z = R$   | $Z = j\omega L$   | $Z = -j/\omega C$  |
| $\underline{I} = \frac{\underline{V}}{R} = \frac{V}{R}$                               | $\underline{I} = \frac{\underline{V}}{j\omega L} = \frac{V}{\omega L} e^{-j\frac{\pi}{2}}$                          | $\underline{I} = \frac{\underline{V}}{-j/\omega C} = V\omega C e^{j\frac{\pi}{2}}$                                   |
| La corrente simbolica $\underline{I}$ è un numero reale in fase con $\underline{V}$ : | La corrente simbolica $\underline{I}$ è un numero immaginario in quadratura in ritardo rispetto a $\underline{V}$ : | La corrente simbolica $\underline{I}$ è un numero immaginario in quadratura in anticipo rispetto a $\underline{V}$ : |
| $I = \frac{V}{R}, \varphi = 0$  | $I = \frac{V}{\omega L}, \varphi = \pi/2$   | $I = V\omega C, \varphi = -\pi/2$  |
|    |                                  |                                 |
| <i>Figura 5.a</i>   | <i>Figura 5.b</i>   | <i>Figura 5.c</i>  |
|    |                                  |                                 |
| <i>Figura 6.a</i>   | <i>Figura 6.b</i>   | <i>Figura 6.c</i>  |

## RISONANZA

Si consideri il circuito mostrato in figura 7. Vengono riportate inoltre le espressioni già viste per il modulo della corrente e per lo sfasamento, mettendo in evidenza la dipendenza di tali grandezze dalla pulsazione  $\omega$ :



$$I(\omega) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Figura 7.

Si riconosce che, per R, L, C e V fissate, esiste una pulsazione  $\omega_0$  per cui la reattanza si annulla:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (22)$$

La pulsazione  $\omega_0$  è detta **pulsazione di risonanza**. Ad essa corrisponde la corrente massima in modulo e con sfasamento nullo. In condizioni di risonanza il comportamento del circuito è resistivo, poiché le cadute reattive si compensano a vicenda (vedi diagramma vettoriale).

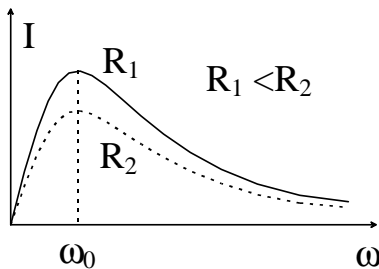


Figura 8.

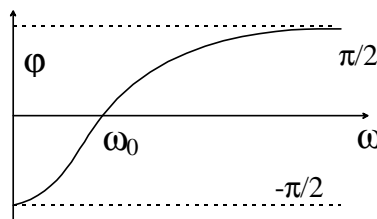


Figura 9.

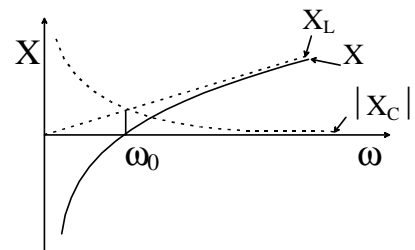


Figura 10.

In figura 8 è rappresentato l'andamento del modulo della corrente in funzione della pulsazione per due diversi valori della resistenza. Nell'ipotetico caso in cui la resistenza del ramo fosse nulla, il modulo della corrente avrebbe un asintoto per  $\omega = \omega_0$ . Per  $\omega \rightarrow 0$ , la reattanza capacitiva  $X_C \rightarrow \infty$ : la corrente continua è bloccata dal condensatore. Per  $\omega \rightarrow \infty$ , la reattanza induttiva  $X_L \rightarrow \infty$ : gli effetti induttivi tendono a bloccare la corrente ad alte frequenze. Nelle figure 9 e 10 sono rappresentati rispettivamente lo sfasamento e la reattanza in funzione della pulsazione. Per  $\omega < \omega_0$ , la reattanza capacitiva prevale su quella induttiva, e lo sfasamento  $\varphi < 0$ ; viceversa, per  $\omega > \omega_0$  la reattanza induttiva prevale su quella capacitiva e  $\varphi > 0$  (vedi diagrammi vettoriali). In figura 11 sono illustrati i diagrammi delle tensioni sul piano di Gauss. Nel caso considerato, la legge di Ohm simbolica si può scrivere:

$$\underline{V} = R\underline{I} + jX_L\underline{I} + jX_C\underline{I}$$

dove sono state evidenziate le cadute di tensione dovute rispettivamente alla resistenza R, alla reattanza induttiva  $X_L = \omega L$  ed alla reattanza capacitiva  $X_C = -1/\omega C$ .

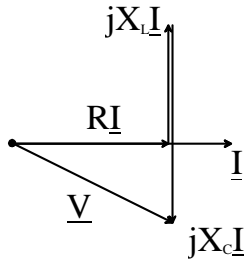


Figura 11.a - Per  $\omega < \omega_0$  la reattanza capacitiva prevale su quella induttiva.

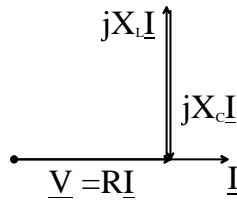


Figura 11.b. - Per  $\omega = \omega_0$ , la reattanza capacitiva e quella induttiva si compensano.

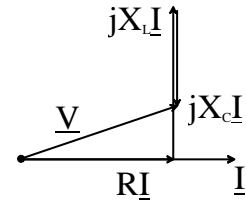


Figura 11.c. - Per  $\omega > \omega_0$ , la reattanza induttiva prevale su quella capacitiva.

### ANTIRISONANZA

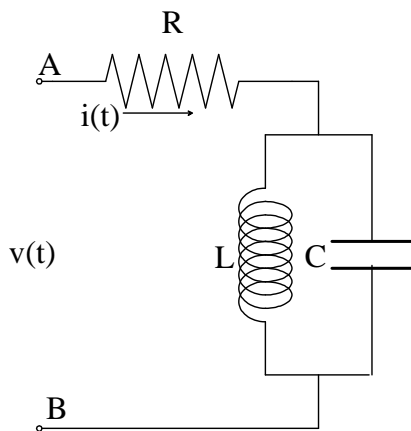


Figura 12.

Si consideri ora il circuito mostrato in figura 12, in cui figurano un'induttanza ed una capacità in parallelo. In base all'equivalenza formale tra equazioni di Kirchhoff in c.c. ed in c.a., le regole di composizione per resistenze in parallelo possono essere estese anche al parallelo di impedenze. E' quindi possibile esprimere l'impedenza  $\underline{Z}_{LC}$  equivalente al parallelo tra le due impedenze  $\underline{Z}_L$  e  $\underline{Z}_C$  nella forma:

$$\underline{Z}_{LC} = \frac{\underline{Z}_L \underline{Z}_C}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = -j \frac{L/C}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} \quad (23)$$

La corrente che passa attraverso la resistenza R è quindi pari a:

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{R + \underline{Z}_{LC}} \quad (24)$$

Da cui possiamo dedurre le espressioni per il modulo della corrente e per lo sfasamento, mettendo in evidenza la dipendenza di tali grandezze dalla pulsazione  $\omega$

$$I(\omega) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \frac{L^2/C^2}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}}$$

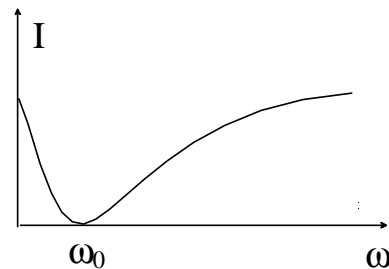


Figura 13.a

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{L/C}{R \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

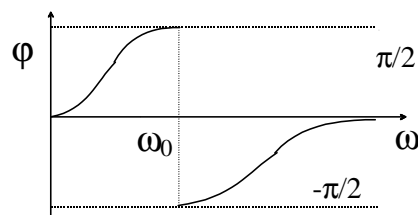


Figura 13.b



Le correnti del ramo induttivo e capacitivo sono pari a:

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{V} - R\underline{I}}{j\omega L} \quad (25) \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{V} - R\underline{I}}{-j/\omega C} \quad (26)$$

Esiste una pulsazione  $\omega_0$ , detta **pulsazione di antirisonanza**, che rende infinita l'impedenza equivalente  $\underline{Z}_{LC}$  e, conseguentemente, annulla la corrente  $\underline{I}$ :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (27)$$

Mentre la corrente di alimentazione  $\underline{I}$  è nulla le correnti  $\underline{I}_L$  e  $\underline{I}_C$  risultano diverse da zero:

$$\underline{I}_L = -j\sqrt{\frac{C}{L}}\underline{V} = -\underline{I}_C$$

Si instaura cioè un regime periodico di scambio energetico tra il condensatore e l'induttanza. In assenza di dispersioni e di resistenze, la circolazione nella maglia costituita dall'induttanza e dal condensatore continua indefinitamente.

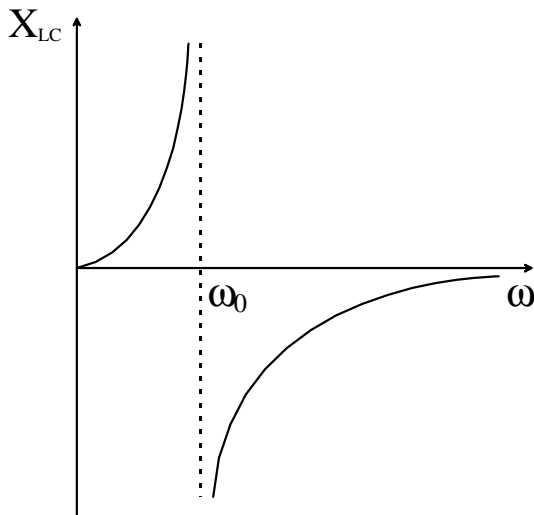


Figura 13.c

In figura 13.c è raffigurato l'andamento della reattanza equivalente del parallelo induttanza - condensatore.

Per  $\omega < \omega_0$  la reattanza è positiva, ed il circuito ha un comportamento prevalentemente ohmico - induttivo con uno sfasamento positivo. Per basse frequenze la corrente fluisce prevalentemente nel ramo induttivo, che quindi caratterizza maggiormente il comportamento del circuito. Al limite, per  $\omega = 0$ , la corrente  $\underline{I}_C$  e la reattanza induttiva  $X_L$  si annullano, mentre  $X_C$  va all'infinito.

Per  $\omega > \omega_0$  la reattanza è negativa, ed il circuito ha prevalentemente una caratteristica ohmico - capacitiva, con sfasamento negativo. Per alte frequenze la corrente fluisce maggiormente per il ramo capacitivo. Quando  $\omega \rightarrow \infty$  la corrente  $\underline{I}_L$  e la reattanza capacitiva  $X_C$  si annullano, mentre  $X_L$  tende all'infinito.

## POTENZE IN CORRENTE ALTERNATA

### POTENZA ISTANTANEA

Si faccia riferimento all'utilizzatore  $U$  in figura 14, alimentato tramite la coppia di morsetti AB da una tensione sinusoidale:

$$v(t) = V_M \cos(\omega t)$$

associata ad una corrente d'alimentazione:

$$i(t) = I_M \cos(\omega t - \phi)$$

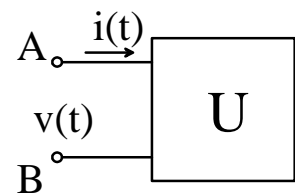


Figura 14.

Si definisce potenza istantanea il prodotto:

$$p(t) = v(t)i(t) \quad (28)$$

La corrente  $i(t)$  può essere scomposta nelle due componenti  $i_a$  e  $i_r$ , dette rispettivamente corrente **attiva** e **reattiva**. La corrente attiva è quindi la componente della corrente in fase con la tensione, mentre la corrente reattiva è la componente in quadratura. Si può dunque scrivere:

$$i_a(t) = I_M \cos(\omega t) \cos \varphi \quad (29) \quad i_r(t) = I_M \sin(\omega t) \sin \varphi \quad (30) \quad i = i_a + i_r \quad (31)$$

La potenza istantanea diventa quindi:

$$p(t) = v(t)i_a(t) + v(t)i_r(t) = p_a(t) + p_r(t) \quad (32)$$

dove<sup>(o)</sup>:

$$p_a(t) = v(t)i_a(t) = V_M I_M \cos \varphi \cos^2(\omega t) = \frac{V_M I_M}{2} \cos \varphi [1 + \cos(2\omega t)] \quad (33)$$

$$p_r(t) = v(t)i_r(t) = V_M I_M \sin \varphi \sin(\omega t) \cos(\omega t) = \frac{V_M I_M}{2} \sin \varphi \sin(2\omega t) \quad (34)$$

Gli andamenti delle grandezze  $p_a$  e  $p_r$ , dette rispettivamente **potenza istantanea attiva** e **potenza istantanea reattiva**, sono mostrati nelle figure 15 e 16.

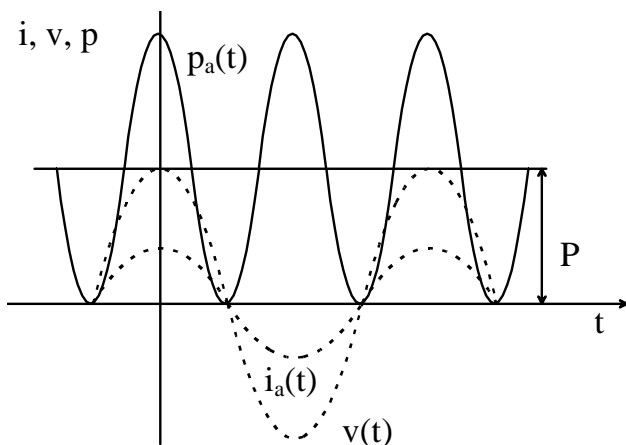


Figura 15. - Potenza istantanea attiva.

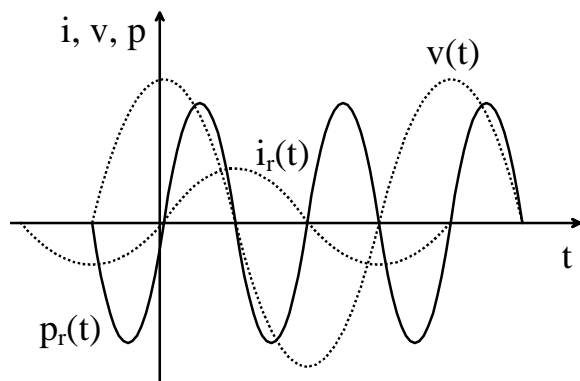


Figura 16. - Potenza istantanea reattiva.

### POTENZA ATTIVA

Si riconosce che la potenza istantanea attiva non cambia mai segno, e rappresenta quindi un flusso unidirezionale di energia. Il suo integrale su un periodo  $T$  è quindi, di norma, diverso da zero. Si definisce **potenza attiva**  $P$  il valore medio in un periodo dalla potenza istantanea:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (35)$$

È immediato verificare che il valore medio della potenza istantanea coincide col valore medio della potenza attiva istantanea: infatti, la potenza reattiva istantanea è una grandezza sinusoidale e, di conseguenza ha valore medio nullo. Si ha quindi:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_a(t) dt = \frac{V_M I_M}{T} \cos \varphi \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{V_M I_M}{2} \cos \varphi$$

E, introducendo i valori efficaci di corrente e tensione:

$$P = VI \cos \varphi \quad (36)$$

<sup>(o)</sup> Si ricordi che  $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ ;  $\cos(2x) = \cos^2(x) - 1$ .

La potenza attiva è quindi valutabile come il prodotto del valore efficace della tensione, il valore efficace della corrente e del **fattore di potenza**  $\cos\varphi$ .

### POTENZA COMPLESSA

La potenza complessa  $\underline{N}$  è definita dalla seguente relazione:

$$\underline{N} = \underline{V} \underline{I}^* \quad (37)$$

dove  $\underline{I}^*$  è il complesso coniugato di  $\underline{I}$ . Si ha quindi:

$$\underline{N} = V e^{j\alpha_v} I e^{-j\alpha_i} = VI e^{j\varphi}$$

e, ricordando la formula di Eulero:

$$\underline{N} = VI \cos \varphi + jVI \sin \varphi \quad (38)$$

Risulta così provato, ricordando la (36), che la parte reale della potenza complessa risulta essere pari alla potenza attiva:

$$\Re(\underline{N}) = P = VI \cos \varphi \quad (39)$$

La parte immaginaria della potenza complessa viene chiamata **potenza reattiva** e nel caso di un bipolo ha la seguente espressione:

$$Q = \Im(\underline{N}) = VI \sin \varphi \quad (40)$$

Dalla (40) si può notare che un bipolo assorbe potenza reattiva solo quando la corrente è sfasata rispetto alla tensione ( $\varphi \neq 0$ ), ed è quindi presente una componente reattiva della corrente stessa (vedi eq. 30). Ciò avviene quando il componente è in grado di immagazzinare energia senza dissiparla, come, ad esempio in un induttore od in un condensatore; la potenza reattiva è quindi un indicatore di uno scambio di energia di tipo conservativo, che in alcuni casi, che saranno esposti nel paragrafo relativo al problema del rifasamento, è necessario limitare il più possibile.

Il modulo  $N$  della potenza complessa è detto **potenza apparente**:

$$N = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (41)$$

Si consideri ora un generico ramo di circuito caratterizzato da un'impedenza  $\underline{Z}$ . Tenendo conto della legge di Ohm simbolica (5), la (37) può essere riscritta come segue:

$$\underline{N} = \underline{Z} \underline{I} \underline{I}^* = \underline{Z} I^2 = RI^2 + jXI^2 \quad (42)$$

Confrontando la (42) con la (39) e la (40) si ottiene:

$$P = R I^2 \quad (43)$$

$$Q = X I^2 \quad (44)$$

In base alla definizione di corrente efficace  $I$  si ricava subito che la potenza attiva è pari alla media su un periodo della potenza dissipata per effetto Joule sulla resistenza  $R$ , unico componente in grado di assorbire energia senza restituirla. La potenza reattiva dipende invece esclusivamente dalla reattanza, cioè dai componenti in grado di immagazzinare energia conservativa (elettrostatica nei condensatori, magnetica nelle induttanze) e di restituirla.

Si noti che, mentre la potenza attiva assorbita dall'impedenza  $\underline{Z}$  è sempre positiva, il segno della potenza reattiva dipende dalla reattanza prevalente nel ramo.  $Q$  è quindi positiva per reattanze prevalentemente induttive ( $Q = \omega LI^2$  per una reattanza puramente induttiva), e negativa per reattanze prevalentemente capacitive ( $Q = -I^2/\omega C$  per una reattanza puramente capacitiva).

### ADDITIVITÀ DELLE POTENZE

Dalle equazioni (10) ed (11) segue, come corollario del Teorema di Tellegen, l'additività delle potenze in regime sinusoidale. Infatti, per un dato circuito, preso un qualsiasi vettore di numeri complessi rappresentativi di tensioni di ramo  $\underline{\mathbf{V}}_1$ , che soddisfi le LKT per quel circuito, ed un vettore di numeri complessi rappresentativi di correnti di ramo  $\underline{\mathbf{I}}_2$ , che soddisfi le LKC per quel circuito, vale la seguente relazione:

$$\underline{\mathbf{V}}_1^T \underline{\mathbf{I}}_2^* = 0 \quad (45)$$

Infatti, si ha

$$\underline{\mathbf{V}}_1^T \underline{\mathbf{I}}_2^* = (\mathbf{A}^T \underline{\mathbf{E}}_1)^T \underline{\mathbf{I}}_2^* = \underline{\mathbf{E}}_1^T \mathbf{A} \underline{\mathbf{I}}_2^* = \underline{\mathbf{E}}_1^T (\mathbf{A} \underline{\mathbf{I}}_2)^* = \underline{\mathbf{E}}_1^T \mathbf{0} = 0$$

Se si applica la (45) considerando i vettori di numeri complessi rappresentativi delle tensioni e delle correnti che effettivamente sono presenti nel circuito, si ottiene la relazione (46) che, sulla base della definizione (37), mostra come la potenza complessa assorbita da tutti i componenti del circuito risulti in ogni istante nulla.

$$\underline{\mathbf{V}}^T \underline{\mathbf{I}}^* = \underline{\mathbf{V}}_1^T \underline{\mathbf{I}}_1^* + \underline{\mathbf{V}}_2^T \underline{\mathbf{I}}_2^* + \dots = \underline{\mathbf{N}}_1 + \underline{\mathbf{N}}_2 + \dots = 0 \quad (46)$$

Si consideri ora il circuito schematizzato in figura 17, alimentato tramite la coppia di morsetti AB da una tensione sinusoidale  $v(t)$  rappresentata dal numero complesso  $\underline{\mathbf{V}}$ . Il circuito è composto da  $m$  rami che si incontrano in  $n$  nodi. Assumendo che in ogni ramo i versi positivi di riferimento della tensione e della corrente di ramo siano associati, indicando con  $\underline{\mathbf{N}}_h$  la potenza reattiva assorbita dal generico ramo  $h$  e con  $\underline{\mathbf{V}}_h$  ed  $\underline{\mathbf{I}}_h$  i fasori rappresentativi della tensione e della corrente di ramo, risulta (dato che  $\underline{\mathbf{V}}_1^T \underline{\mathbf{I}}_1^* + \underline{\mathbf{V}}_2^T \underline{\mathbf{I}}_2^* + \dots + \underline{\mathbf{V}}_{BA}^T \underline{\mathbf{I}}^* = 0$ ):

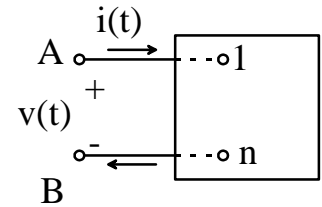


Figura 17.

$$\sum_{h=1}^m \underline{\mathbf{N}}_h = \sum_{h=1}^m \underline{\mathbf{V}}_h \underline{\mathbf{I}}_h^* = -\underline{\mathbf{V}}_{BA} \underline{\mathbf{I}}^* = \underline{\mathbf{V}}_{AB} \underline{\mathbf{I}}^* = \underline{\mathbf{N}}$$

Si può quindi affermare che: *la potenza complessa  $\underline{\mathbf{N}}$  fornita al circuito attraverso la coppia di morsetti AB è pari alla somma delle potenze complesse  $\underline{\mathbf{N}}_h$  assorbite da tutti i rami del circuito.* Nel caso in cui ciascun ramo sia costituito da una impedenza in serie con un generatore di tensione, avendo indicato con  $\underline{\mathbf{N}}_{g,i}$  la potenza complessa erogata dal generatore presente sul ramo  $i$ , e con  $\underline{\mathbf{Z}}_i$  l'impedenza in serie a tale generatore, segue:

$$\underline{\mathbf{N}} + \sum_{i=1}^m \underline{\mathbf{N}}_{g,i} = \sum_{i=1}^m \underline{\mathbf{Z}}_i \underline{\mathbf{I}}_i^2 \quad (47)$$

Eguagliando le parti reali e le parti immaginarie della relazione (47) si ottiene:

$$P + \sum_{i=1}^m P_{g,i} = \sum_{i=1}^m R_i \underline{\mathbf{I}}_i^2, \quad (48)$$

$$Q + \sum_{i=1}^m Q_{g,i} = \sum_{i=1}^m X_i \underline{\mathbf{I}}_i^2. \quad (49)$$

La (48) esprime il fatto che la potenza attiva fornita dalla coppia di morsetti AB ( $P = VI \cos\phi$ ) più la somma delle potenze attive fornite dai generatori è pari alla somma delle potenze attive assorbite dalle impedenze dei rami del circuito e dissipate per effetto Joule. Analogamente, la potenza reattiva fornita dalla coppia di morsetti AB ( $Q = VI \sin\phi$ ) più la somma delle potenze reattive fornite dai generatori è pari alla somma delle potenze reattive assorbite dalle impedenze dei rami del circuito.

## TEOREMA DEL MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA

Nella figura 18 è rappresentato schematicamente un bipolo che alimenta un carico  $\underline{Z}_L$ . Si faccia l'ipotesi che il circuito sia in regime sinusoidale isofrequenziale. Si vuole determinare l'impedenza di carico  $\underline{Z}_L$  che rende massima la potenza attiva ricevuta dal carico. Questo problema si presenta nel progetto di ogni amplificatore: si deve scegliere l'impedenza di ingresso che rende massima la potenza ricevuta.

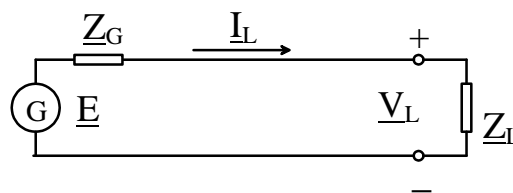


Figura 18.

La potenza attiva assorbita dal carico si calcola immediatamente, avendo posto:

$$\underline{Z}_G = R_G + j X_G \qquad \underline{Z}_L = R_L + j X_L$$

Risulta infatti:

$$P_L = R_L |\underline{I}_L|^2 = R_L \frac{E^2}{|\underline{Z}_L + \underline{Z}_G|^2} = R_L \frac{E^2}{(R_L + R_G)^2 + (X_L + X_G)^2}$$

Poiché  $E$ ,  $R_G$  e  $X_G$  sono assegnati, si tratta di determinare quali valori di  $R_L$  e  $X_L$  rendono massima la  $P_L$ . Una prima osservazione è che, relativamente ad  $X_L$ , il denominatore è certamente minimo quando  $X_L = -X_G$ . Per quanto riguarda la  $R_L$ , è sufficiente annullare la derivata della  $P_L$  rispetto ad  $R_L$ :

$$\frac{dP_L}{dR_L} = E^2 \left[ \frac{1}{(R_L + R_G)^2} - \frac{2R_L}{(R_L + R_G)^3} \right] = \frac{(R_L - R_G)E^2}{(R_L + R_G)^3} = 0 \Rightarrow R_L = R_G$$

Si è ricavato quindi il seguente **Teorema del massimo trasferimento di potenza**: *Sia assegnato un bipolo funzionante in regime sinusoidale isofrequenziale, specificato dal suo circuito equivalente di Thevenin, che alimenti una impedenza di carico  $\underline{Z}_L$ . Tale impedenza riceve dal bipolo la massima potenza attiva se, e solo se:*

$$\underline{Z}_L = \underline{Z}_G^*$$

In tal caso si dice che il carico è adattato al bipolo e la potenza attiva (massima) fornita al carico è  $P_{L,MAX} = E^2/4R_G$ . Si noti che anche se il carico è adattato al bipolo, solo il 50% dell'energia del generatore fluisce nel carico e quindi il rendimento è pari a 0.5. Infatti, introducendo il rendimento si ha:

$$\eta = \frac{P_u}{P_u + P_d} = \frac{R_L I_L^2}{R_L I_L^2 + R_G I_L^2} = \frac{R_L}{R_L + R_G} = \frac{1}{1 + (R_G/R_L)}$$

dove  $P_u$  è la potenza utile e  $P_d$  la potenza dissipata. Si noti che il rendimento può essere reso arbitrariamente vicino ad uno facendo aumentare la  $R_L$ . In tal caso però la potenza assorbita dal carico tende a zero.

## RIFASAMENTO

Nella figura 19 è rappresentato schematicamente un generatore di tensione in c.a.  $G$  che alimenta, tramite una linea di lunghezza  $L$ , un utilizzatore  $U$ . La lunghezza della linea è tale che è possibile schematizzarla mediante una impedenza di linea  $\underline{Z}_L$  ( $\underline{Z}_L = R_L + j X_L$ ) Conseguentemente la tensione  $\underline{V}$  di ingresso dell'utilizzatore  $U$  è pari a:

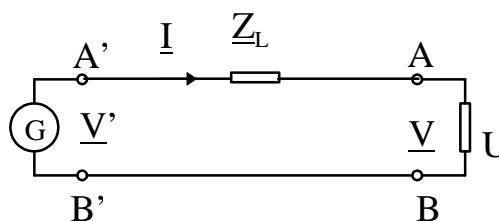


Figura 19.

$$\underline{V} = \underline{V}' - \underline{Z}_L \underline{I}$$

A causa della caduta di tensione  $\underline{Z}_L \underline{I}$  la tensione  $\underline{V}$  non è uguale a  $\underline{V}'$ , e soprattutto varia a seconda dell'utilizzatore. Alla resistenza di linea è inoltre associata una potenza dissipata per effetto Joule:

$$P_d = R_L I^2$$

Tali effetti possono essere limitati riducendo la corrente di linea quando questo è possibile.

Esistono degli utilizzatori che, essendo caratterizzati da un fattore di potenza ( $\cos\phi$ ) basso necessitano di elevati valori di corrente per assorbire la potenza nominale per cui sono stati progettati. Infatti, dalla (27) si ha:

$$I = \frac{P}{V \cos\phi}$$

Tanto più basso è il fattore di potenza, tanto maggiore è, a parità di tensione e potenza assorbita, la corrente di alimentazione. Un rimedio a tale situazione si può ottenere **rifasando** l'utilizzatore, cioè disponendo in parallelo ad esso un opportuna reattanza. Il tipo di reattanza dipende dallo sfasamento dell'utilizzatore: occorre un condensatore se  $\phi > 0$ , un induttore se  $\phi < 0$ .

Si faccia riferimento al caso più frequente in cui  $\phi > 0$  (vedi figura 20). Il diagramma delle correnti si ricava facilmente tenendo conto che:

$$\underline{I}_L = \underline{I} + \underline{I}_C$$

e che  $\underline{I}_C$  è in quadratura in anticipo rispetto a  $\underline{V}$ . Da tale diagramma (vedi figura 21) si vede come sia possibile ridurre in maniera considerevole la corrente di linea. La presenza del condensatore in parallelo ad  $U$  rende in teoria possibile annullare lo sfasamento  $\phi'$  del blocco condensatore - utilizzatore (rifasamento completo). In realtà il rifasamento completo è raramente necessario, è sufficiente che l'angolo  $\phi'$  assuma un valore prefissato convenientemente piccolo. Dalla (39) e dalla (40) si ottiene:

$$Q = P \tan\phi \quad (50) \quad Q + Q_c = P \tan\phi' \quad (51)$$

dove  $P$ ,  $Q$ ,  $Q_c$  sono rispettivamente la potenza attiva assorbita dal utilizzatore, la potenza reattiva assorbita dall'utilizzatore e la potenza reattiva assorbita dalla capacità. La (51) è stata ottenuta tenendo conto che la potenza attiva assorbita dal condensatore è nulla. Sottraendo membro a membro la (51) dalla (50) si ottiene:

$$Q_c = P (\tan\phi' - \tan\phi) \quad (52)$$

Tenendo conto che:  $Q_c = X_c I_c^2 = -I_c^2/\omega C = -(\omega C V)^2/\omega C = -\omega C V^2$ , dalla (52) si ricava:

$$C = \frac{P}{\omega V^2} (\tan\phi - \tan\phi') \quad (53)$$

che consente di calcolare la capacità  $C$  del condensatore fissato l'angolo  $\phi'$ .

La funzione del condensatore di rifasamento può essere spiegata intuitivamente: esso rappresenta un componente in grado di scambiare alternativamente energia con l'utilizzatore. La presenza del condensatore, diminuendo la potenza reattiva vista dal generatore, riduce quindi lo scambio alternativo di energia lungo la linea.

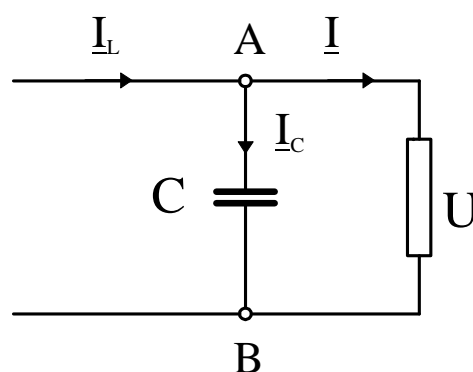


Figura 20.

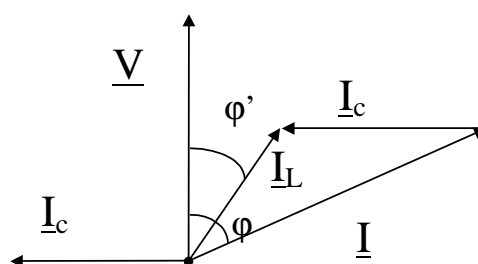
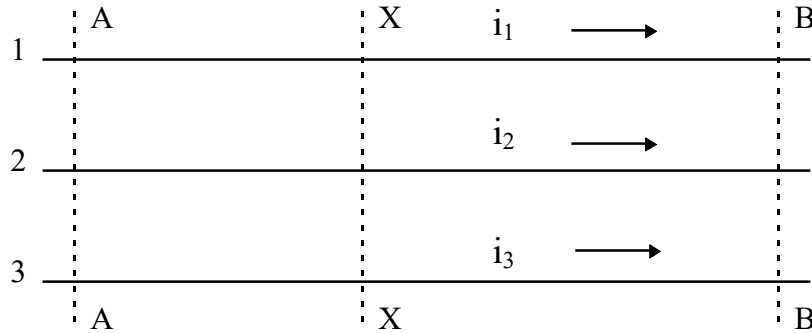


Figura 21.

## SISTEMI TRIFASE

I sistemi trifase sono schematizzabili come nella figura 1. Non si fa nessuna ipotesi né sul generatore di alimentazione situato prima della sezione A-A, né sull'utilizzatore situato dopo la sezione B-B.



*Figura 1. - Schema di linea trifase*

Per una generica sezione X-X valgono le seguenti relazioni:

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0 \quad (1)$$

$$v_{12}(t) + v_{23}(t) + v_{31}(t) = 0 \quad (2)$$

Le equazioni (1) e (2) sono relative ai valori istantanei delle **correnti di linea**  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$ ,  $i_3(t)$  e delle **tensioni concatenate**  $v_{12}(t)$ ,  $v_{23}(t)$ ,  $v_{31}(t)$  avendo posto  $v_{hk}$  = tensione tra il filo h ed il filo k. Utilizzando la notazione simbolica di Steinmetz le (1), (2) si scrivono come:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \quad (3)$$

$$\underline{V}_{12} + \underline{V}_{23} + \underline{V}_{31} = 0 \quad (4)$$

Casi particolari di notevole importanza sono i seguenti:

- **Sistemi trifase simmetrici:**  $|\underline{V}_{12}| = |\underline{V}_{23}| = |\underline{V}_{31}| = V$ .
- **Sistemi trifase equilibrati:**  $|\underline{I}_1| = |\underline{I}_2| = |\underline{I}_3| = I$ .

Nei sistemi trifase simmetrici le tensioni concatenate, rappresentate sul piano di Gauss, formano un triangolo equilatero e risultano sfasate, l'una rispetto alla precedente (nell'ordine  $\underline{V}_{12}$ ,  $\underline{V}_{23}$ ,  $\underline{V}_{31}$ ) di un angolo pari a  $2\pi/3$ . A seconda che lo sfasamento sia negativo (rotazione in senso orario) o positivo (rotazione in senso antiorario), si parla rispettivamente di sistema simmetrico diretto (vedi figura 2) oppure di sistema simmetrico inverso (vedi figura 3). Invertendo l'ordine dei fili 2 e 3 è possibile trasformare un sistema diretto in un sistema inverso e viceversa. Se si indica con  $\alpha$  il numero complesso  $e^{j2\pi/3}$  risulta:

- sistema di tensioni concatenate simmetrico e diretto:  $(\underline{V}_{12}, \alpha^2 \underline{V}_{12}, \alpha \underline{V}_{12})$
- sistema di tensioni concatenate simmetrico e inverso:  $(\underline{V}_{12}, \alpha \underline{V}_{12}, \alpha^2 \underline{V}_{12})$ .

Nel seguito, tranne precisazione contraria, supporremo sempre che:

1. - I sistemi trifase siano simmetrici e diretti;
2. - La linea di trasmissione tra generatore ed utilizzatore non dia luogo a cadute di tensione in modo da potere considerare in ogni sezione della linea la stessa terna di tensioni concatenate.

**Sistema trifase simmetrico diretto**

**Sistema trifase simmetrico inverso**

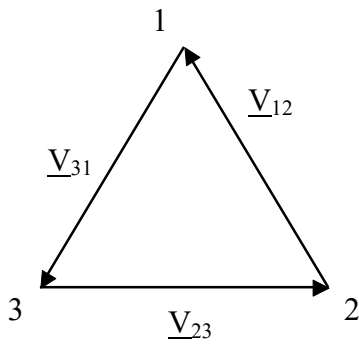


Figura 2

$$\underline{V}_{23} = \underline{V}_{12} e^{-j2\pi/3}$$

$$\underline{V}_{31} = \underline{V}_{12} e^{-j4\pi/3}$$

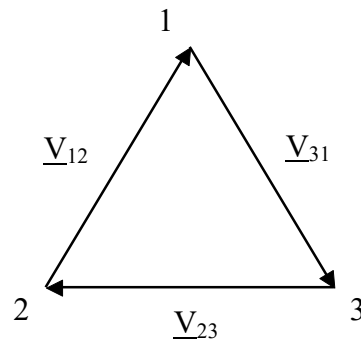


Figura 3

$$\underline{V}_{23} = \underline{V}_{12} e^{j2\pi/3}$$

$$\underline{V}_{31} = \underline{V}_{12} e^{j4\pi/3}$$

L'ipotesi 1 è dovuta al fatto che il generatore trifase può essere schematizzato come tre generatori di tensione monofase isofrequenziali con lo stesso valore efficace ma sfasati di  $2\pi/3$  (vedi figura 4). Se lo sfasamento è negativo, come indicato nella figura 4, le tensioni concatenate risultano essere una terna diretta.

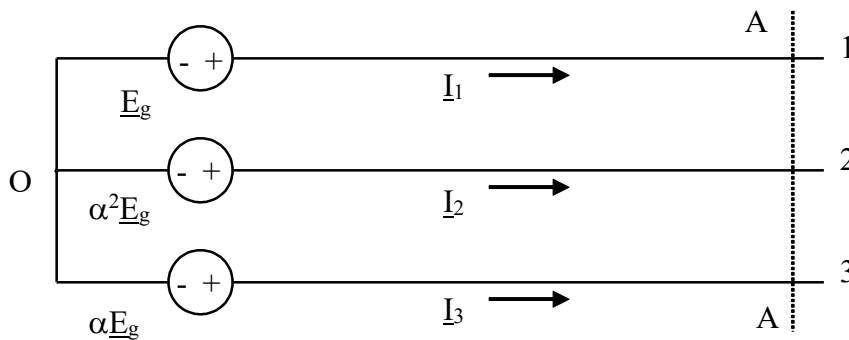


Figura 4. - Schema di generatore trifase

In generale, data una terna qualsiasi di tensioni concatenate  $\underline{V}_{12}$ ,  $\underline{V}_{23}$ ,  $\underline{V}_{31}$ , si definiscono le tensioni principali di fase, o tensioni stellate, le tensioni  $\underline{E}_{10}$ ,  $\underline{E}_{20}$ ,  $\underline{E}_{30}$  che soddisfano le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \underline{E}_{10} - \underline{E}_{20} &= \underline{V}_{12} \\ \underline{E}_{20} - \underline{E}_{30} &= \underline{V}_{23} \\ \underline{E}_{10} + \underline{E}_{20} + \underline{E}_{30} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

**Se la terna di tensioni concatenate è simmetrica e diretta anche la terna delle tensioni principali di fase risulta simmetrica e diretta** (vedi figura 5).

Il valore efficace  $E$  delle tensioni principali di fase risulta in questo caso ridotto di un fattore pari a  $\sqrt{3}$  rispetto al valore efficace  $V$  delle tensioni concatenate:

$$E = \frac{V}{\sqrt{3}} \quad (6)$$

Nel seguito si supporrà sempre il sistema delle tensioni concatenate simmetrico e diretto.

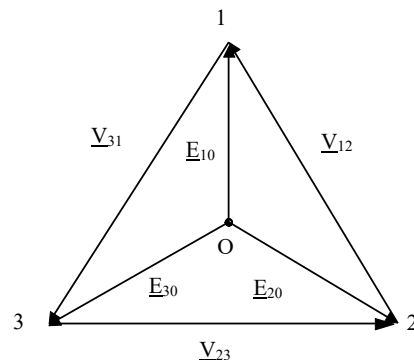


Figura 5 Tensioni principali di fase per un sistema simmetrico e diretto

## POTENZA NEI SISTEMI TRIFASE



La potenza istantanea assorbita da un utilizzatore trifase U qualsiasi (vedi figura 6) ha la seguente espressione:

$$p(t) = v_{10}(t)i_1(t) + v_{20}(t)i_2(t) + v_{30}(t)i_3(t) \quad (7)$$

dove  $v_{10}$ ,  $v_{20}$  e  $v_{30}$  sono rispettivamente le tensioni dei terminali 1, 2 e 3 rispetto ad un qualsiasi terminale O preso come riferimento. Si dimostra infatti che, dato che le correnti  $i_1$ ,  $i_2$  ed  $i_3$  soddisfano la LKC ( $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ ) e le tensioni  $v_{10}$ ,  $v_{20}$  e  $v_{30}$  soddisfano la LKT ( $v_{12} = v_{10} - v_{20}$ ,  $v_{23} = v_{20} - v_{30}$ ,  $v_{31} = v_{30} - v_{10}$ ), la potenza  $p(t)$  data dalla espressione (7) non dipende dal particolare terminale O preso come riferimento:

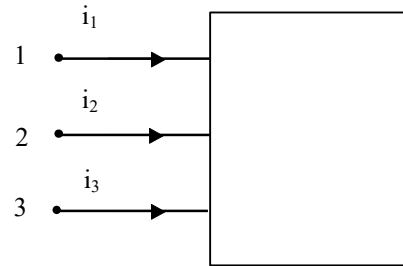


Figura 6

$$\begin{aligned} p(t) &= e_{10}(t) i_1(t) + e_{20}(t) i_2(t) + e_{30}(t) i_3(t) \\ p(t) &= v_{10}(t) i_1(t) + v_{20}(t) i_2(t) + v_{30}(t) (-i_1(t) - i_2(t)) = v_{13}(t) i_1(t) + v_{23}(t) i_2(t) \\ p(t) &= v_{10}(t) i_1(t) + v_{30}(t) i_3(t) + v_{20}(t) (-i_1(t) - i_3(t)) = v_{12}(t) i_1(t) + v_{32}(t) i_3(t) \\ p(t) &= v_{20}(t) i_2(t) + v_{30}(t) i_3(t) + v_{10}(t) (-i_2(t) - i_3(t)) = v_{21}(t) i_2(t) + v_{31}(t) i_3(t) \end{aligned} \quad (8)$$

Il valore medio in un periodo della potenza assorbita prende il nome di **potenza attiva** e viene indicato normalmente col simbolo P:

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt \quad (9)$$

La **potenza complessa** assorbita dal carico viene definita, con riferimento ad un terminale O arbitrario, dalla seguente relazione:

$$\underline{N} = \underline{V}_{10} \underline{I}_1^* + \underline{V}_{20} \underline{I}_2^* + \underline{V}_{30} \underline{I}_3^* \quad (10)$$

Analogamente a quanto precedentemente fatto, si dimostra che tale definizione non dipende dal terminale O assunto come riferimento, per cui risulta:

$$\underline{N} = \underline{E}_{10} \underline{I}_1^* + \underline{E}_{20} \underline{I}_2^* + \underline{E}_{30} \underline{I}_3^* = \underline{V}_{13} \underline{I}_1^* + \underline{V}_{23} \underline{I}_2^* = \underline{V}_{12} \underline{I}_1^* + \underline{V}_{32} \underline{I}_3^* = \underline{V}_{21} \underline{I}_2^* + \underline{V}_{31} \underline{I}_3^* \quad (11)$$

Si dimostra che la parte reale della potenza complessa coincide con la potenza attiva assorbita.

Si da invece il nome di **potenza reattiva** assorbita alla parte immaginaria della potenza complessa:

$$\underline{N} = P + j Q \quad (12)$$

Il modulo della potenza complessa assume il nome di **potenza apparente**:

$$N = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (13)$$

Il fattore di potenza  $\cos \Phi$  del carico è definito dalla seguente relazione:

$$\cos \Phi = \cos \left( \text{Arctan} \left( \frac{Q}{P} \right) \right) \quad (14)$$

Risulta perciò, tenendo conto della (13):  $P = N \cos \Phi$  ;  $Q = N \sin \Phi$  (15)

#### UTILIZZATORE EQUILIBRATO

Nel caso particolare, di notevole interesse tecnico, che l'utilizzatore U sia equilibrato, come già visto le correnti di linea hanno lo stesso valore efficace e risultano sfasate l'una rispetto all'altra di un angolo pari a  $2\pi/3$  (vedi figura 7).

Sia  $\varphi$  lo sfasamento tra tensione principale di fase e la corrispondente corrente di linea, dalla (11), risulta:

$$\begin{aligned} \underline{N} &= \underline{E}_{10}\underline{I}_1^* + \underline{E}_{20}\underline{I}_2^* + \underline{E}_{30}\underline{I}_3^* = 3\underline{E}_{10}\underline{I}_1^* = \\ &= 3EI \cos \varphi + j3EI \sin \varphi = \\ &= \sqrt{3}VI \cos \varphi + j\sqrt{3}VI \sin \varphi \end{aligned} \quad (16)$$

Tenendo conto delle (12-14) infine si ha:

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{3}VI \cos \varphi \\ Q &= \sqrt{3}VI \sin \varphi \\ N &= \sqrt{3}VI \\ \cos \Phi &= \cos \varphi \end{aligned} \quad (17)$$

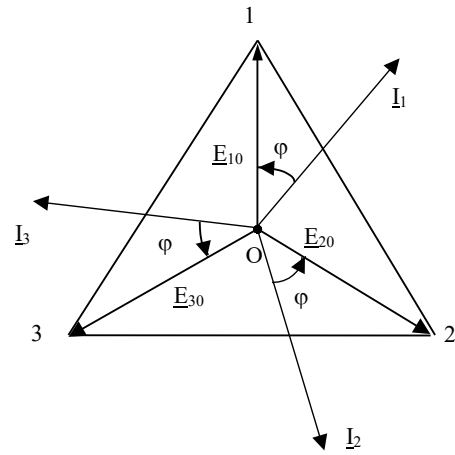


Figura 7

È rilevante osservare che **la potenza istantanea nei sistemi simmetrici ed equilibrati non è funzione del tempo**, contrariamente a quanto accade per i sistemi monofase o per il generico carico trifase non simmetrico o non equilibrato

#### MISURA DELLE POTENZE - INSERZIONE ARON

Si consideri il problema della misura della potenza attiva P assorbita da un generico utilizzatore trifase (considerazioni analoghe possono essere fatte per la misura della potenza reattiva). Sfruttando l'arbitrarietà del terminale O di riferimento è possibile misurare la potenza attiva del generico utilizzatore trifase facendo ricorso a due soli wattmetri, inseriti nel circuito come illustrato nella figura 8 (vedi eq. 11). La potenza attiva P assorbita dal carico risulta essere pari (a meno delle correzioni da apportare per tenere conto della dispersione degli strumenti) alla somma delle due letture degli strumenti:  $P = W_a + W_b$ .

Se il carico è equilibrato allora è possibile, dalla lettura dei due strumenti, ottenere anche il valore della potenza reattiva assorbita. Risulta infatti:

$$\begin{aligned} W_b + W_a &= \sqrt{3}VI \cos(\varphi) = P \\ W_b - W_a &= VI \sin(\varphi) = \frac{Q}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

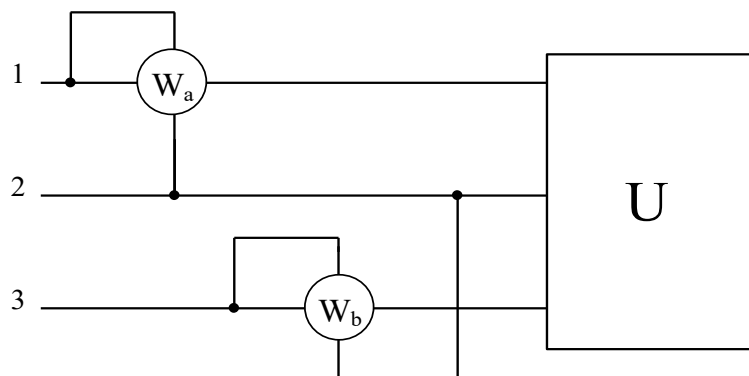


Figura 8. - Misura della potenza attiva - inserzione Aron

### STELLA DI IMPEDENZE

Il calcolo delle correnti nei rami di una stella di impedenze (vedi figura 9) si può eseguire con vari metodi. Si tratta di risolvere il seguente sistema nelle incognite  $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$ :

$$\begin{cases} \underline{V}_{12} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{Z}_2 \underline{I}_2 \\ \underline{V}_{23} = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 - \underline{Z}_3 \underline{I}_3 \\ \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Per la soluzione del sistema (18) si può utilizzare il teorema di Millman, con riferimento allo schema circuitale illustrato nella figura 10.

Risulta:

$$\underline{V}_{OC} = \frac{\underline{Y}_1 \underline{E}_{10} + \underline{Y}_2 \underline{E}_{20} + \underline{Y}_3 \underline{E}_{30}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_1 (\underline{E}_{10} - \underline{V}_{OC}) \\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_2 (\underline{E}_{20} - \underline{V}_{OC}) \\ \underline{I}_3 = \underline{Y}_3 (\underline{E}_{30} - \underline{V}_{OC}) \end{cases} \quad (20)$$

dove le  $\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \underline{Y}_3$  sono le ammettenze dei tre rami della stella.

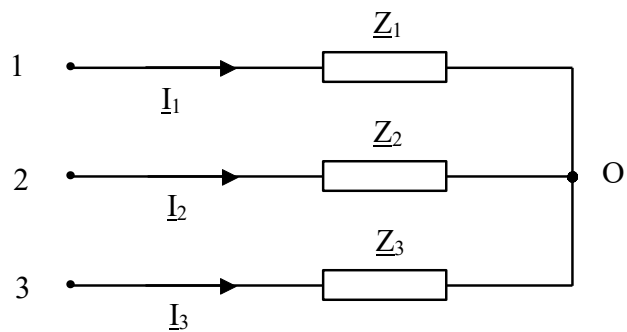


Figura 9.

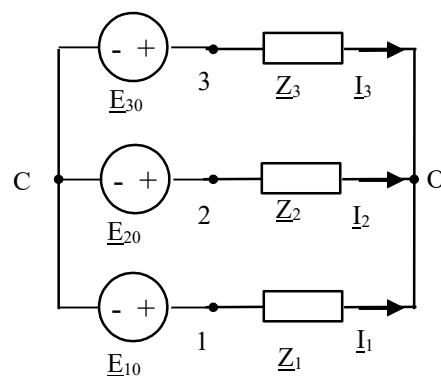


Figura 10.

### STELLA EQUILIBRATA

Le stelle equilibrate sono formate da tre impedenze uguali  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}$  (e quindi  $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \underline{Y}_3 = \underline{Y}$ ). In questo caso la (19) fornisce  $\underline{V}_{OC}=0$  e quindi dalle (20) si ottiene:

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1 \underline{E}_{10} \quad ; \quad \underline{I}_2 = \underline{Y}_2 \underline{E}_{20} \quad ; \quad \underline{I}_3 = \underline{Y}_3 \underline{E}_{30} \quad (21)$$

da cui si deduce che il sistema è anche equilibrato ( $|\underline{I}_1| = |\underline{I}_2| = |\underline{I}_3| = I$ ). Dal teorema di additività delle potenze, avendo indicato con  $\varphi$  l'angolo di sfasamento fra tensione e corrente in ogni singola fase, segue:

$$\underline{N} = \underline{N}_1 + \underline{N}_2 + \underline{N}_3 = 3 E I (\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)) \quad (22)$$

Dalla (22) segue inoltre che il fattore di potenza di una stella equilibrata di impedenze coincide con il fattore di potenza di ciascuna impedenza.

### TRIANGOLO DI IMPEDENZE

Il calcolo delle correnti nei rami di un triangolo di impedenze (vedi figura 11) si esegue direttamente se sono note le impedenze dei rami e le tensioni concatenate. Dalle correnti  $I_{12}$ ,  $I_{23}$ ,  $I_{31}$  (correnti di fase) si deducono immediatamente le correnti assorbite dalla linea  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ , vedi eq. (23)

$$\begin{cases} I_{12} = \frac{V_{12}}{Z_{12}} \\ I_{23} = \frac{V_{23}}{Z_{23}} \\ I_{31} = \frac{V_{31}}{Z_{31}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = I_{12} - I_{31} \\ I_2 = I_{23} - I_{12} \\ I_3 = I_{31} - I_{23} \end{cases} \quad (23)$$

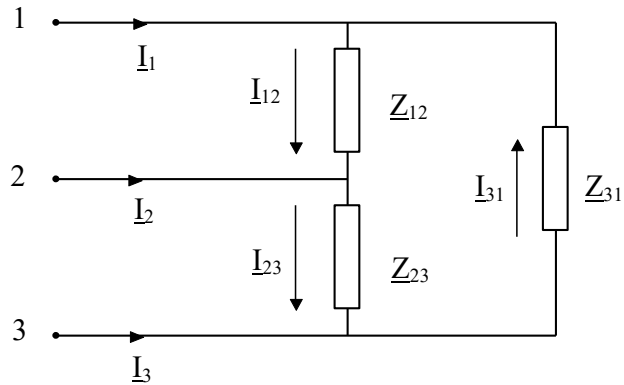


Figura 11.

### TRIANGOLO EQUILIBRATO

Il triangolo di impedenze è equilibrato quando le tre impedenze che lo costituiscono sono tutte uguali:  $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z$ . In questo caso, dalle (23) si ottiene:

$$\begin{cases} I_1 = \frac{V_{12} - V_{31}}{Z} = \frac{E_{10} - E_{20} - (E_{30} - E_{10})}{Z} = \frac{3E_{10} - (E_{10} + E_{20} + E_{30})}{Z} = \frac{3E_{10}}{Z} \\ I_2 = \frac{3E_{20}}{Z} = I_1 e^{-j\frac{2}{3}\pi}, \quad I_3 = \frac{3E_{20}}{Z} = I_2 e^{-j\frac{2}{3}\pi} \end{cases} \quad (24)$$

da cui si deduce che il sistema è anche equilibrato ( $|I_1| = |I_2| = |I_3| = I$ ). Inoltre le correnti di fase  $I_{12}$ ,  $I_{23}$ ,  $I_{31}$ , risultano ridotte di un fattore  $\sqrt{3}$  rispetto alle tensioni di linea, come si può vedere dalla figura 12, ed in modulo uguali fra loro ( $|I_{12}| = |I_{23}| = |I_{31}| = I_{\text{fase}}$ ).

Dal teorema di additività delle potenze, avendo indicato con  $\varphi$  l'angolo di sfasamento fra tensione e corrente in ogni singola fase, segue:

$$\begin{aligned} \underline{N} &= \underline{N}_1 + \underline{N}_2 + \underline{N}_3 = \\ &= 3VI_{\text{fase}}(\cos\varphi + j\sin\varphi) \end{aligned} \quad (25)$$

Dalla (25) segue inoltre che il fattore di potenza di un triangolo equilibrato di impedenze coincide con il fattore di potenza di ciascuna impedenza.

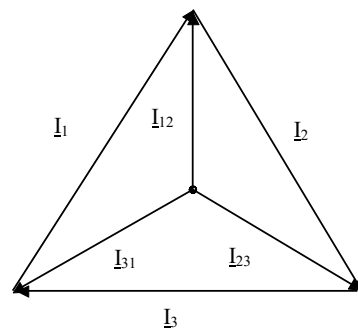


Figura 12. Rappresentazione delle correnti di fase e delle correnti di linea nel caso di un triangolo di impedenze equilibrato

### SISTEMI A QUATTRO FILI (TRIFASE CON NEUTRO)

La presenza di un quarto filo  $n$  (**neutro**), porta a considerare sistemi del tipo indicato nella figura 13. Se si alimenta il sistema con tre generatori disposti a stella aventi f.e.m. simmetriche disposte in terna diretta ( $\underline{E}_g, \alpha^2 \underline{E}_g, \alpha \underline{E}_g$ ) si stabilisce fra i fili 1, 2, 3 una terna di tensioni concatenate simmetrica (a meno delle eventuali cadute), le cui tensioni principali di fase sono le f.e.m. suddette. Oltre a ciò si rende disponibile fra ciascuna fase ed il neutro una tensione di modulo  $E$ . In nessun caso ci sono particolari problemi di calcolo in quanto, trascurando le cadute di tensione sulla linea, è sempre nota a priori la tensione applicata a ciascuna impedenza.

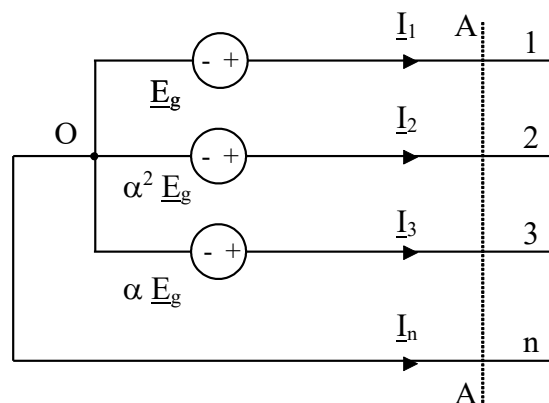


Figura 13. - Schema del generatore per sistemi trifase con neutro

Il collegamento è adatto per carichi aventi una certa probabilità di squilibrio: in tal modo si assicurano tensioni con lo stesso valore efficace su tutte le impedenze di carico a stella, anche se sono diverse tra loro. Infatti, trascurando le cadute di tensione sul neutro, la tensione tra i centri stella è nulla e le correnti assorbite dalla linea sono calcolabili come  $\underline{I}_k = \underline{E}_{k0} / \underline{Z}_k$ ,  $k=1,2,3$ . La corrente nel neutro sarà tanto maggiore quanto più è pronunciato lo squilibrio dei carichi, come risulta dalla seguente formula:

$$\underline{I}_n = -(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3) = -\left(\frac{\underline{E}_{10}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{E}_{20}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{E}_{30}}{\underline{Z}_3}\right) \quad (26)$$

### RIFASAMENTO DI UN UTILIZZATORE TRIFASE

Si consideri un utilizzatore  $U$  di tipo induttivo che assorba dalla linea la potenza reattiva  $Q$  e la potenza attiva  $P$  e sia caratterizzato da un fattore di potenza  $\cos \varphi$ . Analogamente al caso dei sistemi monofase, aumentare il fattore di potenza del carico, a parità di potenza attiva assorbita, permette di ridurre le correnti di linea assorbite, a cui seguono una riduzione delle cadute di tensione sulla linea e della potenza dissipata per effetto Joule sulla linea stessa. Se il fattore di potenza dell'utilizzatore è troppo basso, è quindi necessario rifasare tale utilizzatore, ponendo in parallelo ad esso un banco di condensatori, collegati a stella (vedi figura 14) od a triangolo (vedi figura 15). Sia  $\cos \varphi'$  il fattore di potenza che si vuole ottenere per il carico costituito dall'utilizzatore  $U$  con in parallelo il banco di condensatori. Facendo riferimento alla figura 14, la potenza reattiva assorbita dalla linea a destra della sezione  $B'B'$  è data da:

$$Q_t = Q + Q_c = P \tan(\varphi) + Q_c$$

avendo indicato con  $Q_c$  la potenza reattiva assorbita dai condensatori. Si ha quindi:

$$\tan(\varphi') = \frac{Q_t}{P} = \tan(\varphi) + \frac{Q_c}{P} \Rightarrow Q_c = P (\tan(\varphi') - \tan(\varphi)) \quad (28)$$

L'ultima relazione esprime la potenza reattiva che deve essere assorbita dalla batteria di condensatori per portare il fattore di potenza da  $\cos \varphi$  a  $\cos \varphi'$ .

### ◆ Condensatori a stella

Se, come nel caso di figura 14, i condensatori sono disposti a stella, si ha:

$$Q_c = 3 \frac{E^2}{X_c} = -\omega C_y V^2$$

da cui:

$$C_y = \frac{P(\tan(\varphi) - \tan(\varphi'))}{\omega V^2} \quad (29)$$

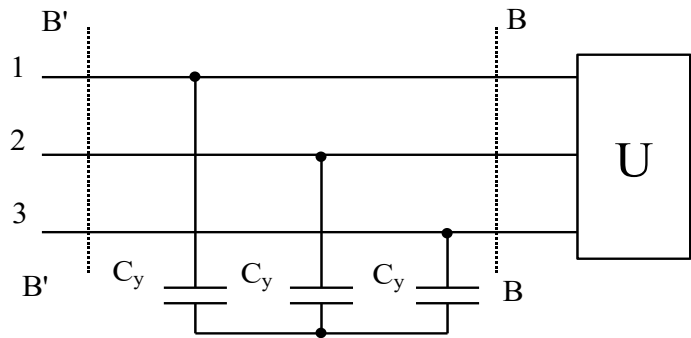


Figura 14.

### ◆ Condensatori a triangolo

Se, come nel caso della figura 15, i condensatori sono collegati a triangolo, risulta:

$$Q_c = 3 \frac{V^2}{X_c} = -3\omega C_\Delta V^2$$

da cui:

$$C_\Delta = \frac{P(\tan(\varphi) - \tan(\varphi'))}{3\omega V^2} \quad (30)$$

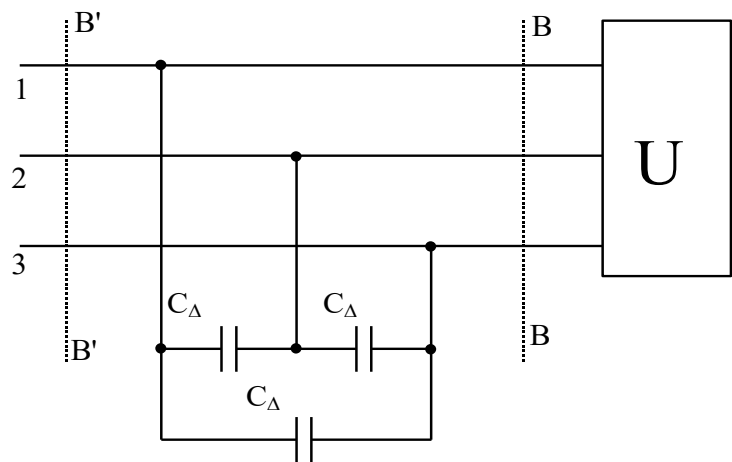


Figura 15.

Quindi se i condensatori sono disposti a triangolo si richiede che essi abbiano capacità tre volte inferiori di quelle di un collegamento a stella. Tuttavia con un collegamento a triangolo ciascun condensatore è sottoposto alla tensione di linea  $V$ , mentre con un collegamento a stella ciascun condensatore è sottoposto alla tensione di fase  $E = V/\sqrt{3}$ .

I morsetti dei condensatori sono fra loro collegati a due a due mediante resistenze di valore molto elevato, le quali, quando i condensatori sono in esercizio, dissipano una potenza molto piccola, in relazione al loro valore elevato, ma consentono ai condensatori di scaricarsi non appena venga interrotto il collegamento con la linea.

## TRASMISSIONE E DISTRIBUZIONE DELL'ENERGIA ELETTRICA

In generale il trasferimento di energia elettrica tra due punti, nei sistemi elettrici di potenza (escludendo quindi il campo delle telecomunicazioni), può avvenire nei seguenti tre modi:

- corrente continua;
- corrente alternata monofase a frequenza industriale (50 Hz per l'Europa, 60 Hz per gli USA);
- corrente alternata trifase a frequenza industriale.

Il confronto tra i pesi di materiale conduttore è uno dei criteri che determina la convenienza economica della linea. Infatti, il peso del conduttore incide sia sul costo proprio dei conduttori che su

quello dei sostegni, della posa in opera della linea, etc. Il confronto tra i tre sistemi di trasmissione deve essere effettuato rispettando le seguenti ipotesi:

- parità della potenza trasmessa  $P$  [W];
- parità della tensione di trasmissione  $V$  [V];
- parità della lunghezza della linea  $L$  [m];
- parità della potenza dissipata sulla linea  $\Delta p$  [W];
- parità di conduttore (quindi stesso peso specifico  $\gamma$  e stessa resistività  $\rho$ ).

1) **corrente continua:** Indicando con  $R_l$  la resistenza di linea relativa ad un conduttore e con  $I$  la corrente di linea, la potenza persa nei due conduttori è data da:  $\Delta p = 2 R_l I^2$

$$\text{Sostituendo le espressioni } R_l = \rho L/S \text{ e } I = P/V \text{ si ottiene: } \Delta p = \frac{2\rho L P^2}{S V^2} \Rightarrow S = \frac{2\rho L P^2}{\Delta p V^2}$$

Essendo  $S$  e  $2LS$  rispettivamente la sezione ed il volume dei conduttori di linea, il peso totale dei conduttori di linea è dato da:

$$G_{cc} = 2LS\gamma = \frac{4\gamma\rho L^2 P^2}{\Delta p V^2} = 4k \quad (31)$$

dove si è definito il fattore costante  $k = \gamma\rho L^2 P^2 / (V^2 \Delta p)$ .

2) **corrente alternata monofase:** rispetto al caso precedente cambia solo l'espressione della corrente che è  $I = P / (V \cos\varphi)$  e pertanto, nella formula del peso comparirà a denominatore il termine  $\cos^2\varphi$ , ottenendo:

$$G_{cam} = 2LS\gamma = \frac{4\gamma\rho L^2 P^2}{\Delta p V^2 \cos^2(\varphi)} = \frac{4k}{\cos^2(\varphi)} \quad (32)$$

3) **corrente alternata trifase:** essendo tre i conduttori si ha  $\Delta p = 3 R_l I^2$ , dove  $R_l = \frac{\rho L}{S}$  e

$$I = \frac{P}{\sqrt{3}V \cos(\varphi)}; \text{ Sostituendo si ottiene: } \Delta p = \frac{\rho L P^2}{S V^2 \cos^2(\varphi)} \Rightarrow S = \frac{\rho L P^2}{\Delta p V^2 \cos^2(\varphi)}$$

Il peso dei tre conduttori di linea è dato da:

$$G_{cat} = 3LS\gamma = \frac{3\gamma\rho L^2 P^2}{\Delta p V^2 \cos^2(\varphi)} = \frac{3k}{\cos^2(\varphi)} \quad (33)$$

Confrontando le espressioni (31), (32) e (33) e tenendo presente che  $\cos^2\varphi \leq 1$ , si possono trarre le seguenti conclusioni:

- i pesi in corrente alternata monofase e trifase dipendono dal fattore di potenza, tendendo all'infinito per  $\cos\varphi$  tendente a zero e assumendo i valori minimi per  $\cos\varphi = 1$ , valori che sono rispettivamente:  $(G_{cam})_{min} = 4k$ ,  $(G_{cat})_{min} = 3k$ ;
- per qualsiasi valore di  $\cos\varphi$ , essendo  $G_{cat} < G_{cam}$ , il peso della linea in corrente alternata trifase è sempre minore di quello in corrente alternata monofase;
- per qualsiasi valore di  $\cos\varphi$ , essendo  $G_{cc} < G_{cam}$ , il peso dei conduttori in corrente continua è sempre inferiore a quello in corrente alternata monofase, salvo che per  $\cos\varphi = 1$ , caso in cui i due pesi sono uguali;
- risolvendo la disequazione  $G_{cc} < G_{cat}$  si ottiene  $\cos^2(\varphi) \leq 3/4$  e quindi, considerando solo il valore positivo,  $\cos(\varphi) \leq \sqrt{3}/2 = 0.866$ . Quanto sopra porta alla conclusione che, per valori di  $\cos(\varphi)$

$\cos(\varphi) < 0.866$ , il peso in corrente alternata trifase è maggiore di quello in corrente continua e viceversa; per  $\cos(\varphi) = 0.866$  i due pesi sono uguali.

In definitiva, per fattori di potenza maggiori di 0.866, il sistema di trasmissione più conveniente, per quanto concerne il peso dei conduttori, è quello in corrente alternata trifase, mentre per  $\cos(\varphi) < 0.866$  diventa più conveniente quello in corrente continua. Risulta anche evidente, nei casi di impiego della corrente alternata, la convenienza di un elevato valore del  $\cos \varphi$ , essendo il peso dei conduttori proporzionale al suo quadrato. Le considerazioni fatte possono essere sintetizzate nel grafico di figura 16.

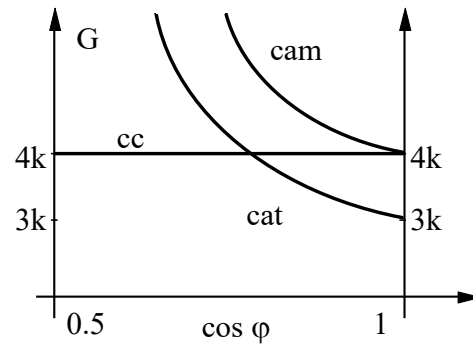


Figura 16.

Oltre al criterio precedente occorre considerare anche altri elementi di valutazione.

- La generazione di energia elettrica avviene quasi totalmente sotto forma di corrente alternata trifase, in quanto i relativi generatori (alternatori trifase) sono costruttivamente più semplici e robusti dei generatori in corrente continua; anche l'utilizzazione avviene prevalentemente in corrente alternata. Volendo effettuare la trasmissione in corrente continua occorre una stazione di conversione a monte ed una a valle della linea. Attualmente la conversione avviene mediante raddrizzatori statici.
- La trasmissione in corrente continua presenta il vantaggio, rispetto alle linee trifase, di un minore costo degli isolatori e dei sostegni, sia per il fatto di impiegare due conduttori (o anche uno se il ritorno è effettuato a terra) anziché tre, sia perché, a parità di valore efficace della tensione  $V$ , la linea a corrente alternata va costruita con un livello di isolamento proporzionato al valore massimo  $V_M = \sqrt{2} V$ , mentre quella a corrente continua deve essere isolata solo per la tensione  $V$ ; questi vantaggi risultano particolarmente importanti per le linee lunghe ad altissima tensione;
- In corrente continua c'è una minore caduta di tensione di linea perché manca la caduta di tensione dovuta alla reattanza induttiva. Altro vantaggio, particolarmente sensibile nelle linee in cavo, è l'assenza di effetti capacitivi.

Attualmente la trasmissione di energia elettrica a tensione 220kV - 380kV si effettua con linee aeree trifasi; la corrente continua è stata adottata, per esempio, per l'attraversamento di tratti di mare con cavo sottomarino (Toscana - Corsica - Sardegna a 200kV, Inghilterra - Francia, fiordi norvegesi, etc.).



# TRASFORMATORI

## 1. PRINCIPIO DI FUNZIONAMENTO

Il trasformatore è costituito da un anello (nucleo) di materiale ferromagnetico (tipicamente lamine sottili di acciaio al silicio) su cui sono avvolti due avvolgimenti: il “primario”, costituito da  $n_1$  spire ed il “secondario” costituito da  $n_2$  spire. Si tratta quindi di un doppio bipolo. Se il primario è alimentato da un generatore di tensione  $v_1$  (“tensione primaria”), in modo tale che il primario sia percorso da una corrente  $i_1$  (“corrente primaria”), e si lascia aperto il secondario, cosicché la corrente  $i_2$  (“corrente secondaria”) sia nulla, nell’anello si stabilirà un campo di induzione magnetica (a cui corrisponde il flusso “principale”  $\phi$  indicato in figura 1.1.a)<sup>(#)</sup>. Si noti che le linee del campo di induzione si concatenano anche con l’avvolgimento secondario, cosicché, se  $i_1$  varia nel tempo, dalla legge di Faraday (o dell’induzione elettromagnetica), sarà indotta ai terminali del secondario una tensione  $v_2$  (“tensione secondaria”). Se il secondario è connesso ad un carico (ad esempio un resistore), circolerà pertanto corrente su di esso. Mediante il trasformatore è quindi possibile trasferire potenza elettrica dall’avvolgimento primario a quello secondario, senza fare ricorso ad alcun collegamento elettrico tra i due avvolgimenti; il trasferimento di potenza avviene invece attraverso il campo magnetico che è presente principalmente nel nucleo del trasformatore e che è in grado di scambiare energia con entrambi i circuiti.

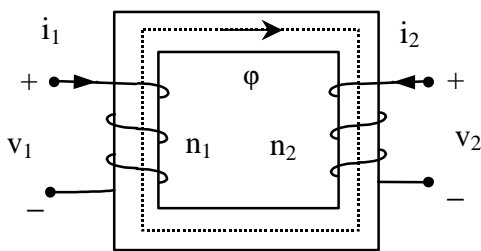


Figura 1.1.a - Schema di principio di un trasformatore monofase.

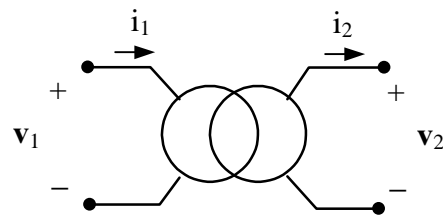


Figura 1.1.b - Simbolo del trasformatore.

Il nucleo magnetico del trasformatore consiste normalmente in un pacco di lamierini di acciaio al silicio, che presenta due forme costruttive comuni mostrate nelle figure 1.2.a e 1.2.b.

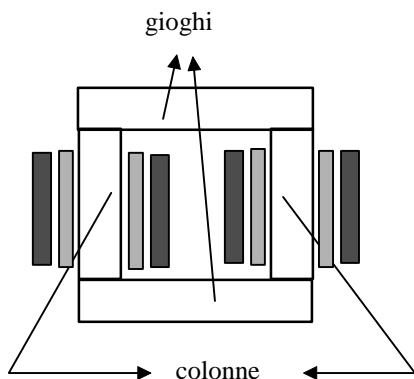


Figura 1.2.a.  
Trasformatore con nucleo a colonne

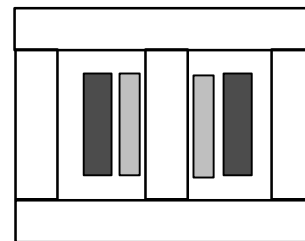


Figura 1.2.b  
Trasformatore con nucleo a mantello

<sup>(#)</sup> Si dice flusso principale il flusso del campo di induzione magnetica attraverso una sezione normale alla linea d’asse del nucleo di materiale ferromagnetico.

Nel tipo con nucleo a colonne ciascun avvolgimento è costituito da due bobine in serie, ciascuna avvolta su di una colonna del trasformatore. Nel tipo con nucleo a mantello, entrambi gli avvolgimenti sono avvolti sulla colonna centrale del nucleo. La configurazione a mantello minimizza il flusso disperso, quella a colonne minimizza la quantità di lamierini utilizzati. Gli avvolgimenti primario e secondario possono essere:

- *concentrici* (figura 1.3.a): le colonne sono rivestite di materiale isolante; sul materiale isolante viene quindi posto l'avvolgimento a bassa tensione, che viene a sua volta rivestito di materiale isolante. Sul secondo strato di materiale isolante viene posto l'avvolgimento ad alta tensione. In un trasformatore monofase, ognuna delle due colonne porta metà delle spire. In un trasformatore trifase, ogni colonna porta una fase a bassa tensione e la fase ad alta tensione corrispondente.
- *a bobine alternate* (figura 1.3.b): sono ottenuti alternando gli avvolgimenti a bassa e ad alta tensione, che vengono separate mediante corone di materiale isolante.

Gli avvolgimenti a bobine alternate presentano un miglior accoppiamento magnetico; gli avvolgimenti concentrici consentono un miglior isolamento.

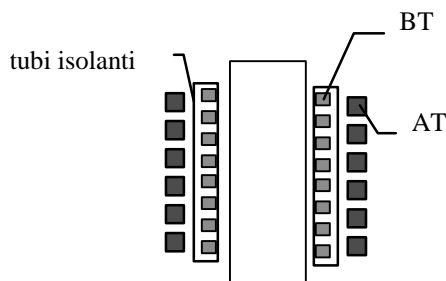


Figura 1.3.a. - Avvolgimenti concentrici

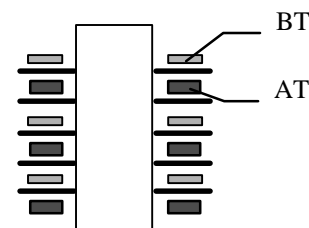


Figura 1.3.b. - Avvolgimenti a bobine alternate

La laminazione del nucleo magnetico si rende necessaria al fine di ridurre le perdite per correnti parassite. I gioghi sono normalmente a sezione rettangolare, mentre per le colonne si preferisce una sezione a "gradini" in modo da ridurre la lunghezza degli avvolgimenti (figura 1.4).

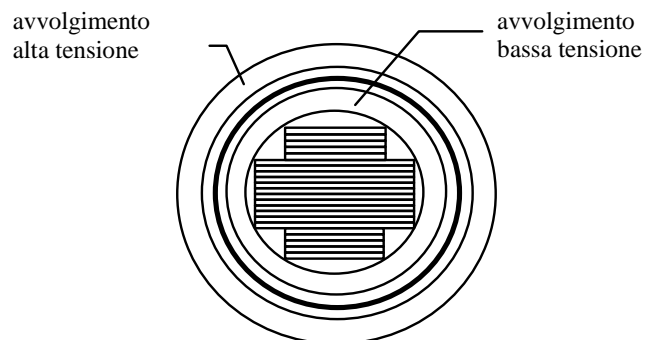


Figura 1.4 - sezione di una colonna del nucleo magnetico

## 2. IL TRASFORMATORE IDEALE

Se si suppone che

- 1) non vi siano perdite negli avvolgimenti (dette "perdite nel rame"),
- 2) non si siano perdite nel nucleo ferromagnetico (dette "perdite nel ferro"),
- 3) tutte le linee del campo di induzione magnetica si concatenino ad entrambi gli avvolgimenti (equivalente ad assumere che non vi siano flussi dispersi) e che il materiale ferromagnetico abbia "permeabilità magnetica infinita",

è possibile dedurre il modello del "trasformatore ideale" come segue. Dalla legge di Faraday possiamo determinare le tensioni ai capi degli avvolgimenti primario e secondario come derivate temporali dei flussi concatenati agli avvolgimenti stessi ( $v_1 = d\phi_{c1}/dt$ ,  $v_2 = d\phi_{c2}/dt$ ). Inoltre, grazie all'ipotesi 3) i flussi concatenati sono ottenibili semplicemente moltiplicando i numeri di spire per il flusso principale ( $\phi_{c1} = n_1 \phi$ ,  $\phi_{c2} = n_2 \phi$ ). Si ottengono quindi le relazioni  $v_1 = n_1 d\phi/dt$ ,  $v_2 = n_2$

$d\phi/dt$ , da cui, effettuando il rapporto membro a membro, otteniamo la relazione tra le tensioni a primario e secondario:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (1)$$

Una equazione di accoppiamento magnetico tra primario e secondario si ottiene mediante la legge della circuitazione magnetica (o di Ampère-Maxwell) applicata alla linea d'asse dell'anello di materiale ferromagnetico. Grazie all'ipotesi 3) il campo magnetico nel materiale è trascurabile. Pertanto; con riferimento ai versi positivi indicati nella figura 1 si ottiene che la somma delle correnti concatenate alla linea è nulla<sup>(o)</sup>:

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 = 0$$

Si ottiene quindi la relazione tra le correnti a primario e secondario:

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{n_2}{n_1} \quad (2)$$

Se si definisce il rapporto di trasformazione  $K = n_1/n_2$ , il trasformatore ideale, il cui simbolo è indicato nella figura 2, risulta definito dalle seguenti caratteristiche:

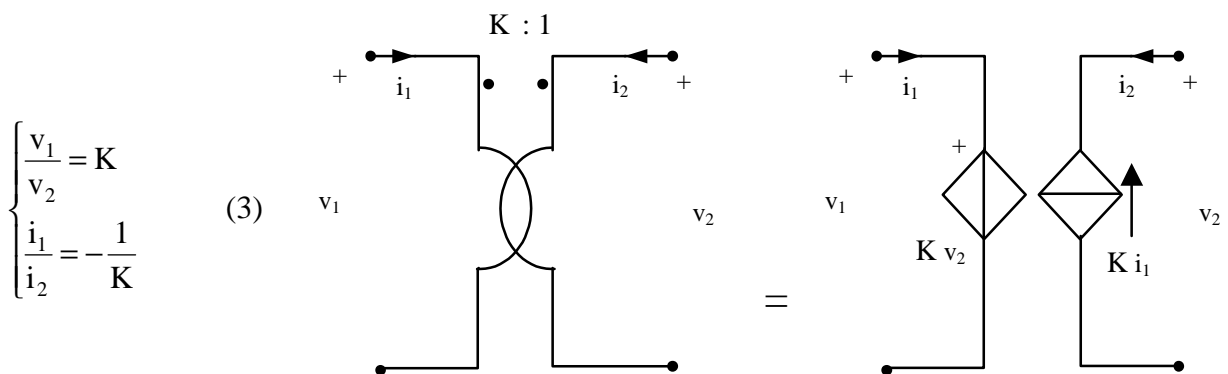


Figura 2 - Trasformatore ideale e circuito equivalente.

Si noti che in figura 2 una coppia di terminali è segnata con un punto, indicando quindi i versi di riferimento positivi delle tensioni e delle correnti per cui le equazioni costitutive (3) sono corrette. In figura 2 è mostrato inoltre uno dei possibili circuiti equivalenti del trasformatore ideale. Si noti anche che, poiché il trasformatore ideale è un componente ideale definito dalle (3), le relazioni tra tensioni e correnti a primario e secondario sono valide per tutte le forme d'onda e per tutte le frequenze (inclusa la continua).

Il trasformatore ideale gode delle due seguenti proprietà fondamentali:

1. Il trasformatore ideale non dissipa né accumula energia. Dalle (3) risulta evidente che la potenza assorbita dal trasformatore ideale è nulla; infatti, con riferimento ai versi di riferimento positivi delle tensioni e delle correnti definiti in figura 2, si ha

<sup>(o)</sup> Se la permeabilità del materiale ferromagnetico costituente il nucleo fosse finita e costante, si otterrebbe la Legge di Hopkinson:

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 = \mathcal{R} \phi$$

$$p(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = (Kv_2(t))\left(-\frac{i_2(t)}{K}\right) + v_2(t)i_2(t) = -v_2(t)i_2(t) + v_2(t)i_2(t) = 0$$

Quindi la somma delle potenze assorbite a primario e secondario è complessivamente nulla, ovvero la potenza assorbita a primario dal trasformatore ideale ( $p_1 = v_1 i_1$ ) risulta in ogni istante uguale a quella erogata al secondario ( $p_2 = -v_2 i_2$ ). In particolare, con riferimento al regime sinusoidale di frequenza  $f$  dalle (3) risulta  $\underline{V}_1 = K\underline{V}_2$ ,  $\underline{I}_2 = -K\underline{I}_1$  e quindi la potenza complessa assorbita a primario dal trasformatore ideale  $\underline{N}_1 = \underline{V}_1(\underline{I}_1)^*$  risulta uguale a quella erogata al secondario  $\underline{N}_2 = -\underline{V}_2(\underline{I}_2)^*$ . Il trasformatore ideale cioè non assorbe né potenza attiva né potenza reattiva; risultano però mutati i parametri (tensione e corrente) con cui la energia elettrica viene assorbita a primario ed erogata a secondario: la tensione viene ridotta (od aumentata) di un fattore pari al rapporto di trasformazione del trasformatore  $K$  mentre la corrente viene aumentata (o diminuita) dello stesso fattore.

2. Quando a secondario di un trasformatore ideale è collegato un resistore di resistenza  $R$ , il primario si comporta come un resistore di resistenza equivalente  $K^2R$ . Tale equivalenza è illustrata nella figura 3 e prende il nome di “riduzione da secondario a primario”. La dimostrazione è immediata:

$$v_1(t) = K v_2(t) = K [-R i_2(t)] = -KR [-K i_1(t)] = K^2 R i_1(t)$$

Analogamente, con riferimento al regime sinusoidale di frequenza  $f$  dalle (3) risulta anche che quando a secondario di un trasformatore ideale è collegato una impedenza  $\underline{Z}$ , il primario si comporta come una impedenza di valore  $K^2\underline{Z}$ .

$$\underline{V}_1(t) = K \underline{V}_2(t) = K [-\underline{Z} \underline{I}_2(t)] = -K\underline{Z} [-K \underline{I}_1(t)] = K^2 \underline{Z} \underline{I}_1(t)$$

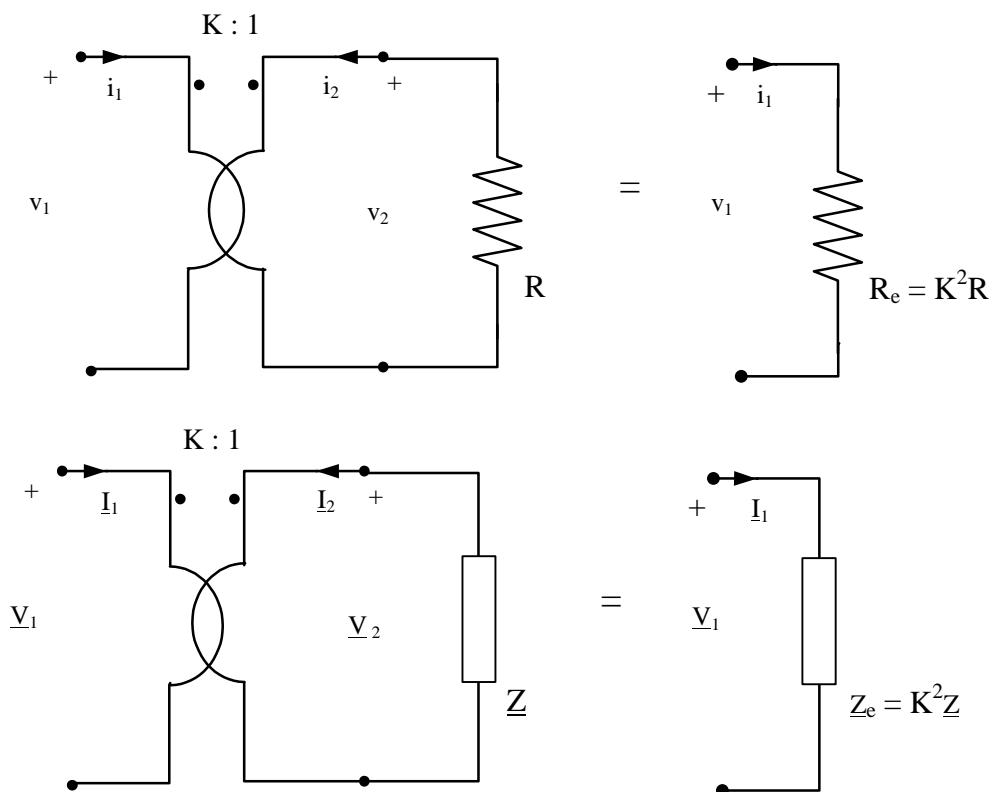


Figura 3 - Riduzione da secondario a primario.

### 3. INDUTTORI ACCOPPIATI LINEARI

Se si suppone che

- 1) non vi siano perdite negli avvolgimenti (dette “perdite nel rame”),
- 2) non si siano perdite nel nucleo ferromagnetico (dette “perdite nel ferro”),
- 3) il materiale ferromagnetico abbia permeabilità magnetica costante (materiale lineare),

è possibile dedurre il modello degli “induttori accoppiati lineari” come segue. Analogamente a quanto visto per il trasformatore ideale, dalla legge di Faraday possiamo determinare le tensioni ai capi degli avvolgimenti primario e secondario come derivate temporali dei flussi concatenati agli avvolgimenti stessi ( $v_1 = d\phi_{c1}/dt$ ,  $v_2 = d\phi_{c2}/dt$ ). Inoltre, grazie alla linearità del materiale, i flussi concatenati sono ottenibili semplicemente come combinazioni lineari delle correnti a primario e secondario (sorgenti del campo magnetico):

$$\begin{cases} \phi_{c1} = L_1 i_1 + M i_2 \\ \phi_{c2} = M i_1 + L_2 i_2 \end{cases}$$

dove  $L_1$  ed  $L_2$  (misurati in H [Henry]) sono, rispettivamente i **coefficienti di auto induzione** del primario e del secondario ed  $M$  (misurata in H) è il **coefficiente di mutua induzione** tra i due avvolgimenti. Si intende sottolineare che i coefficienti di auto e mutua induzione dipendono esclusivamente dalla geometria e dalle caratteristiche magnetiche del materiale del nucleo.

Il doppio bipolo lineare “induttori accoppiati” (illustrato in figura 4) risulta quindi descritto dalle seguenti relazioni tensione-corrente:

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases} \quad (4)$$

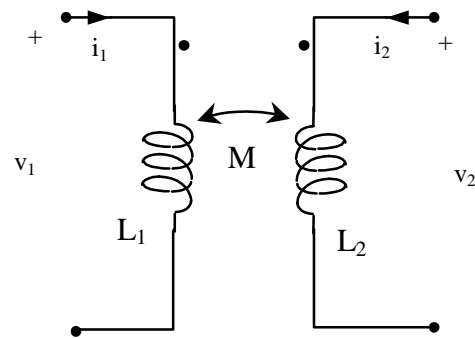


Figura 4 - Induttori accoppiati.

Si noti che in figura 4 una coppia di terminali è segnata con un punto, indicando quindi i versi di riferimento positivi delle tensioni e delle correnti per cui le equazioni costitutive (4) sono corrette. Si noti inoltre che, poiché gli induttori accoppiati sono un componente ideale definito dalle (4), le relazioni tra tensioni e correnti a primario e secondario sono valide per tutte le forme d’onda e per tutte le frequenze (inclusa la continua).

Con riferimento al regime sinusoidale di frequenza  $f$  le (4) possono essere scritte in termini di numeri complessi rappresentativi delle tensioni e delle correnti, come segue:

$$\begin{cases} \underline{V}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 \\ \underline{V}_2 = j\omega M \underline{I}_1 + j\omega L_2 \underline{I}_2 \end{cases}$$

Il doppio bipolo “induttori accoppiati” gode delle due seguenti proprietà fondamentali:

1. Il doppio bipolo “induttori accoppiati” è un componente con memoria in grado di immagazzinare energia magnetica. Dalle (4) risulta infatti che la potenza assorbita dagli induttori accoppiati, con riferimento ai versi di riferimento positivi delle tensioni e delle correnti definiti in figura 4, è data da:

$$\begin{aligned}
p(t) &= v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = \\
&= L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} = \\
&= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \right) + \frac{d}{dt} (M i_1 i_2) + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) = \\
&= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) = \frac{d}{dt} E_m
\end{aligned}$$

Tale relazione mostra come tutta la potenza elettrica assorbita dagli induttori accoppiati vada ad incrementare il termine  $E_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$  che assume quindi il significato di energia elettromagnetica accumulata negli induttori accoppiati (si noti che il primo ed il terzo termine coincidono con le energie magnetiche accumulate dagli induttori  $L_1$  ed  $L_2$  se fossero non accoppiati; il termine  $M i_1 i_2$ , che prende invece il nome di energia mutua, è quello che rende possibile trasferire potenza elettrica dall'avvolgimento primario a quello secondario, senza fare ricorso ad alcun collegamento elettrico tra i due avvolgimenti); tale energia, una volta immagazzinata, può essere interamente restituita ai componenti del circuito cui sono collegati gli induttori accoppiati durante un transitorio successivo. La potenza elettrica assorbita dagli induttori accoppiati può quindi assumere valori sia positivi che negativi.

Esiste una relazione notevole che lega i coefficienti di auto e mutua induzione:  $|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$ . Questa relazione è una conseguenza diretta del fatto che l'energia magnetica è sempre positiva. Infatti, con semplici passaggi si ottiene (ricordando che l'autoinduttanza è sempre positiva):

$$0 \leq E_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 = \frac{1}{2 L_2} \left[ (L_2 i_2 + M i_1)^2 + i_1^2 (L_1 L_2 - M^2) \right]$$

Quindi, dato che il primo termine della somma si può annullare per una opportuna scelta dei valori delle correnti, il secondo termine deve essere sempre positivo o nullo.

La mutua induttanza  $M$  è spesso espressa in funzione del coefficiente di accoppiamento  $k$  definito da:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

La relazione appena provata mostra quindi che  $|k| \leq 1$ , ovvero è impossibile ottenere un coefficiente di accoppiamento maggiore di uno. Quando  $k = 0$ , si ha  $M = 0$ , cioè non esiste accoppiamento magnetico fra gli induttori. Quando  $k = 1$ , si ha  $|M| = \sqrt{L_1 L_2}$ , cioè l'accoppiamento magnetico fra gli induttori è perfetto.

2. Il doppio bipolo "induttori accoppiati" è equivalente ad un doppio bipolo costituito da un trasformatore ideale e da tre induttori (disaccoppiati)  $L_0$ ,  $L_{d1}$  ed  $L_{d2}$ . Per dimostrare tale equivalenza, illustrata in figura 6, è sufficiente verificare che relazioni tensione-corrente sono le stesse. Si ha infatti:

- Applicando la LKT a primario:  $v_1 = L_{d1} \frac{di_1}{dt} + L_0 \frac{d}{dt} (i_1 - i_1')$

▪ Dalle caratteristiche (3) del Trasformatore ideale: 
$$\begin{cases} L_0 \frac{d}{dt}(i_1 - i'_1) = K \left( v_2 - L_{d2} \frac{di_2}{dt} \right) \\ i'_1 = -\frac{1}{K} i_2 \end{cases}$$

Sostituendo l'ultima relazione nelle precedenti si ottiene quindi: 
$$\begin{cases} v_1 = (L_0 + L_{d1}) \frac{di_1}{dt} + \frac{L_0}{K} \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = \frac{L_0}{K} \frac{di_1}{dt} + \left( \frac{L_0}{K^2} + L_{d2} \right) \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

Tali relazioni coincidono con le caratteristiche (4) degli induttori accoppiati se  $L_1 = L_0 + L_{d1}$ ,  $L_2 = L_{d2} + L_0/K^2$  ed  $M = L_0/K$ .

L'interpretazione fisica di tale equivalenza, è la seguente:  $L_{d1}$  ed  $L_{d2}$  sono le *induttanze di dispersione*, cioè le induttanze viste a primario ed a secondario dovute ai flussi di dispersione, ovvero alle linee di campo magnetico che non si concatenano ad entrambe le bobine. Infatti, per  $k \rightarrow 1$ , si ha  $M^2 \rightarrow L_1 L_2$ , e quindi  $L_{d1}, L_{d2} \rightarrow 0$ .  $L_0$  è detta *induttanza magnetizzante*: essa tiene conto del flusso principale, comune ad entrambi gli avvolgimenti.

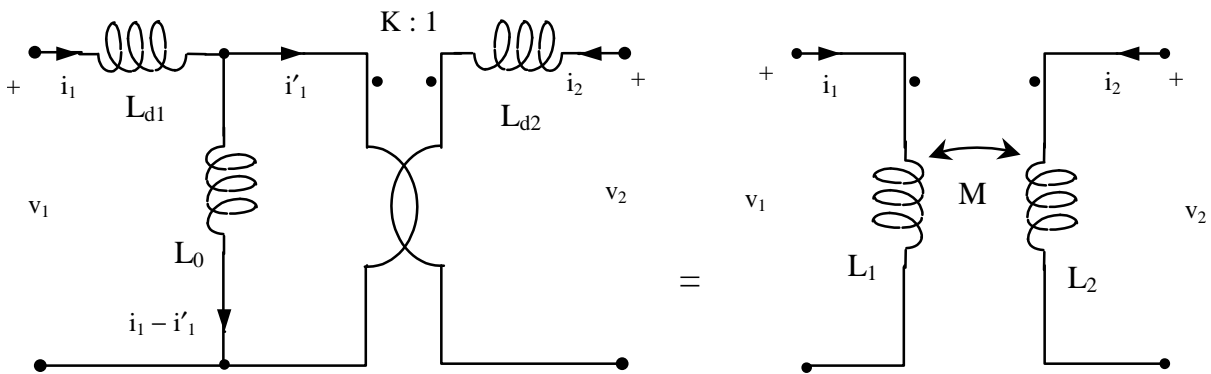


Figura 6

Si supponga di voler costruire un trasformatore di alta qualità. Si sceglie un anello di materiale magnetico con una elevatissima permeabilità magnetica  $\mu$  (per esempio, ferrite, permalloy, super-permalloy, ecc.), quindi si avvolgono strettamente sull'anello le due bobine, formando così un doppio bipolo del tipo di figura 1. Si supponga di essere capaci di trovare materiali a permeabilità  $\mu$  crescente; allora, al crescere di  $\mu$  si otterrebbero due effetti: i flussi dispersi diventerebbero sempre più piccoli (per cui  $L_{d1}$  ed  $L_{d2}$  si ridurrebbero) e il flusso comune crescerebbe (per cui  $L_0$  aumenterebbe). Pertanto, nel caso limite in cui  $\mu \rightarrow \infty$ , si avrebbe  $L_{d1}, L_{d2} \rightarrow 0$  ed  $L_0 \rightarrow \infty$ . Con riferimento alla figura 6 è possibile vedere che si otterrebbe dunque il trasformatore ideale.

#### 4. IL TRASFORMATORE REALE

Le perdite nel trasformatore reale possono classificarsi come segue:

- Le perdite per resistenza nei conduttori degli avvolgimenti, dette *perdite nel rame* ( $P_{cu}$ ), sono perdite ohmiche e pertanto risultano dipendere dal quadrato della corrente che scorre nei conduttori stessi. I conduttori devono essere di bassa resistenza elettrica per ridurre le perdite ohmiche e le cadute di tensione presentate dagli avvolgimenti. Il materiale di gran lunga più usato per i conduttori è il rame elettrolitico ricotto per le sue buone qualità meccaniche ed elettriche.

- Le *perdite nel ferro* ( $P_{fe}$ ) per isteresi e per correnti parassite nel nucleo ferromagnetico. Infatti, poiché il nucleo è percorso da un flusso variabile ed il materiale ferromagnetico è tipicamente conduttore, anche nel nucleo si generano forze elettromotrici indotte, che danno luogo a delle correnti, dette parassite (o di Foucault). Per ridurre le correnti parassite si costruisce il nucleo con lamierini, infatti il lamierino spezza il percorso delle correnti parassite e le riduce. Le perdite per isteresi sono causate da fenomeni di “attrito” nella struttura cristallina del materiale ferromagnetico sottoposto ad un campo di induzione variabile. Per loro natura le perdite nel ferro dipendono quindi dal campo di induzione e dalla sua variazione temporale all’interno del nucleo magnetico, e quindi fondamentalmente dalla tensione a primario o a secondario.

Si consideri il circuito elettrico rappresentato nella figura 7. Esso costituisce il circuito equivalente del trasformatore (alle basse frequenze), infatti, per passare dal circuito equivalente degli induttori accoppiati al circuito di figura 7 si è:

1. considerata una *induttanza di dispersione a primario* ( $L_{d1}$ ) e *a secondario* ( $L_{d2}$ ) dovuta ai flussi di dispersione a primario e a secondario, ovvero alle linee di campo magnetico che si concatenano al primo avvolgimento ma non al secondo, e viceversa;
2. aggiunta la resistenza degli avvolgimenti di primario ( $R_1$ ) e di secondario ( $R_2$ ), per tener conto delle *perdite nel rame* ( $P_{cu} = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$ );
3. aggiunta una resistenza ( $R_0$ ) in parallelo all’induttanza magnetizzante, per tener conto delle *perdite nel ferro* ( $P_{fe} = R_0 i_a^2$ );

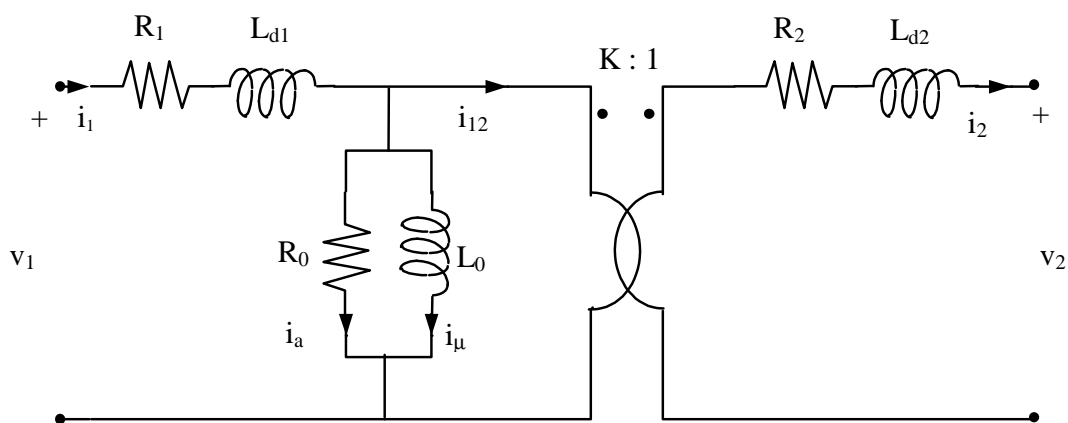


Figura 7. - Circuito equivalente del trasformatore reale.

Il circuito equivalente del trasformatore reale si riduce al solo trasformatore ideale quando vengono trascurati tutti i fenomeni di “perdita” presenti nel trasformatore “reale”. Tali fenomeni sono dovuti alla resistenza degli avvolgimenti ( $R_1$ ,  $R_2$ ), ai flussi dispersi ( $L_{d1}$ ,  $L_{d2}$ ), alle perdite nel ferro ( $R_0$ ) ed alla induttanza magnetizzante, grande ma non infinita, del nucleo del trasformatore ( $L_0$ ). Il trasformatore “reale” è in grado di modificare i parametri della energia elettrica che lo attraversa, ma, a differenza del trasformatore ideale, assorbe sia potenza attiva che potenza reattiva. La potenza attiva viene dissipata (trasformata in calore) in parte negli avvolgimenti (per effetto Joule) ed in parte nel nucleo ferromagnetico (per effetto Joule e per isteresi). La potenza reattiva assorbita serve per sostenere i flussi dispersi ed il flusso principale. La presenza di flussi dispersi introduce uno sfasamento tra la tensione primaria e la tensione secondaria, mentre l’induttanza magnetizzante finita comporta l’assorbimento a primario, anche nel funzionamento a vuoto (cioè col secondario aperto), di una corrente magnetizzante ( $I_\mu$ ).



Con riferimento al regime sinusoidale di frequenza  $f$  il circuito elettrico rappresentato nella figura 7 può essere descritto in termini di numeri complessi rappresentativi delle tensioni e delle correnti, come illustrato nella figura 8a. Rispetto al circuito di figura 7, si sono introdotte le reattanze di dispersione degli avvolgimenti ( $X_{d1} = \omega L_{d1}$ ,  $X_{d2} = \omega L_{d2}$ ) e la reattanza magnetizzante del nucleo del trasformatore ( $X_0 = \omega L_0$ ). In figura 8b si è illustrato lo stesso circuito di figura 8a in cui si sono evidenziate l'impedenza primaria  $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{d1}$ , l'impedenza secondaria  $\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{d2}$  e l'impedenza  $\underline{Z}_0 = (R_0)/(jX_0)$  ottenuta dal parallelo delle impedenze  $R_0$  e  $jX_0$ .

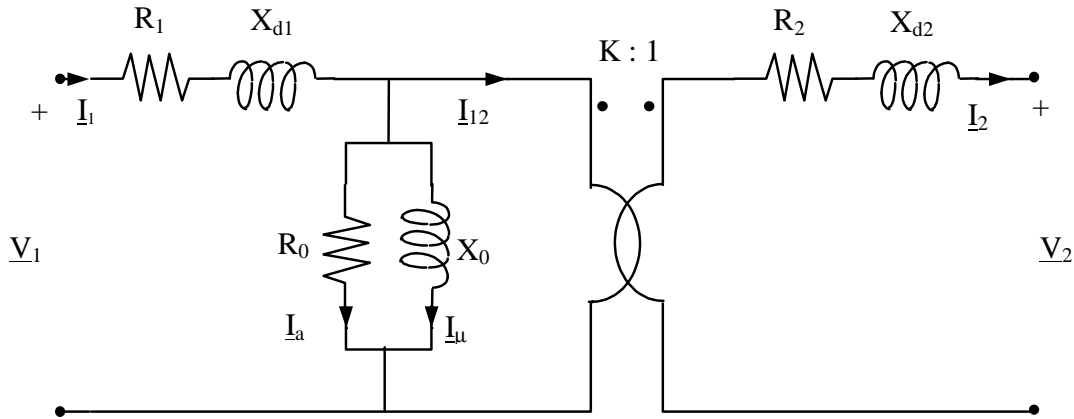


Figura 8.a - Circuito equivalente del trasformatore reale in regime sinusoidale.

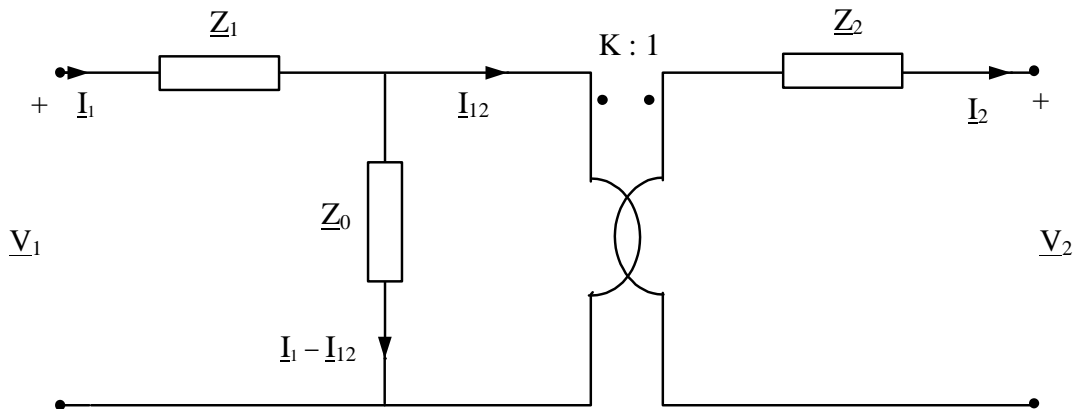


Figura 8.b - Circuito equivalente del trasformatore reale in regime sinusoidale.

Se è possibile considerare in prima approssimazione lineare il materiale ferromagnetico di cui è costituito il nucleo del trasformatore, la riluttanza  $R$  è una caratteristica del circuito magnetico indipendente dal valore del flusso presente nel circuito e quindi è costante nel tempo. In questo caso, supponendo che tutte le variabili ( $i_1$ ,  $i_2$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ) siano funzioni sinusoidali isofrequenziali e indicando sottolineati i fasori relativi alle grandezze indicate e con  $j$  l'unità immaginaria, si ottiene<sup>(o)</sup>:

<sup>(o)</sup> Si noti che le prime tre delle (4.1) sono LKT applicate al circuito di Figura 8.a. L'ultima delle (4.1) è interpretabile come LKC. Infatti  $L_0 = N_1^2/R$  ed  $j\omega L_0 I_\mu = j\omega N_1 \Phi$ , quindi  $I_\mu = R \Phi/N_1$ . sostituendo si ottiene quindi  $I_\mu = I_1 - I_a - (N_1/N_2)I_2$ . Si ha dunque

$$\underline{I}_\mu = \underline{I}_1 - \underline{I}_{12} - \underline{I}_a$$

$$\begin{aligned}
\underline{V}_1 &= j\omega N_1 \underline{\Phi} + j\omega L_{d1} \underline{I}_1 + R_1 \underline{I}_1 \\
\underline{V}_2 &= j\omega N_2 \underline{\Phi} - j\omega L_{d2} \underline{I}_2 - R_2 \underline{I}_2 \\
0 &= j\omega N_1 \underline{\Phi} - R_0 \underline{I}_a \\
R \underline{\Phi} &= N_1 (\underline{I}_1 - \underline{I}_a) - N_2 \underline{I}_2
\end{aligned}
\tag{4.1}$$

Le equazioni (4.1) costituiscono le **equazioni interne** del trasformatore mediante le quali è possibile descriverne il comportamento nella ipotesi di poter trascurare gli effetti dovuti alla non linearità del circuito magnetico. Quando ciò non sia possibile, le grandezze in gioco (tensioni, correnti e flusso) sono esprimibili mediante la loro serie di Fourier, caratterizzata da un'armonica fondamentale, relativa alla frequenza di alimentazione, e da armoniche superiori, relative a frequenze multiple intere della fondamentale.

Le (4.1) costituiscono un sistema di quattro equazioni complesse nelle sei incognite complesse  $\underline{V}_1$ ,  $\underline{V}_2$ ,  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$ ,  $\underline{I}_a$ ,  $\underline{\Phi}$ . Affinché il problema risulti chiuso e sia quindi possibile calcolare il valore delle incognite è necessario scrivere altre due equazioni complesse che descrivano l'accoppiamento elettrico del trasformatore col mondo esterno attraverso i morsetti del primario e del secondario. Nel caso in cui il primario sia alimentato da una rete a tensione assegnata ed il secondario sia chiuso su di una impedenza di carico ( $\underline{Z}_L$ ), tali **equazioni di connessione con l'esterno** hanno la seguente forma:

$$\begin{aligned}
\underline{V}_1 &= \underline{E} \\
\underline{V}_2 &= \underline{Z}_L \underline{I}_2
\end{aligned}
\tag{4.2}$$

È possibile spostare a sinistra del trasformatore ideale (verso il primario) l'impedenza secondaria  $\underline{Z}_2$  moltiplicandola per il quadrato del rapporto di trasformazione  $K$ ; si ottiene quindi il circuito equivalente del trasformatore ridotto a primario illustrato nella figura 9, in cui  $\underline{Z}_{12} = K^2 \underline{Z}_2$  (si ricordi che in tale schema anche l'impedenza di carico collegata al secondario va moltiplicata per il quadrato del rapporto di trasformazione  $K$ ). Analogamente è possibile considerare il circuito equivalente del trasformatore ridotto a secondario.

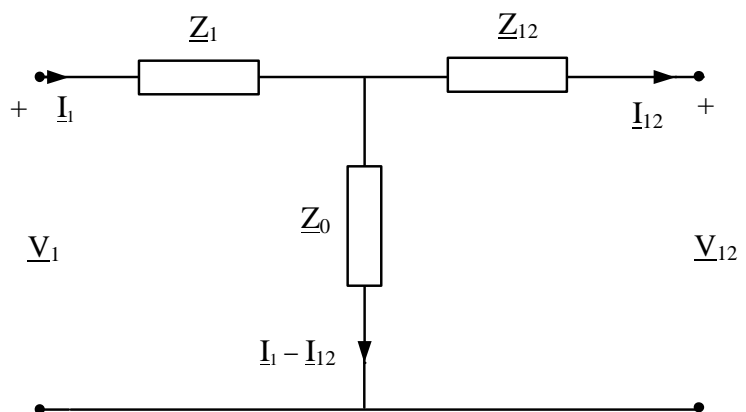


Figura 9. - circuito equivalente del trasformatore ridotto a primario.

I trasformatori sono costruiti in modo da ridurre il più possibile gli effetti di perdita; risulta quindi comprensibile come, normalmente, la caduta di tensioni ai capi della impedenza  $\underline{Z}_1$  risulti piccola (meno di qualche per mille) rispetto a quella ai capi della impedenza  $\underline{Z}_0$ . Di conseguenza è possibile approssimare notevolmente la rete equivalente del trasformatore, senza introdurre un errore rilevante, applicando la tensione di alimentazione direttamente ai capi della reattanza magnetizzante come mostrato nella figura 10.

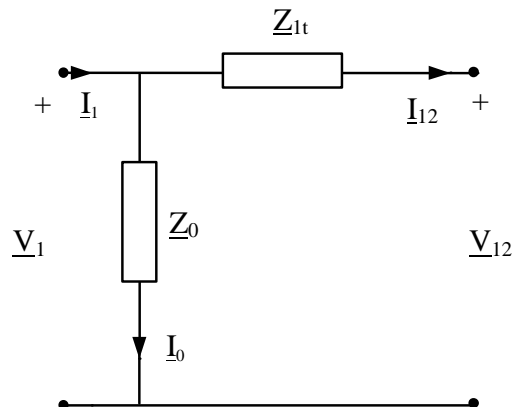


Figura 10. - circuito equivalente semplificato del trasformatore ridotto a primario.

In questo caso la corrente  $\underline{I}_0$  assorbita da  $\underline{Z}_0$  non dipende dal carico del trasformatore, ma unicamente dalla tensione di alimentazione primaria e coincide con la corrente assorbita a primario dal trasformatore nel funzionamento a vuoto, quando cioè il secondario è aperto ( $\underline{I}_2 = 0$ ). Nell'ambito di tale approssimazione non è più necessario distinguere l'impedenza primaria  $\underline{Z}_1$  da quella secondaria  $\underline{Z}_2$ . Trasportando una delle due impedenze, primaria o secondaria, dalla parte opposta del trasformatore ideale, avendo cura di effettuare la trasformazione corrispondente del suo valore, permette di considerare un'unica impedenza totale che può essere riferita a primario  $\underline{Z}_{1t} = R_{1t} + jX_{1t} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{12}$ . Analogamente è possibile considerare il circuito equivalente semplificato del trasformatore con un'unica impedenza totale riferita a secondario ( $\underline{Z}_{2t}$ ). I parametri che compaiono nel circuito equivalente semplificato ( $R_0$ ,  $X_0$ ,  $R_{1t}$  ed  $X_{1t}$ ) possono essere determinati sperimentalmente mediante una prova a vuoto ed una prova in corto circuito.

## 5. PROVA A VUOTO

La prova a vuoto viene eseguita alimentando il primario con la sua tensione nominale e mantenendo il secondario in circuito aperto. Facendo riferimento alla rete equivalente semplificata di figura 10 risulta nulla la corrente  $\underline{I}_{12}$ , di conseguenza risulta:

$$R_0 = \frac{V_{10}^2}{P_0} \quad , \quad X_0 = \frac{V_{10}^2}{\sqrt{(V_{10} I_{10})^2 - P_0^2}} \quad (5)$$

dove  $V_{10}$  è la tensione (valore efficace) primaria,  $I_{10}$  è la corrente (valore efficace) primaria e  $P_0$  è la potenza attiva assorbita a primario durante la prova; tali grandezze possono essere misurate mediante l'inserzione a primario di un voltmetro, un amperometro ed un wattmetro (cioè di strumenti per la misura di tensione, corrente e potenza attiva, rispettivamente).

## 6. PROVA IN CORTO CIRCUITO

La prova in cortocircuito viene effettuata alimentando il primario del trasformatore con il secondario chiuso su un amperometro. La bassa impedenza dell'amperometro permette di considerare il secondario chiuso in cortocircuito. La tensione primaria deve essere tale che la corrente erogata a secondario, che viene misurata dall'amperometro, sia pari alla corrente nominale (valore efficace). Tale valore della tensione viene chiamato tensione di cortocircuito ( $V_{1c}$ ) e risulta essere pari ad un frazione (< 10 %) della tensione nominale primaria. Per i valori tipici dei parametri del trasformatore risulta  $|\underline{Z}_0| \gg |\underline{Z}_{1t}|$  e quindi, nel funzionamento in cortocircuito, è possibile considerare la rete equivalente semplificata del trasformatore che viene mostrata nella figura 11 e che prende il nome di rete di Kapp.

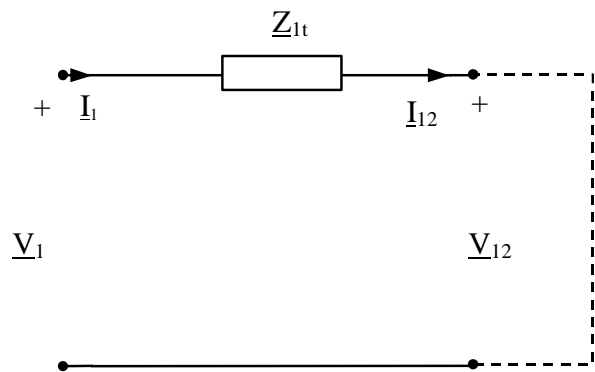


Figura 11. - Circuito equivalente semplificato del trasformatore, valido nel funzionamento in cortocircuito (rete di Kapp)

Con riferimento a tale semplificazione risulta quindi:

$$R_{lt} = \frac{P_c}{I_{1c}^2}, \quad X_{lt} = \frac{\sqrt{(V_{1c} I_{1c})^2 - P_c^2}}{I_{1c}^2} \quad (6)$$

dove  $V_{1c}$  è la tensione (valore efficace) primaria,  $I_{1c}$  è la corrente (valore efficace) primaria e  $P_c$  è la potenza attiva assorbita a primario durante la prova; tali grandezze possono essere misurate mediante l'inserzione a primario di un voltmetro, un amperometro ed un wattmetro.

## 7. RENDIMENTO CONVENZIONALE DEL TRASFORMATORE

Il trasformatore assorbe potenza elettrica dal primario ed eroga potenza elettrica al secondario; tale trasformazione avviene in presenza di perdite negli avvolgimenti, per effetto Joule, e nel nucleo magnetico, a causa delle correnti parassite e la conseguente dissipazione per effetto Joule e della isteresi magnetica. Il rendimento del trasformatore ( $\eta$ ) viene quindi definito come il rapporto tra la potenza attiva erogata a secondario ( $P_2$ ) e la potenza attiva assorbita a primario ( $P_1$ ); indicando con  $P_d$  la potenza dissipata (trasformata in calore) all'interno del trasformatore risulta:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_2 + P_d} \quad (7)$$

La determinazione sperimentale di tale grandezza risulta difficoltosa per varie ragioni. In primo luogo, sarebbe necessario che il trasformatore operasse nelle sue condizioni nominali e quindi si renderebbe necessario poter disporre in laboratorio di un carico in grado di assorbire la potenza nominale del trasformatore che può risultare anche di parecchi MW. In secondo luogo, non essendo presenti parti rotanti nel trasformatore, il rendimento dello stesso è molto elevato (può essere superiore al 99.5) e piccoli errori nella misura delle potenze assorbite ed erogate possono produrre un errore notevole nella determinazione del rendimento. Per ovviare a tali inconvenienti viene definito un rendimento convenzionale del trasformatore ( $\eta_{conv}$ ). Le norme stabiliscono dettagliatamente le modalità del calcolo del rendimento convenzionale a seconda del carico che il trasformatore deve alimentare; facendo riferimento ad un carico resistivo ( $\cos \varphi = 1$ ) che assorbe la potenza nominale del trasformatore si ottiene:

$$\eta_{conv} = \frac{A_n}{A_n + P_{Cu} + P_{Fe}} \quad (8)$$

Nella (8)  $A_n$  è la potenza apparente nominale del trasformatore, che è indicata sui dati di targa del trasformatore stesso,  $P_{Cu}$  sono le perdite nel rame, valutate mediante la prova in cortocircuito, e  $P_{Fe}$  sono le perdite nel ferro, valutate mediante la prova a vuoto. Nella prova in cortocircuito, come già detto, le perdite per effetto Joule negli avvolgimenti, sono largamente predominanti rispetto a quelle nel ferro e quindi la potenza attiva assorbita durante tale prova rappresenta la potenza che viene dissipata nel rame, a parità di correnti negli avvolgimenti, quindi  $P_{Cu} = P_c$ . In realtà è necessario tenere conto della variazione della resistenza degli avvolgimenti al variare della temperatura degli stessi e quindi le norme fissano le modalità del calcolo di  $P_{Cu}$  a partire dalla misura di  $P_c$ . Nella prova a vuoto risultano invece trascurabili le perdite negli avvolgimenti, visto che il secondario non è percorso da corrente ed il primario è percorso solo dalla corrente a vuoto che come detto risulta una frazione abbastanza piccola della corrente nominale, per cui la potenza attiva assorbita durante la prova, eseguita alla tensione nominale, rappresenta la potenza dissipata nel ferro durante il funzionamento nominale ( $P_{Fe} = P_0$ )

## 8. TRASFORMATORI TRIFASE

Per trasferire energia elettrica tra due reti trifase a differenti tensioni, si può ricorrere a tre trasformatori monofase opportunamente collegati tra loro. Nella figura 8.1 è mostrata una possibile disposizione dei tre trasformatori monofase. In questo caso, gli avvolgimenti primari sono collegati a stella, così come quelli secondari. I tre circuiti di figura 8.1 sono equivalenti ad un unico trasformatore ottenuto fondendo in un'unica colonna le tre colonne prive di avvolgimenti dei trasformatori monofase (figura 8.2).

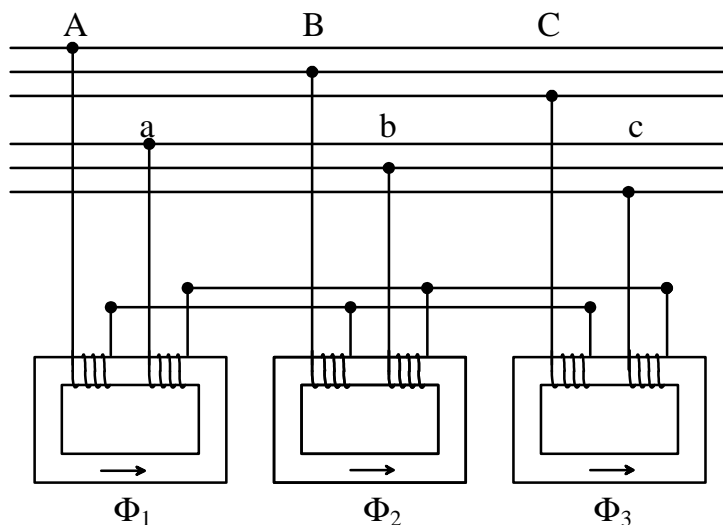


Figura 8.1. - Banco di tre trasformatori monofase.

La colonna centrale del circuito magnetico raffigurato in figura 8.2 è percorsa da un flusso di campo magnetico

$$\Phi' = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

dove  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  e  $\Phi_3$  sono i flussi relativi a ciascun trasformatore. Se poi tali flussi costituiscono una terna simmetrica ed equilibrata, la loro somma è nulla, e la colonna centrale può venire soppressa (figura 8.3).

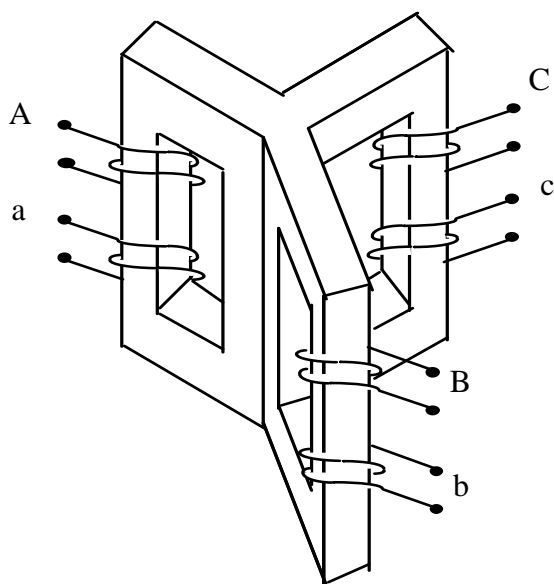


Figura 8.2. - Trasformatore trifase equivalente al banco di tre trasformatori monofase.

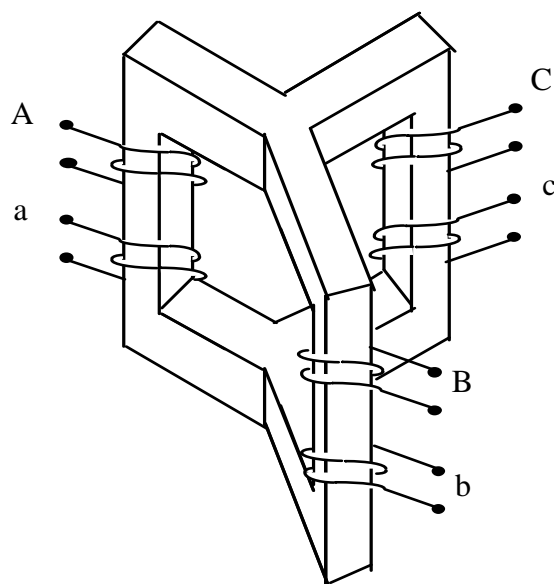


Figura 8.3. - Trasformatore trifase con nucleo simmetrico.

La configurazione illustrata nella figura 8.3 presenta delle difficoltà costruttive ed un ingombro tale che si preferisce adottare un nucleo complanare (figura 8.4). Utilizzando tale disposizione si introduce nella terna dei flussi magnetici una dissimmetria che peraltro risulta di norma trascurabile.

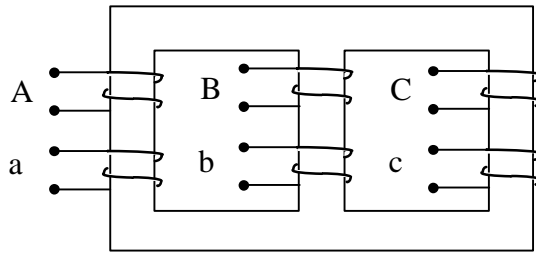


Figura 8.4. - Trasformatore trifase con nucleo complanare.

## 9. PARALLELO DI TRASFORMATORI

Quando si verifica la necessità di trasferire grosse potenze da un circuito all'altro, può risultare conveniente ricorrere al parallelo fra due o più trasformatori (figura 9.1). Affinché il parallelo tra due trasformatori funzioni correttamente, devono essere verificate le seguenti condizioni:

1. **I trasformatori devono avere le stesse tensioni nominali sia primaria che secondaria (la stessa tensione nominale primaria e lo stesso rapporto di trasformazione a vuoto).** Se così non fosse, si avrebbe infatti, nel funzionamento a vuoto, una circolazione di corrente nella maglia costituita dagli avvolgimenti secondari dei trasformatori collegati in parallelo (maglia  $a_a - b_a - b_b - a_b$  della figura 9.1).

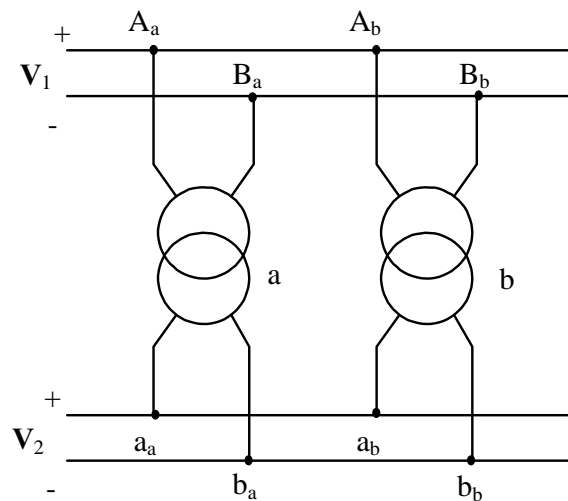


Figura 9.1. - Parallelo di due trasformatori

2. **Nel caso di trasformatori trifase, questi devono avere lo stesso gruppo di appartenenza.** Se i due trasformatori trifase, pur verificando la condizione di cui al punto 1, avessero diversi gruppi di appartenenza, sarebbe comunque presente, nel funzionamento a vuoto, una circolazione di corrente nei secondari dei trasformatori, dovuta alla differenza di fase delle f.e.m. indotte nei due avvolgimenti secondari in parallelo.

3. **I due trasformatori in parallelo devono avere la stessa tensione di corto circuito e lo stesso fattore di potenza di cortocircuito.** Questa condizione è richiesta affinché si abbia un corretto funzionamento del parallelo in presenza di un carico che richiede che:

- a. le correnti secondarie siano in fase tra di loro;
- b. la potenza erogata si ripartisca tra i due trasformatori in maniera direttamente proporzionale alle rispettive potenze apparenti nominali.

Se le due correnti secondarie non sono in fase tra di loro, a parità di corrente erogata al carico si hanno maggiori perdite nel parallelo, a causa del valore più elevato delle correnti secondarie, rispetto al caso in cui tali correnti risultano in fase.

Se la potenza non si ripartisce tra i due trasformatori in misura direttamente proporzionale alle rispettive potenze nominali, quando il carico è tale da assorbire da uno dei due trasformatori la sua potenza nominale, inevitabilmente il secondo trasformatore o assorbe una potenza inferiore a quella nominale, risultando così sottoutilizzato, oppure assorbe una potenza superiore a quella nominale, condizione quest'ultima assolutamente da evitare in quanto porta al guasto del trasformatore stesso.

La prima parte della figura 9.2 riporta il circuito equivalente riferito al secondario del parallelo di due trasformatori monofase (se si deve considerare il parallelo di due trasformatori trifase, lo stesso circuito si riferisce, nel caso di carico equilibrato, ad ogni fase del parallelo). Supponendo che i due trasformatori abbiano lo stesso rapporto di trasformazione a vuoto, come richiesto dal corretto funzionamento a vuoto del parallelo (vedi condizione 1), le due tensioni  $\underline{E}_{2,a}$  ed  $\underline{E}_{2,b}$  risultano uguali tra loro e quindi è possibile semplificare il circuito come mostrato nella seconda parte della stessa figura.

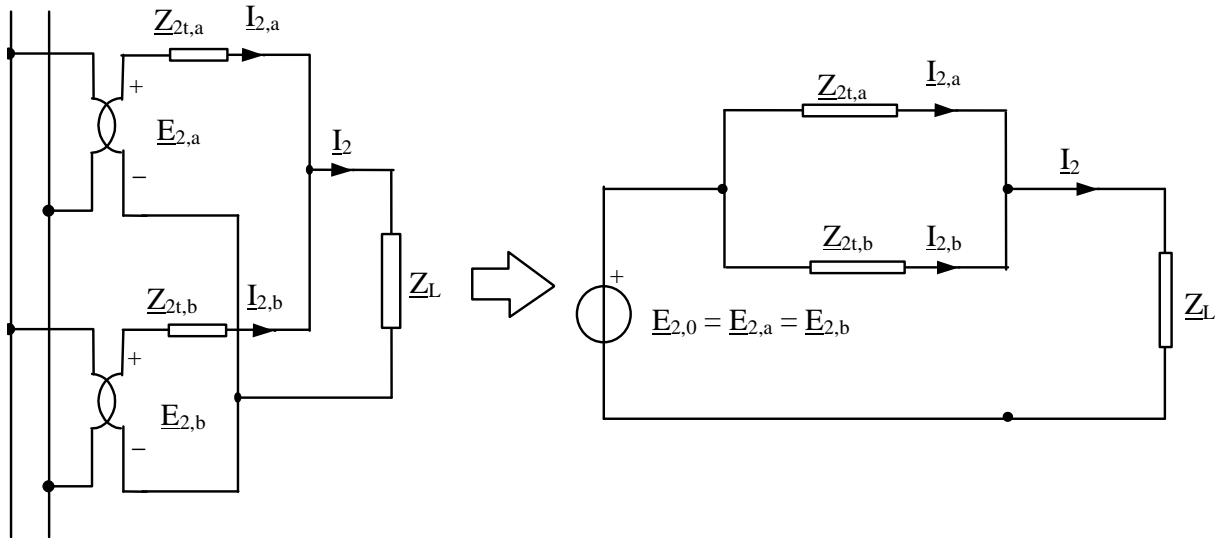


Figura 9.2. - Circuito equivalente riferito al secondario del parallelo di due trasformatori

Dall'analisi di tale circuito risulta evidente che, affinché le due correnti  $\underline{I}_{2,a}$  ed  $\underline{I}_{2,b}$  siano in fase tra di loro è necessario e sufficiente che il rapporto tra la reattanza e la resistenza delle due impedenze totali riferite al secondario  $\underline{Z}_{2t,a}$  e  $\underline{Z}_{2t,b}$  sia lo stesso. Dato che tale rapporto individua univocamente il fattore di potenza del trasformatore nelle prova in corto circuito ne segue che, affinché le due correnti siano in fase tra di loro è necessario che i due trasformatori abbiano lo stesso fattore di potenza di cortocircuito. Risulta inoltre:

$$\frac{I_{2,a}}{I_{2,b}} = \frac{Z_{2t,b}}{Z_{2t,a}} \quad (9.1)$$

Inoltre, dall'analisi della prova in cortocircuito, indicando con  $K$  il rapporto di trasformazione a vuoto di entrambi i trasformatori, si ottiene:

$$\begin{cases} V_{1c,a} = K Z_{2t,a} I_{2n,a} \\ V_{1c,b} = K Z_{2t,b} I_{2n,b} \end{cases} \Rightarrow \frac{Z_{2t,a}}{Z_{2t,b}} = \frac{V_{1c,a} I_{2n,b}}{V_{1c,b} I_{2n,a}} \quad (9.2)$$

Dalle (9.1) e (9.2) infine

$$\frac{I_{2,a}}{I_{2,b}} = \frac{V_{1c,b}}{V_{1c,a}} \frac{I_{2n,a}}{I_{2n,b}} \quad (9.3)$$

Dalle (9.3) si deduce quindi che affinché le correnti si ripartiscano proporzionalmente alle rispettive correnti nominali è necessario e sufficiente che i due trasformatori abbiano la stessa tensione di cortocircuito.

## CAMPO MAGNETICO ROTANTE

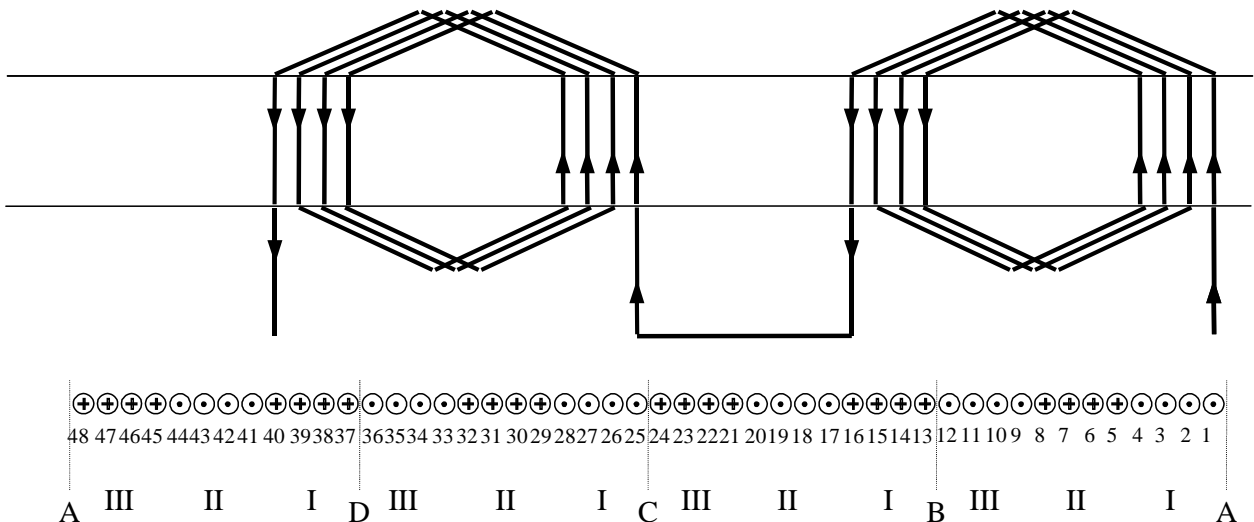
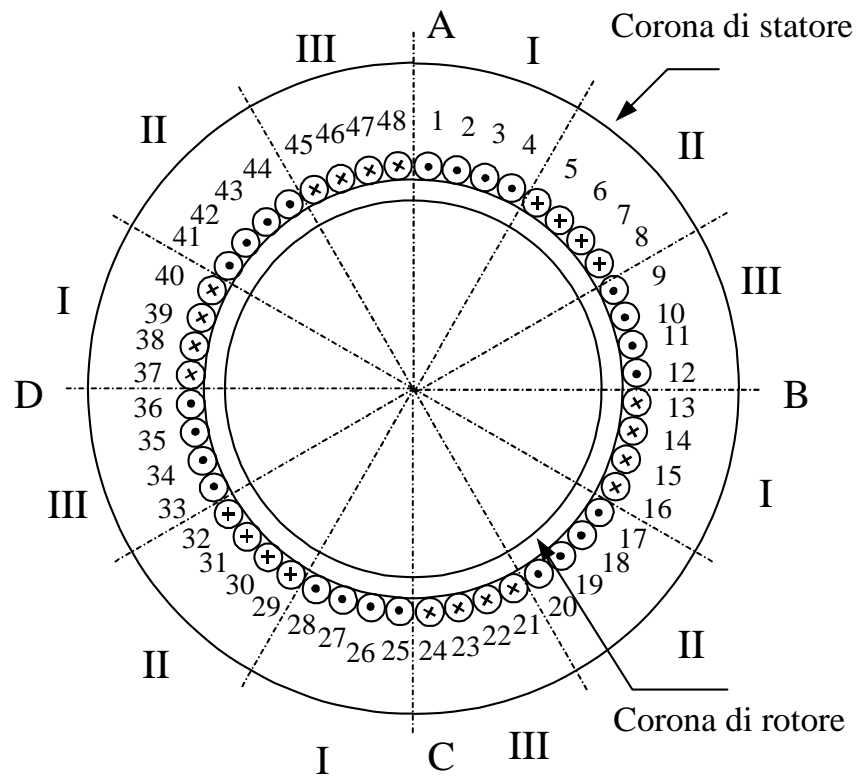
La teoria del campo magnetico rotante verrà utilizzata nel seguito per lo studio delle macchine asincrone e sincrone. Essa richiede la preliminare conoscenza di qualche nozione costruttiva che verrà esposta relativamente alle macchine asincrone, facendo riferimento alla figura.

In tale figura si considera una macchina a quattro "poli" [i settori AB-BC-CD-DA] ma la generalizzazione ad un numero qualsiasi di poli è immediata.

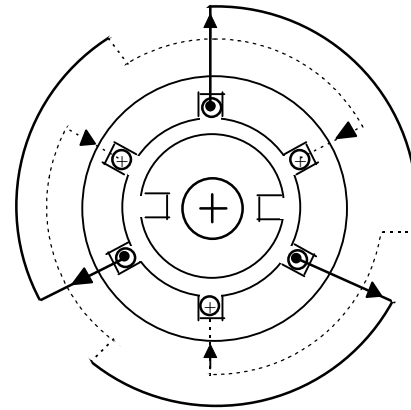
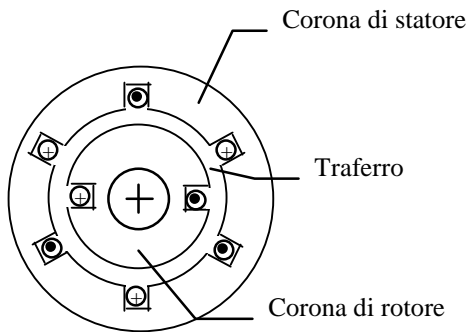
Statore e rotore sono costituiti da un cilindro cavo ed un cilindro pieno laminati (parallelamente al piano del foglio), coassiali e distanziati da un intervallo anulare d'aria [traferro]. Statore e rotore presentano delle "cave" affacciate al traferro, nelle quali hanno sede i conduttori attivi [disposti parallelamente all'asse di rotazione] che opportunamente collegati fra loro [tramite "testate"] costituiscono gli avvolgimenti di statore e rotore.

Considerando macchine trifase, ciascun polo è diviso in tre settori uguali (vedi figura) riservati a ciascuna fase. Nell'esempio di figura ogni fase occupa quattro cave sotto ogni polo [in figura è indicato solo l'avvolgimento della prima fase, le rimanenti sono identiche alla prima e si intendono alloggiare nei settori ed esse riservati].

La figura in basso mostra lo sviluppo in piano della superficie di statore affacciata al traferro. In essa è riportato lo schema dell'avvolgimento di una fase. Nell'esempio considerato tale avvolgimento risulta composto da due gruppi di matasse, ognuno costituito da quattro matasse.







Schema di principio della sezione mediana di una macchina elettrica a traferro costante

Collegamenti dei lati attivi dell'avvolgimento sulla testata della macchina

Lo studio del campo magnetico al traferro della macchina rappresentato nella figura, richiede la soluzione delle equazioni della elettrodinamica quasi-stazionaria, in presenza di un mezzo non uniforme e non lineare, in una geometria complessa. Tale studio viene notevolmente semplificato, mediante l'introduzione delle seguenti **ipotesi di campo**:

1. la permeabilità del ferro si suppone infinita;
2. l'andamento delle linee del campo magnetico al traferro si suppone radiale [superfici affacciate al traferro perfettamente lisce];
3. la distribuzione del campo magnetico si ritiene identica in tutti i piani perpendicolari all'asse della macchina;
4. traferro  $\delta$  di piccolo spessore e circa costante

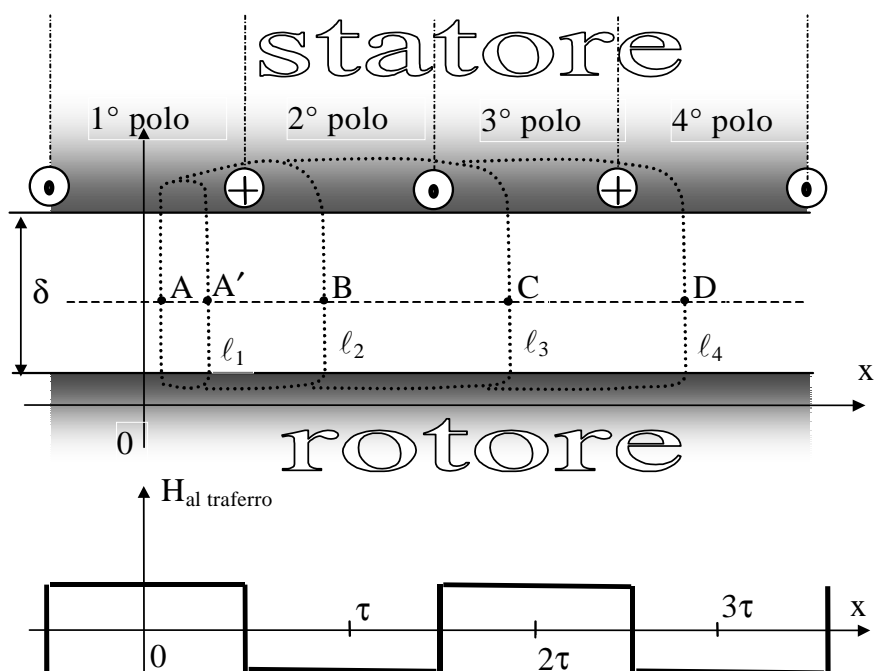
### Campo magnetico generato da una fase avente una sola cava per polo

Supponiamo per ora che la corrente della fase sia costante nel tempo (C.C.) e che in ogni cava vi siano  $n$  conduttori.

Per la prima ipotesi di campo, che poniamo alla base del calcolo di  $H$  al traferro si ha:

$$H_{\text{ferro}} = \frac{B_{\text{ferro}}}{\mu_{\text{ferro}}} = 0 \quad (1)$$

La seconda ipotesi di campo consiste nel trascurare l'“effetto di dentatura” e in particolare le componenti tangenziali del campo magnetico al traferro.



*“Lungo la periferia del traferro H è costante a tratti”*

Infatti si considerino due punti qualsiasi A e A', nell'intervallo compreso tra la prima e la seconda cava e applichiamo la legge della circuitazione magnetica alla linea chiusa  $\ell_1$ .

$$H_A \cdot \delta - H_{A'} \cdot \delta = 0 \quad (2) \Rightarrow H_A = H_{A'} \quad (3)$$

*“Nel passaggio da un polo al polo adiacente H subisce una discontinuità pari a  $ni/\delta$ ”*

[si chiama polo l'intervallo tra due cave di figura] Infatti applicando la legge della circuitazione magnetica a un generico percorso chiuso  $\ell_2$  che varca il traferro in corrispondenza dei punti A e B, risulta:

$$H_A \cdot \delta - H_B \cdot \delta = ni \quad (4) \Rightarrow H_A - H_B = \frac{ni}{\delta} \quad (5)$$

*“A poli alterni il campo H riprende lo stesso valore”*

Infatti applicando la legge della circuitazione magnetica lungo la linea chiusa  $\ell_3$  che varca il traferro in corrispondenza dei punti A e C, si ha:

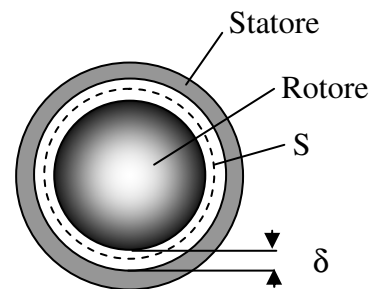
$$H_A \cdot \delta - H_C \cdot \delta = 0 \quad (6) \Rightarrow H_A = H_C \quad (7)$$

*“Il valore assoluto del campo magnetico H è costante al traferro e pari a  $ni/2\delta$ ”*

Ricordando che  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ , applichiamo il teorema della divergenza a una superficie cilindrica S situata tra statore e rotore e coassiale ad essi. Trascurando gli “effetti di bordo” alle estremità della macchina, risulta:

$$2[(\mu_0 H_A)(l\tau) + (\mu_0 H_B)(l\tau)] = 0 \quad (8)$$

$$\Rightarrow H_A = -H_B \quad (9)$$

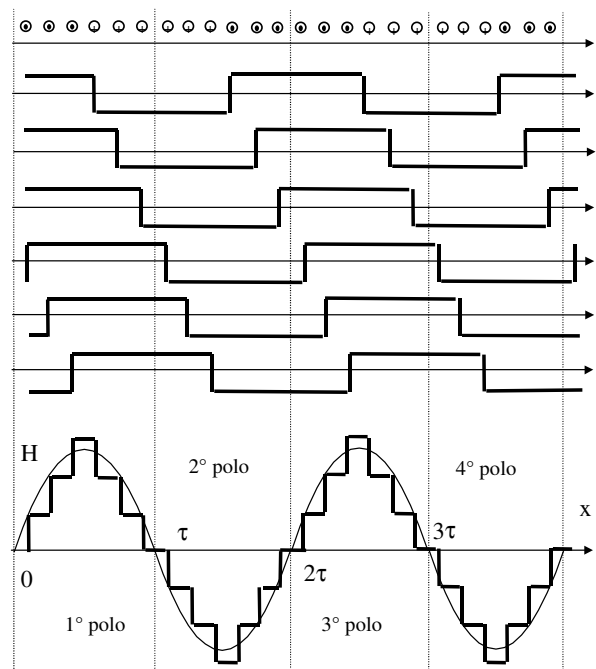


ove  $l$  è la lunghezza assiale della macchina. Facendo sistema tra la (5) e la (9), si ha quindi:

$$H_A = \frac{ni}{2\delta} \quad (10) \Rightarrow H_B = -\frac{ni}{2\delta} \quad (11)$$

A tale campo occorre sommare i contributi di tutti i conduttori giacenti sotto i vari poli; in totale si ottiene un diagramma a scalini. Preso un riferimento con l'origine nel centro della prima fase: rispetto ad esso il diagramma a scalini è una funzione periodica di periodo  $2\tau$  [ $\tau$  è detto “semipasso polare”] e può scomporsi in serie di Fourier (cioè una serie di seni e coseni di frequenza crescente), di cui considereremo solo la prima armonica. Vista la scelta dell'origine, si ha dunque:

$$H(x) = H_M \cos\left(\frac{\pi x}{\tau}\right)$$



Le (10), (11) determinano completamente il campo al traferro generato da una fase avente una sola cava per polo, il cui andamento è riportato in figura in funzione dell'ascissa corrente  $x$ . A tale campo sostituiremo, d'ora in poi, la prima armonica della serie di Fourier la cui ampiezza vale

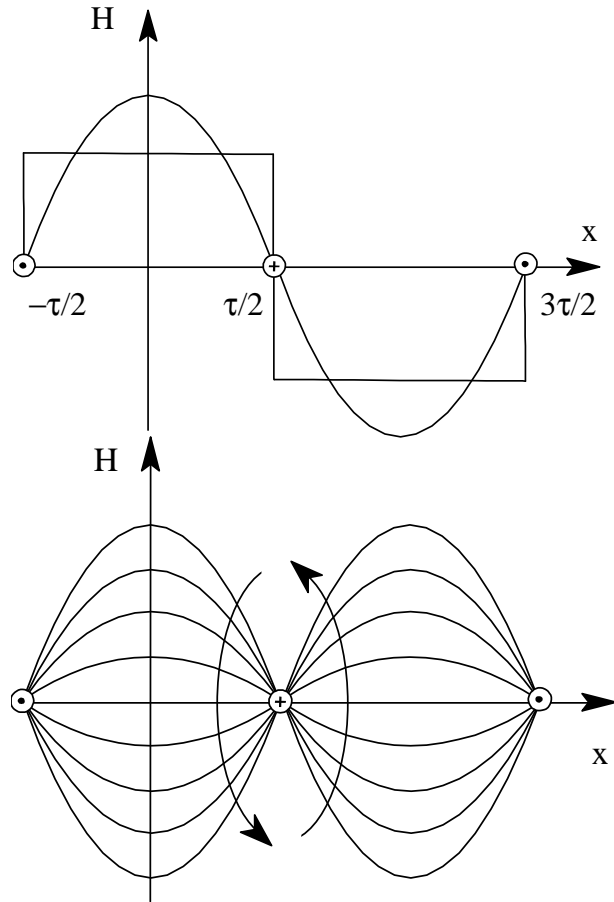
$$H_M = \frac{4 n i}{\pi 2 \delta} \quad (12)$$

Se, come è in effetti, la corrente della fase è alternata, tutto quanto si è detto vale in ogni istante e pertanto il campo magnetico varia nel tempo, avendo la configurazione di un'onda stazionaria i cui nodi si realizzano in corrispondenza delle cave.

L'ampiezza massima del campo magnetico si realizza in un "ventre", al centro del polo, e vale

$$H_M = \frac{2\sqrt{2} n I}{\pi \delta} \quad (13)$$

ove  $I$  è il valore efficace della corrente della fase.



Riferendo l'onda stazionaria di campo al sistema di riferimento con origine in un ventre, la sua equazione diventa:

$$H(x, t) = H_M \cos(\omega t) \cos\left(\frac{\pi x}{\tau}\right) \quad (14)$$

avendo supposto che  $i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t)$ . La (14) è l'equazione di un campo alternativo, cioè di un campo distribuito con legge sinusoidale lungo il traferro e che ha ampiezza variabile sinusoidalmente nel tempo. La (14) può anche scriversi nella forma:

$$H(x, t) = \frac{1}{2} H_M \cos\left(\omega t - \frac{\pi x}{\tau}\right) + \frac{1}{2} H_M \cos\left(\omega t + \frac{\pi x}{\tau}\right) \quad (15)$$

o anche

$$H(x, t) = \frac{1}{2} H_M \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \frac{1}{2} H_M \cos \omega \left( t + \frac{x}{v} \right) \quad (16)$$

avendo posto

$$v = \frac{\omega \tau}{\pi} \quad (17)$$

La (17) mostra un risultato già noto dalla Fisica: "Un'onda stazionaria si può sempre decomporre in due onde traslanti, una progressiva (velocità  $v$  diretta secondo  $x$ ) e una regressiva (velocità  $v$  diretta secondo  $-x$ )". [Si può cioè decomporre il campo alternativo in due campi di ampiezza costante, ma ruotanti a velocità costanti e opposte] Nel caso in esame tali onde sono indicate come campi rotanti

(diretto ed inverso). Essi sono campi di ampiezza costante rotanti al traferro con velocità angolare costante. A parte il differente verso di rotazione, i due campi hanno la stessa velocità angolare  $\omega_c$  in modulo:

$$\omega_c = \frac{v}{R} = \frac{\omega\tau}{\pi R} \quad (18)$$

Tenendo conto del fatto che  $2\pi R = 2p\tau$ , dove  $R$  è il raggio al traferro,  $p$  il numero di coppie polari, si ha inoltre:

$$\omega_c = \frac{\omega}{p} \quad (19) \quad \text{o anche} \quad n'_c = \frac{60f}{p} \quad (20)$$

dove  $n'_c$  il numero di giri al minuto primo. Se  $f$  è la frequenza industriale di rete, pari a 50 Hz, e supponiamo  $2p = 4$ , si ottiene  $n'_c = 1500$ . Quindi in una macchina a quattro poli, alimentata alla frequenza di 50 Hz, i campi ruotano a 1500 giri al minuto.

### **Campo magnetico generato da una fase avente $q$ cave per polo**

Quanto si è esposto al paragrafo precedente si generalizza a una fase avente un generico numero  $q$  di cave per polo. In tal caso infatti dovremo sommare  $q$  contributi sinusoidali “spostati di una cava” l’uno rispetto all’altro. L’ampiezza del campo risultante è in questo caso:

$$H_M = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} k_a \frac{nqI}{\delta} \quad (21)$$

Nella (21)  $k_a$  (coefficiente di avvolgimento) è compreso tra zero e uno e tiene conto del fatto che i  $q$  contributi che si sommano sono sfasati l’uno rispetto all’altro di un “angolo elettrico  $\alpha$ ” corrispondente al passo  $\tau_c$  di cava. Si può dimostrare che:

$$k_a = \frac{\text{sen} \frac{q\alpha}{2}}{q \cdot \text{sen} \frac{\alpha}{2}} \quad (22) \quad \text{essendo} \quad \alpha = \pi\tau_c/\tau \quad (23)$$

### **Campo al traferro generato dalle tre fasi**

Le correnti delle tre fasi costituiscono un sistema equilibrato con pulsazione  $\omega$  e pertanto sono esprimibili con le relazioni:

$$i_1(t) = I_M \cos(\omega t), \quad i_2(t) = I_M \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \quad i_3(t) = I_M \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \quad (24)$$

Tenuto conto che le fasi sono spostate di  $2\pi/3$  una rispetto all’altra, dalle (14) e (24) si deducono le espressioni dei campi parziali generati da ognuna di esse:

$$\begin{aligned} H_1(x, t) &= H_M \cos(\omega t) \cos\left(\frac{\pi x}{\tau}\right) &= \frac{H_M}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{\tau} - \omega t\right) + \frac{H_M}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{\tau} + \omega t\right) \\ H_2(x, t) &= H_M \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{\tau} - \frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{H_M}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{\tau} - \omega t\right) + \frac{H_M}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{\tau} + \omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \\ H_3(x, t) &= H_M \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{\tau} - \frac{4\pi}{3}\right) &= \frac{H_M}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{\tau} - \omega t\right) + \frac{H_M}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{\tau} + \omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Sommando membro a membro

$$H = \frac{3}{2} H_M \cos\left(\frac{\pi x}{\tau} - \omega t\right) + 0$$

In altri termini nella somma dei contributi di campo delle varie fasi, i campi inversi si elidono, quelli diretti si sommano. In definitiva le tre fasi generano un unico campo rotante diretto espresso da

$$H(x, t) = H_{Mt} \cos\left(\frac{\pi x}{\tau} - \omega t\right) \quad (28) \quad \text{ove} \quad H_{Mt} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} k_a \frac{nqI}{\delta}$$

Ponendo nella (28)  $x = 0$  (ossia, considerando un osservatore nel primo ventre dell'onda stazionaria della prima fase), risulta

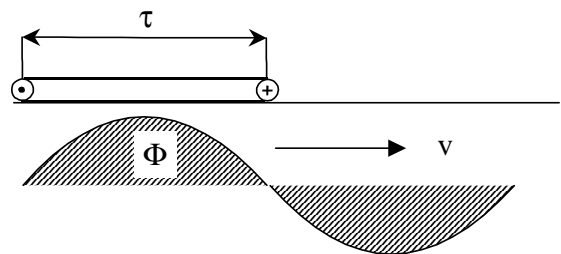
$$H(0, t) = H_{Mt} \cos(\omega t) \quad (29)$$

Dalle (24) e (29) si trae che per l'osservatore "centrale" della prima fase (analogamente per le altre) campo e corrente sono in fase. Si conclude che: il campo rotante transita con la sua ordinata massima davanti al centro di fase, quando in quella fase la corrente è massima.

### f.e.m. indotta in una fase da un campo rotante

Si consideri ora un generico campo rotante che transita con velocità  $v$  di fronte ad una spira, ferma, di passo  $\tau$  uguale a quello del campo stesso. Nella spira si induce una f.e.m. sinusoidale il cui valore efficace  $E_s$  vale:

$$E_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega \Phi \quad (30)$$



ove  $\omega$  è la pulsazione della f.e.m. indotta

$$\omega = \frac{\pi v}{\tau} \quad (31)$$

e  $\Phi$  è il flusso relativo ad un polo di campo rotante e rappresenta, ovviamente, il valore massimo del flusso concatenato con la spira. Se l'avvolgimento è costituito da  $N$  conduttori attivi (corrispondenti a  $N/2$  spire), la f.e.m. sinusoidale indotta in esso dal campo rotante è:

$$E = \frac{\omega}{2\sqrt{2}} k_a N \Phi \quad (32)$$

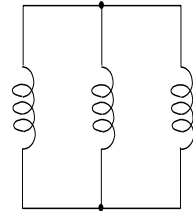
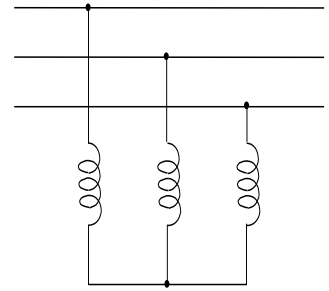
Ove  $k_a$  è lo stesso coefficiente che compare nella (21) ed è presente per tenere conto del fatto che le f.e.m. indotte in spire adiacenti sono uguali in modulo, ma sfasate dell'angolo  $\alpha$  espresso dalla (23).

## MACCHINE ASINCRONE

Consideriamo dapprima il caso di macchine asincrone con rotore avvolto. In esse statore e rotore hanno un avvolgimento dello stesso tipo (di regola trifase).

L'avvolgimento di statore [ad esempio collegato a stella come indicato in figura] è alimentato da una linea, l'avvolgimento di rotore è chiuso in cortocircuito.

La simmetria della macchina fa sì che, alimentando la macchina con un sistema simmetrico di tensioni, si ottenga un sistema equilibrato di correnti, sia nello statore che nel rotore.



### Funzionamento intuitivo

Si può illustrare con la seguente "catena logica":

$$\begin{matrix} \text{⋈} & \text{⋈} & & \text{⋈} & \text{⋈} & & & & & & \\ \text{V} & \rightarrow & \text{I}_s & \rightarrow & \widehat{\text{B}}_s & \rightarrow & \text{E}_r & \rightarrow & \text{I}_r & \rightarrow & \widehat{\text{B}}_r & \rightarrow & \widehat{\text{B}} = \widehat{\text{B}}_s + \widehat{\text{B}}_r & (33) \end{matrix}$$

dove ⋈ indica un sistema simmetrico (di tensioni) o equilibrato (di correnti),  $\widehat{\text{B}}$  indica il campo rotante ed i pedici s ed r indicano statore e rotore, rispettivamente.

La (32) mostra come il rotore reagisce all'azione inducente dello statore con un campo rotante  $\widehat{\text{B}}_r$  che si somma a quello  $\widehat{\text{B}}_s$  di statore a generare il campo rotante complessivo  $\widehat{\text{B}}$ . Ciò è possibile in quanto, come ora mostreremo, i due campi  $\widehat{\text{B}}_r$  e  $\widehat{\text{B}}_s$  ruotano con uguale velocità e risultano pertanto immobili uno rispetto all'altro. A chiarimento di quanto esposto definiamo innanzitutto lo scorrimento s:

$$s = \frac{\omega_c - \omega_m}{\omega_c} \quad (34)$$

ove  $\omega_c$  campo rotante di statore e  $\omega_m$  è la velocità angolare del rotore. Lo scorrimento è quindi il rapporto tra le velocità angolare relative (rispetto al rotore) e assoluta del campo rotante di statore. La pulsazione  $\omega_r$  delle f.e.m. indotte da  $\widehat{\text{B}}_s$  nel rotore è:

$$\omega_r = s\omega \quad (35)$$

infatti, per le (19) e (34), si ha:  $\omega_r = p(\omega_c - \omega_m) = p s \omega_c = s \omega$ . Ciò premesso la velocità angolare assoluta di  $\widehat{\text{B}}_r$  si può calcolare come somma della velocità relativa rispetto al rotore  $s\omega_c$  e della velocità del rotore stesso:

$$s\omega_c + \omega_m \stackrel{(34)}{=} s\omega_c + (1-s)\omega_c \stackrel{(19)}{=} \frac{\omega}{p} \quad (36)$$

Anche nel caso della macchina asincrona, come già per i trasformatori, si ha quindi un unico campo principale che si concatena con entrambi i circuiti (nel caso in questione di statore e di rotore).

### Teorema di Equivalenza delle macchine Asincrone (cenno)

La legge di Ohm si applica facilmente ad una fase di statore e di rotore (per le altre fasi il discorso resta inalterato salvo introdurre un opportuno sfasamento di  $2\pi/3$  o  $4\pi/3$ ) e porta a scrivere le seguenti equazioni:

$$\underline{V}_1 = (\underline{R}_1 + j\underline{X}_{d1})\underline{I}_1 + j\omega k_{a1} \frac{N_1}{2} \underline{\Phi} \quad [\text{alla frequenza } f] \quad (37)$$

$$0 = (R_2 + jsX_{d2})\underline{I}_2 + j\omega k_{a2} \frac{N_2}{2} \underline{\Phi} \quad [\text{alla frequenza sf}] \quad (38)$$

ove il significato dei simboli è analogo a quanto visto per i trasformatori, in particolare  $X_{d1}$  e  $X_{d2}$  sono reattanze di dispersione (di statore e rotore) valutate entrambe alla frequenza di alimentazione dello statore. Si noti che le (37) e (38) non sono isofrequenziali [a causa della (35)] e quindi non sono direttamente confrontabili. Questa difficoltà si può aggirare con il Teorema di Equivalenza.

**“Una macchina Asincrona in funzionamento stazionario (con le fasi di rotore in cortocircuito) ad una generica velocità equivale, sotto il profilo del funzionamento elettrico, alla stessa macchina mantenuta a rotore bloccato ma con le fasi di rotore che alimentano ciascuna una resistenza pari a  $R_2(1-s)/s$ , essendo  $R_2$  la resistenza di una fase rotorica”.**

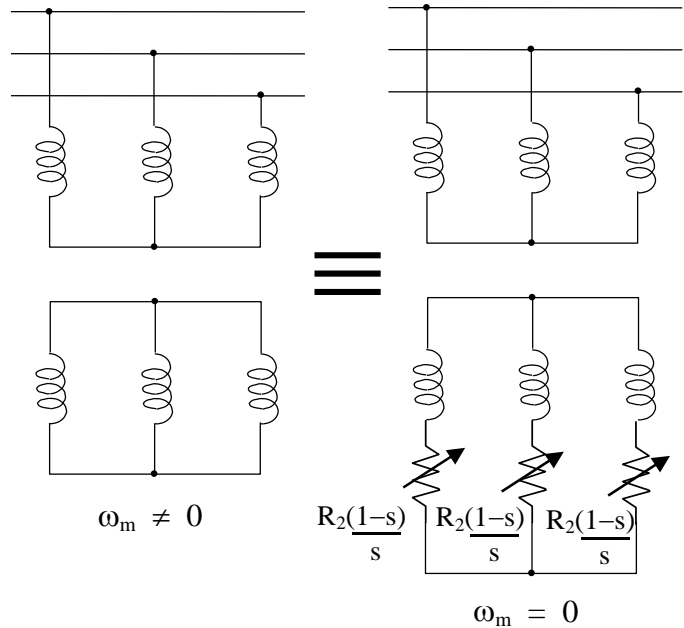
Tale equivalenza, indicata simbolicamente in figura, è da intendersi nel senso che tutte le grandezze in gioco, a parte la frequenza del rotore, restano uguali nei due casi.

Tralasciando la dimostrazione rigorosa del teorema, limitiamoci ad alcune considerazioni approssimate.

Le equazioni di statore e rotore si scrivono, per la macchina “equivalente”, nel seguente modo:

$$\underline{V}_1 = (R_1 + jX_{d1})\underline{I}_1 + j\omega k_{a1} \frac{N_1}{2} \underline{\Phi} \quad (37')$$

$$0 = \left( \frac{R_2}{s} + jX_{d2} \right) \underline{I}_2 + j\omega k_{a2} \frac{N_2}{2} \underline{\Phi} \quad (38')$$



Dal confronto tra (37) e (38) con (37') e (38') si ha, trascurando le cadute statoriche:

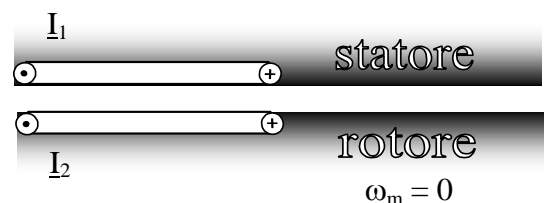
$$\text{a pari } \underline{V}_1 \rightarrow \text{pari } \underline{\Phi} \rightarrow \text{pari } \underline{I}_2 \rightarrow \text{pari } \widehat{B}_r$$

Si conclude che la “reazione magnetica” del rotore (che si concretizza in  $\widehat{B}_r$ ) è la stessa nei due casi e lo statore non “avverte” quindi alcuna differenza fra i due funzionamenti.

D’ora in poi faremo sempre riferimento, per comodità, alle equazioni (37') e (38') che hanno il vantaggio di essere isofrequenziali. Ciò facilita anche la scrittura della terza equazione (interazione magnetica statore-rotore) che risulta:

$$k_{a1}N_1\underline{I}_1 + k_{a2}N_2\underline{I}_2 = R \underline{\Phi} \quad (40)$$

Tralasciamo la dimostrazione rigorosa della (40), osservando che essa ha un contenuto intuitivo se si fa riferimento alla figura, ove sono schematicamente indicate due fasi corrispondenti della macchina equivalente.



### Equazioni Interne

In conclusione le equazioni interne della macchina asincrona risultano:

Le (41), (42), (43), che valgono nel caso in cui statore e rotore abbiano ugual numero di fasi, presentano una notevole analogia con le equazioni del trasformatore e pertanto analoghe sono le considerazioni che da esse si possono trarre.

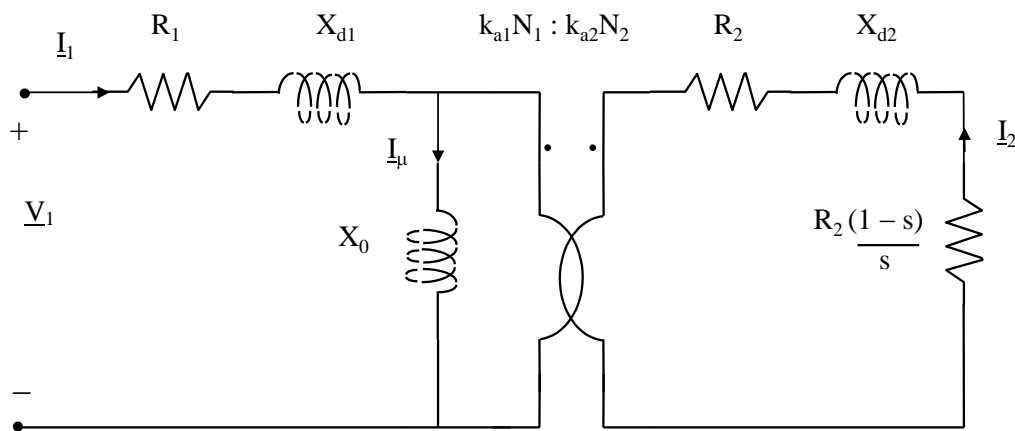
$$\underline{V}_1 = (\underline{R}_1 + j\underline{X}_{d1})\underline{I}_1 + j\omega k_{a1} \frac{N_1}{2} \underline{\Phi} \quad (41)$$

$$0 = \left( \underline{R}_2 \frac{1-s}{s} + \underline{R}_2 + j\underline{X}_{d2} \right) \underline{I}_2 + j\omega k_{a2} \frac{N_2}{2} \underline{\Phi} \quad (42)$$

$$k_{a1} N_1 \underline{I}_1 + k_{a2} N_2 \underline{I}_2 = \underline{R} \underline{\Phi} \quad (43)$$

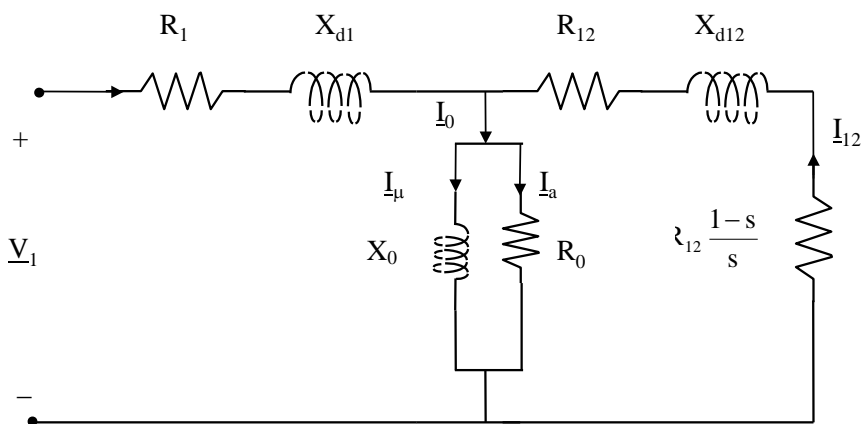
### Rete Equivalente

In particolare, con un procedimento del tutto analogo a quello relativo ai trasformatori, si determina, a partire dalle (41), (42), (43) la rete equivalente della macchina asincrona. Le formule di “riduzione da rotore a statore” coincidono con quelle di “riduzione da secondario a primario” del trasformatore, salvo sostituire  $k_a N$  a  $N$ .



*Circuito equivalente per una fase della macchina asincrona  
(trascurando le perdite nel ferro)*

È bene precisare inoltre che è possibile tenere conto delle perdite nel ferro, in modo analogo a quanto si fa per i trasformatori, modificando la rete equivalente della macchina asincrona ponendo in parallelo ad  $X_0$  una opportuna resistenza  $R_0$  percorsa da una corrente  $I_a$  denominata componente attiva della corrente a vuoto  $I_0$ .



*Circuito elettrico equivalente della macchina asincrona riferito ad una fase di statore.*

### Coppia



La resistenza fittizia  $R_2(1-s)/s$  simula il carico meccanico, per cui la potenza dissipata su essa rappresenta la potenza meccanica  $P_m$ :

$$P_m = 3R_2 \frac{1-s}{s} I_2^2 = \frac{3s(1-s)R_2 E_2^2}{R_2^2 + s^2 X_{d2}^2} \quad (44)$$

ove si è posto

$$E_2 = \frac{\omega}{2\sqrt{2}} k_{a2} N_2 \Phi \quad (45)$$

dalla (44) si ottiene la coppia  $C$  dividendo per la velocità angolare:

$$C = \frac{P_m}{\omega_m} = \frac{p}{\omega(1-s)} \frac{3s(1-s)R_2 E_2^2}{R_2^2 + s^2 X_{d2}^2} \quad (46)$$

in definitiva la coppia risulta (per una macchina trifase):

$$C = \frac{3p}{\omega} \frac{sR_2 E_2^2}{R_2^2 + s^2 X_{d2}^2} \quad (46) \quad \text{[e per una macchina a } m \text{ fasi: ]}$$

$$C = \frac{mp}{\omega} \frac{sR_2 E_2^2}{R_2^2 + s^2 X_{d2}^2}$$

ove la  $E_2$ , espressa dalla (45), rappresenta la f.e.m. indotta nella fase di rotore per  $s = 1$ . A tensione di alimentazione costante ( $V_1 = \text{cost.}$ ) essa può ritenersi costante:

$$V_1 = \text{cost.} \quad \stackrel{(41)}{\Rightarrow} \quad \Phi \cong \text{cost.} \quad \stackrel{(45)}{\Rightarrow} \quad E_2 \cong \text{cost.} \quad (48)$$

*trascurando  
le cadute*

La (48) mostra che anche per le macchine asincrone (come già per i trasformatori) il flusso varia poco al variare del carico.

### Caratteristica Meccanica

Si intende ora evidenziare graficamente l'andamento della caratteristica  $C(s)$  dato dalla (47). Si noti che:

- \* la caratteristica è antisimmetrica, cioè  $C(-s) = -C(s)$
- \* per  $s \gg 1$ , si ha  $C \cong \frac{k}{s}$ , con  $k = \frac{3p}{\omega} \frac{R_2 E_2^2}{X_{d2}^2}$
- \* la coppia si annulla per  $s = 0$
- \* il punto di massimo della caratteristica si può trovare annullando la derivata rispetto ad  $s$  della (47) oppure, più semplicemente, determinando il punto di minimo del denominatore  $sX_{d2}^2 + R_2^2/s$ . Annullando la derivata di quest'ultimo rispetto ad  $s$  si ha  $X_{d2}^2 - R_2^2/s^2 = 0$ . Il massimo della coppia si ha per  $s = R_2/X_{d2}$  e vale:

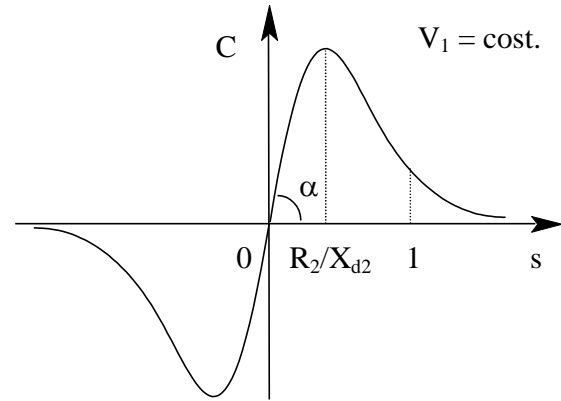
$$C_{\max} = \frac{3p}{\omega} \frac{E_2^2}{2X_{d2}}$$

Si noti che la  $C_{\max}$  non dipende da  $R_2$ , ma solo dalla reattanza di dispersione

\* la coppia di spunto, in  $s = 1$ , è diversa da zero e dipende dalla resistenza rotorica  $R_2$ :

$$C_{sp} = \frac{3p}{\omega} \frac{R_2 E_2^2}{R_2^2 + X_{d2}^2}$$

Queste considerazioni sono sufficienti a costruire la curva caratteristica  $C(s)$ , illustrata in figura, che viene detta caratteristica meccanica della macchina asincrona.



*Caratteristica meccanica di una macchina asincrona in funzione dello scorrimento.*

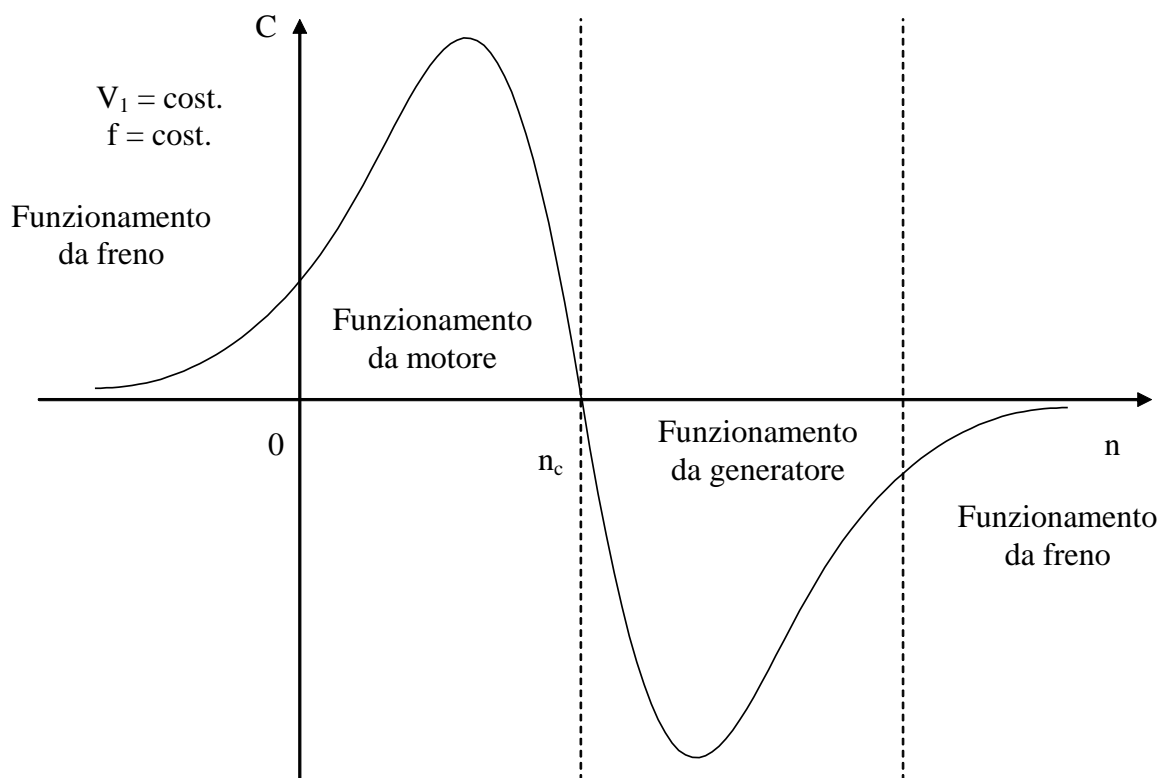
La caratteristica meccanica di una macchina asincrona può essere anche rappresentata in funzione del numero di giri. La velocità angolare del rotore  $n$  in numero di giri al minuto è data da  $n = 60 \omega_m / 2\pi$ . Poiché si ha  $\omega_m = \omega_c (1-s)$  ed inoltre  $\omega_c = \omega/p = 2\pi f/p$ , lo scorrimento  $s$  è legato ad  $n$  e alla frequenza  $f$  dalle relazione

$$n = \frac{60f}{p} (1-s)$$

La velocità angolare del campo rotante  $n_c$ , in numero di giri al minuto è  $n_c = 60f/p$ .

Sono possibili tre modalità di funzionamento:

- Funzionamento da motore: quando il rotore ruota nello stesso verso di rotazione del campo ma con velocità angolare minore; la potenza elettrica viene assorbita dalla rete di alimentazione dello statore e, a meno delle perdite interne, viene trasformata in potenza meccanica, portando in rotazione un carico meccanico che si oppone al moto.
- Funzionamento da generatore: quando il rotore ruota nello stesso verso di rotazione del campo ma con velocità angolare maggiore, entro un limite massimo; questo funzionamento può avvenire se la coppia motrice è di tipo meccanico, ad esempio se all'albero della macchina asincrona è collegata una turbina eolica. In questo caso la potenza meccanica viene assorbita e, a meno delle perdite interne, viene trasformata in potenza elettrica ceduta alla rete di alimentazione dello statore.
- Funzionamento da freno: quando il rotore ruota nel verso opposto a quello di rotazione del campo, oppure nel verso di rotazione del campo ma con velocità elevata; in questo caso la coppia di origine elettromagnetica si oppone al moto e la potenza meccanica viene assorbita e completamente trasformata in calore, dato che la macchina, in questa condizione di funzionamento, assorbe anche potenza elettrica dalla rete di alimentazione dello statore.



*Caratteristica meccanica di una macchina asincrona in funzione del numero di giri.*

### Equazioni esterne

Le variabili che definiscono univocamente il regime di funzionamento della macchina asincrona, tenendo conto del teorema di equivalenza, sono la pulsazione statorica  $\omega$ , la velocità di rotazione  $\omega_m$  (da cui si ricava il valore dello scorrimento  $s$ ), la tensione statorica  $\underline{V}_1$ , la corrente statorica  $\underline{I}_1$ , la corrente rotorica  $\underline{I}_2$ , ed il flusso principale  $\underline{\Phi}$  concatenato con la spira centrale statorica. Il valore di tali variabili può essere determinato risolvendo il sistema costituito dalle 3 equazioni interne complesse (41-42-43) e dalle equazioni esterne che individuano l'accoppiamento della macchina stessa con l'ambiente esterno. Un primo gruppo di equazioni individua l'alimentazione elettrica della macchina; ad esempio, se la macchina è alimentata a statore da una rete avente tensione concatenata e frequenza assegnata, rispettivamente pari a  $V_{10}$  ed  $f_0$ , risulta:

$$V = V_{10} ; \quad f = f_0 \quad (51)$$

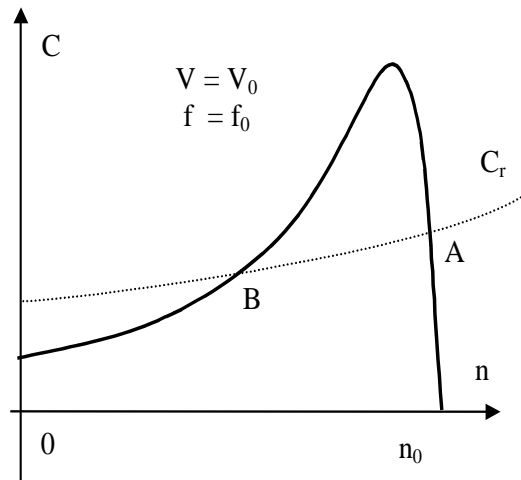
L'equazione del moto del rotore impone a regime l'uguaglianza fra la coppia di origine elettromagnetica  $C_e$ , data dalla equazione (46) e la coppia resistente di origine meccanica  $C_r$  applicata all'albero, che è una funzione nota della velocità di rotazione:

$$C_e = C_r \quad (52)$$

Si noti che il funzionamento di regime (in cui  $C = C_r$ ) della macchina asincrona (nel punto A di figura) è stabile. Infatti, la velocità angolare del rotore (ovvero il numero di giri al minuto  $n = 60 \omega_m / 2\pi$ ) è determinata dall'equazione

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = C - C_r$$

dove  $J$  è il momento di inerzia del rotore. Se a partire da A si ha, per qualunque ragione, una variazione positiva di  $\omega_m$  la coppia motrice cala e quella resistente cresce quindi  $C - C_r < 0$  ed il rotore tende a rallentare. Viceversa, se a partire da A si ha, per qualunque ragione, una variazione negativa di  $\omega_m$  la coppia motrice cresce e quella resistente cala quindi  $C - C_r > 0$  ed il rotore tende a accelerare per riportarsi in A. Si noti inoltre che il punto di funzionamento B (anch'esso di equilibrio) è instabile.



### Caratteristica Elettromeccanica

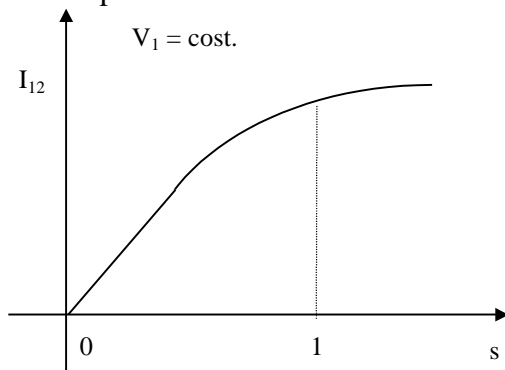
Dalla (42), ricordando il Teorema di Equivalenza, è possibile esprimere il valore efficace della corrente rotorica  $\underline{I}_2$ :

$$I_2 = \frac{|s|}{\sqrt{R_2^2 + s^2 X_{d2}^2}} \left( \omega k_{a2} \frac{N_2}{2} \Phi \right) \quad (49)$$

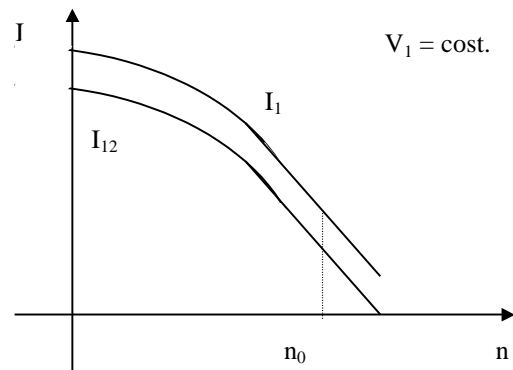
Da questa relazione è possibile calcolare il valore efficace della corrente rotorica ridotta a statore  $\underline{I}_{12}$ :

$$I_{12} = \frac{|s|}{\sqrt{R_2^2 + s^2 X_{d2}^2}} \frac{\frac{\omega}{2} (k_{a2} N_2)^2 \Phi}{k_{a1} N_1} \quad (50)$$

La (50) rappresenta la caratteristica elettromeccanica di rotore. Si noti che tale caratteristica è simmetrica, cioè  $I_{12}(-s) = I_{12}(s)$ . Pertanto in figura è illustrata la caratteristica elettromeccanica solo per scorrimenti positivi.



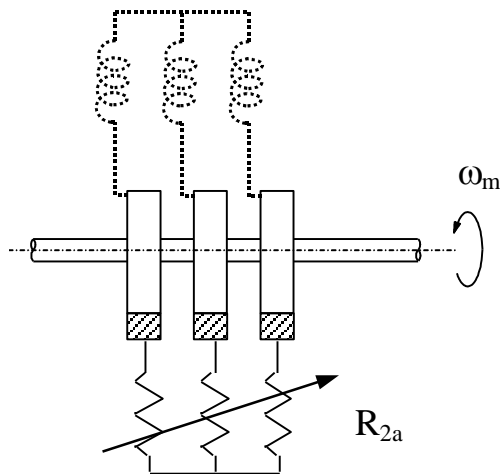
*Caratteristica elettromeccanica di rotore in funzione dello scorrimento.*



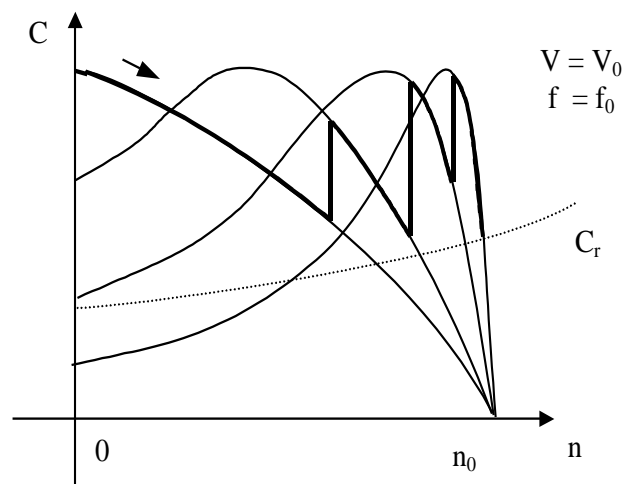
*Caratteristica elettromeccanica di statore e di rotore in funzione del numero di giri.*

Le caratteristiche elettromeccaniche di statore e di rotore in funzione del numero di giri, ricavabili dalla soluzione del circuito equivalente di figura 6.2 in corrispondenza di un assegnato valore della tensione e della frequenza di alimentazione, sono illustrate nella figura. È chiaro che un ulteriore problema che si verifica all'avviamento del motore asincrono è rappresentato dall'elevato valore delle correnti assorbite sia a statore che a rotore, rispetto al valore corrispondente al funzionamento a regime.

Si nota, dalle caratteristiche meccanica ed elettromeccanica che allo spunto ( $s = 1, n = 0$ ) la coppia è di solito modesta mentre le correnti sono elevate. Infatti, la corrente allo spunto può risultare anche cinque volte maggiore della corrente a regime. Sia la coppia che la corrente allo spunto dipendono dalla resistenza rotorica: in particolare, al crescere della resistenza rotorica, la coppia elettromagnetica cresce e la corrente, sia statorica che rotorica, cala. Per i motori con rotore avvolto è quindi possibile innalzare la coppia e ridurre la corrente allo spunto, collegando, mediante un collettore ad anelli (vedi figura), l'avvolgimento rotorico ad un reostato di avviamento, in tal modo aumentando la resistenza rotorica. In figura è illustrata la progressiva variazione della caratteristica meccanica che si realizza durante questo tipo di avviamento. Raggiunto il regime di funzionamento richiesto il reostato viene escluso (per evitare una eccessiva perdita Joule che abbasserebbe il rendimento) e sostituito dalle connessioni di cortocircuito.



Schema del reostato di avviamento



Avviamento mediante inserzione del reostato di avviamento (3 riduzioni successive)

## Rendimento

Il rendimento di un motore viene definito come il rapporto fra la potenza meccanica erogata e la potenza elettrica assorbita. Dal teorema di equivalenza e dal circuito equivalente segue la seguente espressione del rendimento  $\eta$  di un motore asincrono trifase:

$$\eta = \frac{P_m}{P_e} = \frac{R_{12} \frac{1-s}{s} I_{12}^2}{R_1 I_1^2 + R_0 I_a^2 + R_{12} I_{12}^2 + R_{12} \frac{1-s}{s} I_{12}^2}$$

Il rendimento può essere espresso come il prodotto di due rendimenti  $\eta_r$  (rendimento rotorico, definito come il rapporto fra la potenza meccanica erogata e la potenza elettrica assorbita dal rotore) ed  $\eta_s$  (rendimento statorico, definito come il rapporto fra la potenza elettrica erogata dallo statore al rotore e la potenza elettrica assorbita) rispettivamente dati dalle seguenti espressioni:

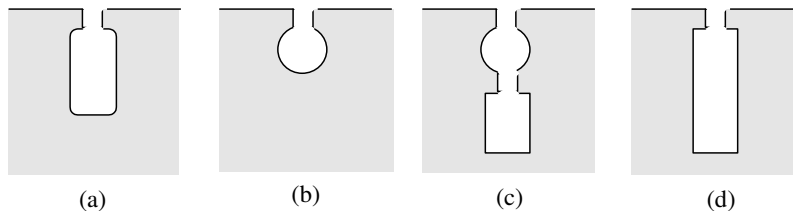
$$\eta = \eta_s \eta_r$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_s = \frac{R_{12} I_{12}^2 + R_{12} \frac{1-s}{s} I_{12}^2}{R_1 I_1^2 + R_0 I_a^2 + R_{12} I_{12}^2 + R_{12} \frac{1-s}{s} I_{12}^2} \\ \eta_r = \frac{R_{12} \frac{1-s}{s} I_{12}^2}{R_{12} I_{12}^2 + R_{12} \frac{1-s}{s} I_{12}^2} = 1-s \end{array} \right.$$

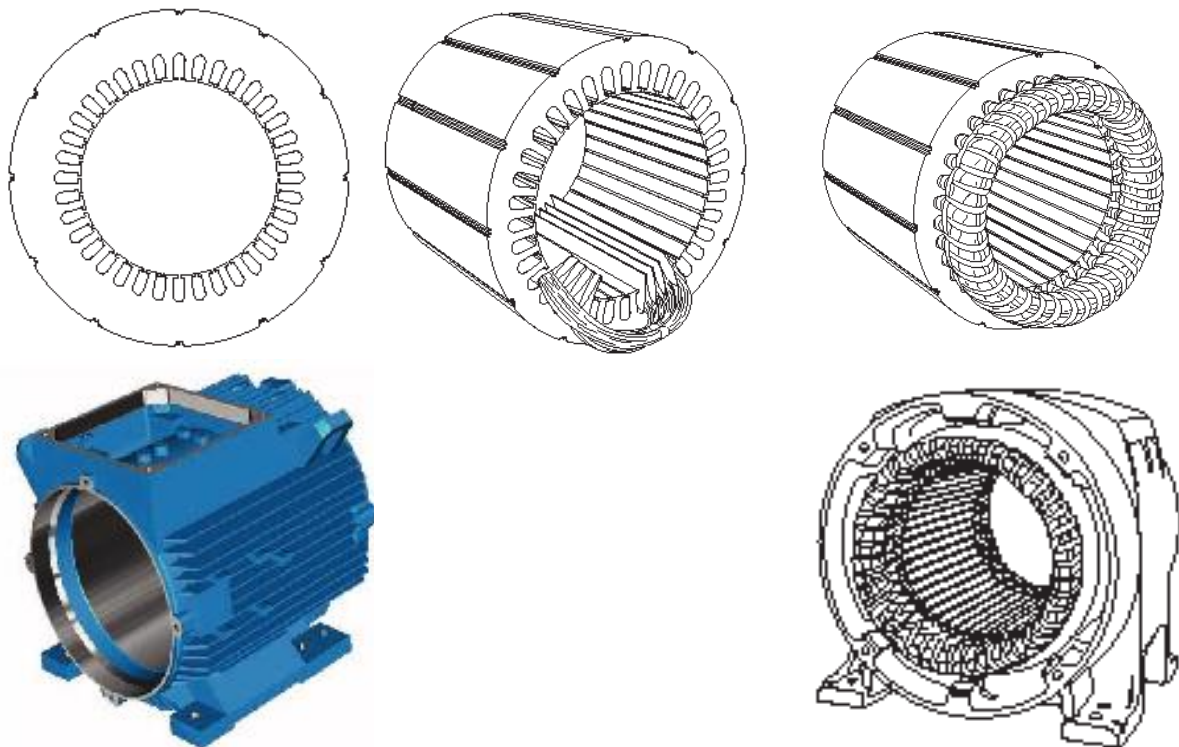
Dall'espressione del rendimento rotorico si vede come sia necessario, al fine di realizzare rendimenti elevati, che il regime di funzionamento della macchina sia caratterizzato da un valore dello scorrimento piccolo (valori tipici sono dell'ordine del  $1 \div 4 \%$ ), cosa peraltro facilmente realizzabile dato l'elevata pendenza della caratteristica meccanica in prossimità della velocità di sincronismo.

### CENNI COSTRUTTIVI: STATORE

Lo statore è formato dalla carcassa (di ghisa per basse potenze, di lamiera saldata per potenze maggiori) e dal pacco statorico nelle cui cave è alloggiato l'avvolgimento trifase destinato alla generazione del campo rotante. Il pacco statorico è formato dalla sovrapposizione di lamiere di piccolo spessore, fra loro isolate con vernici allo scopo di ridurre la potenza perduta per correnti parassite. Nelle grosse macchine, come negli alternatori, il pacco statorico viene suddiviso in più pacchi elementari per formare i canali di ventilazione al fine di rendere più efficiente il raffreddamento. Le cave statoriche sono solitamente del tipo semichiuso, il che permette di ridurre sia il flusso disperso sia le perturbazioni del campo al traferro. Le spire di ciascuna fase sono distribuite in modo tale da produrre, quando sono percorse da corrente, un'induzione di traferro ad andamento radiale distribuita spazialmente in modo approssimativamente sinusoidale. La carcassa porta una base isolante con i morsetti ai quali vengono collegati i terminali delle fasi costituenti l'avvolgimento.



*Forme più comuni di cave per macchine asincrone: (a) cava semichiusa per rotore avvolto, (b) cava per rotore a gabbia semplice, (c) cava per rotore a doppia gabbia, (d) cava per rotore a barre alte.*



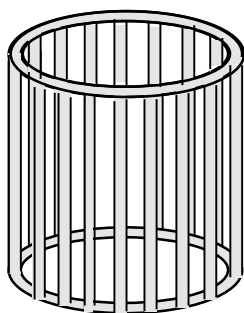
## CENNI COSTRUTTIVI: ROTORE

Il rotore è costituito essenzialmente dall'albero e dal pacco rotorico. Nei motori di potenza minore il pacco di lamiere viene montato direttamente sull'albero. Nei motori di maggiore potenza il pacco lamellare rotorico, costituito da corone circolari, viene sistemato su una superficie cilindrica collegata da nervature all'albero. Le cave, uniformemente distribuite sulla periferia del pacco rotorico sono di tipo chiuso o semichiuso. Il numero delle cave rotoriche è diverso (in generale maggiore) del numero delle cave statoriche; ciò per evitare pulsazioni periodiche del flusso da cui derivano vibrazioni e rumore durante la marcia. In particolare, al fine di agevolare l'avviamento del motore e renderlo più silenzioso in marcia, il pacco rotorico ha talvolta le cave inclinate rispetto all'asse. Questo artificio richiama i vantaggi che si ottengono in meccanica sostituendo un ingranaggio a denti dritti con un ingranaggio a denti elicoidali. Per quanto riguarda l'avvolgimento distinguiamo i **motori con rotore avvolto** ed i **motori con rotore a gabbia**.

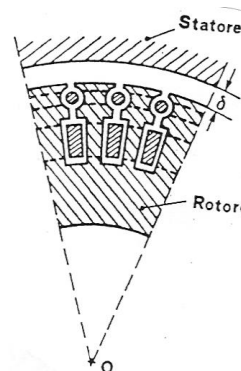
### Motori a Gabbia

Sono molto diffusi, in pratica, motori il cui rotore non è avvolto, ma è configurato a “**gabbia di scoiattolo**” (vedi figura) [Nelle cave rotoriche sono alloggiati delle sbarre di rame che vengono saldate a due anelli frontali, pure di rame, in modo da formare una gabbia, chiamata gabbia di scoiattolo. Così collegate le sbarre formano tra loro circuiti chiusi che sono percorsi dalle correnti indotte dal campo rotante.] Per essi (lo si può dimostrare) vale con buona approssimazione la normale teoria delle macchine asincrone. L'impiego del rotore a gabbia semplice avviene soprattutto per le basse potenze. Per potenze medio-basse (fino a 100 kW) può convenire realizzare la gabbia in alluminio pressofuso, per potenze maggiori la gabbia è sempre in rame.

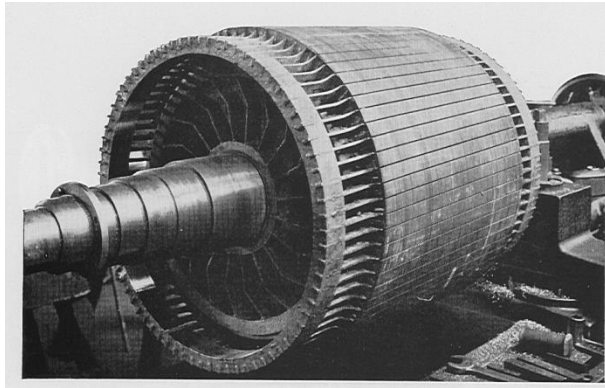
Per le potenze medie è molto diffuso il motore a Doppia Gabbia, perché è quello che presenta la maggiore elasticità nelle caratteristiche di avviamento. In questo caso il rotore è provvisto di due gabbie concentriche aventi caratteristiche opposte (vedi figura). La gabbia esterna (o di avviamento), è costituita di barre di piccola sezione aventi una elevata resistenza ed una piccola reattanza di dispersione. La gabbia interna (o di lavoro), è costituita di barre di grande sezione aventi una piccola resistenza ed una elevata reattanza di dispersione. All'avviamento la corrente circola prevalentemente nella gabbia esterna. Mano a mano che la macchina accelera e diminuisce la frequenza delle correnti di rotore, diminuisce la reattanza di dispersione e la corrente si sposta progressivamente sulla gabbia interna.



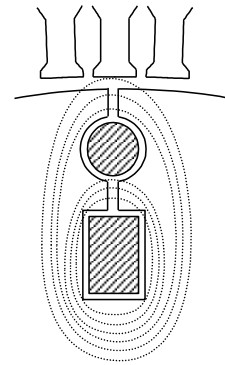
*Gabbia semplice per rotore di macchina asincrona.*



*Doppia gabbia per rotore di macchina asincrona.*



Rotore di macchina asincrona a gabbia di scoiattolo.



Particolare della doppia gabbia.

La gabbia più esterna, rispetto alla gabbia interna, è caratterizzata da un valore più elevato della resistenza (la sezione dei conduttori è più piccola), ma da un valore più piccolo del coefficiente di autoinduzione di dispersione:

$$R_e \gg R_i$$

$$L_{de} \ll L_{di}$$

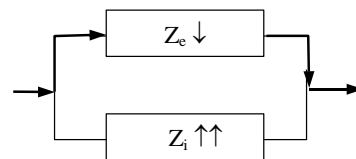
L'impedenza della doppia gabbia è data dal parallelo tra l'impedenza della gabbia interna ( $Z_i$ ) e quella della gabbia esterna ( $Z_e$ ).

$$Z_i = R_i + j s \omega L_{di}, Z_e = R_e + j s \omega L_{de} \Rightarrow Z = Z_e Z_i / (Z_e + Z_i)$$

Allo spunto ( $s = 1$ ), quando la frequenza delle correnti rotoriche coincide con quella dell'alimentazione di statore, la reattanza di dispersione della gabbia interna è molto maggiore di quella della gabbia esterna, tanto da compensare la minore resistenza e da fare sì che la corrente circoli prevalentemente nella gabbia esterna:

$$s = 1 \Rightarrow Z_e \cong R_e \ll \omega L_{di} \cong Z_i \Rightarrow Z \cong Z_e$$

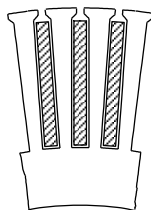
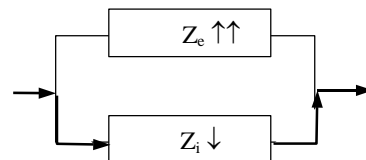
**Essendo la  $R_e$  elevata, l'avviamento è semplice (coppia di spunto elevata).**



Man mano che il motore accelera, la frequenza di rotore si riduce e con essa la reattanza di dispersione e l'impedenza delle due gabbie viene ad essere caratterizzata dal valore della resistenza: la corrente progressivamente si sposta dalla gabbia esterna a quella interna. A regime ( $s \cong 0$ ), è la resistenza della gabbia interna, che è molto minore di quella della gabbia esterna, a fare sì che la corrente circoli prevalentemente nella gabbia interna. Una regolazione analoga si può ottenere mediante l'introduzione di barre alte.

$$s \cong 0 \Rightarrow Z_e \cong R_e \gg R_i \cong Z_i \Rightarrow Z \cong Z_i$$

**Essendo la  $R_i$  ridotta, il rendimento è elevato**



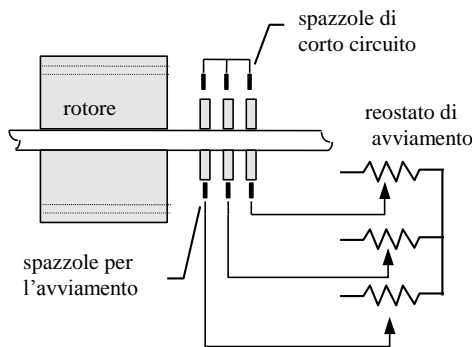
Particolare del rotore a gabbia a barre alte.

Per le potenze elevate si utilizza il motore a Barre Alte. Il rotore di questo motore, costruttivamente semplice, è provvisto di barre di forma allungata, sistemate in cave alte e strette (vedi figura) in cui si determina, all'avviamento, uno spostamento di corrente, dall'esterno verso l'interno, in modo simile a quello che si verifica nel rotore a doppia gabbia.

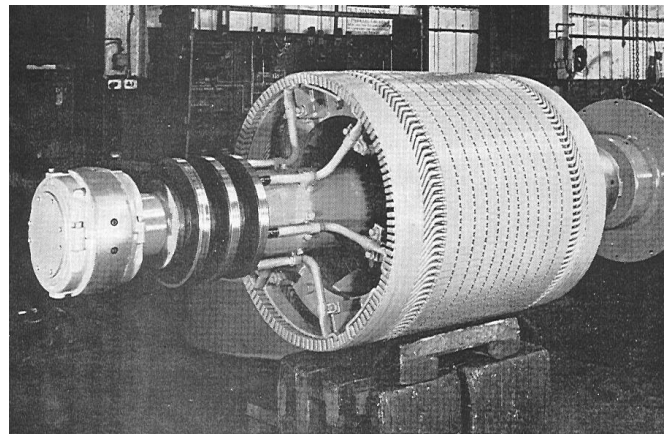
## Rotore avvolto



Nei motori asincroni con rotore avvolto (prevalentemente utilizzati nelle macchine di media e di grande potenza), nelle cave di rotore è alloggiato un avvolgimento avente lo stesso passo polare dell'avvolgimento di statore. Il numero delle fasi dell'avvolgimento di rotore può in generale essere anche diverso da quello dell'avvolgimento di statore. L'avvolgimento di rotore è collegato a stella con i terminali facenti capo a tre anelli conduttori, isolati sia tra loro che dall'albero sul quale sono calettati. Sugli anelli poggiano delle spazzole mediante le quali le fasi dell'avvolgimento rotorico vengono collegate a tre resistenze esterne, variabili, solitamente collegate a stella. Il complesso delle tre resistenze variabili forma il **reostato di avviamento**, il cui scopo principale è quello di limitare le correnti assorbite dal motore durante l'avviamento ed aumentare la coppia di spunto. La manovra di avviamento si esegue con tutte le resistenze inserite. Man mano che il motore accelera le resistenze vengono gradualmente escluse. Durante il funzionamento a regime i tre anelli vengono cortocircuitati.



Sezione longitudinale di un rotore avvolto.



Rotore di macchina asincrona avvolto.

Tutte le macchine elettriche sono dotate di una targa che fornisce importanti informazioni necessarie per la loro scelta ed il loro utilizzo. In figura è riportata la targa di un motore asincrono trifase da 30 HP della Siemens progettato per funzionare a 460 V e 60 Hz; corrente nominale 34.9 A; velocità nominale è 1.765 r.p.m., scorrimento nominale 1.9%, rendimento 93.6%. Il fattore di servizio indica che il motore può funzionare in modo intermittente ad una potenza pari a 1,15 P<sub>n</sub>. La classe di isolamento è F (che consente una sovratemperatura massima di 105°C) e la temperatura ambiente è standardizzata a 40°C, pertanto la massima temperatura ammessa è 145 °C. La temperatura di funzionamento di un motore è importante sia per il rendimento che per la durata di vita (un incremento di 10 °C della temperatura di funzionamento può diminuire la durata di vita dell'isolante di più del 50%).

| <b>SIEMENS</b>  |                |             |   |                    |            |
|---|----------------|-------------|---|--------------------|------------|
| PE*21 PLUS™   |                |             |   | PREMIUM EFFICIENCY |            |
| ORD.Nº.   | 1LA02864SE41   |             |   | Nº.                |            |
| TYPE  | RGZESD         |             |   | FRAME              | 288T       |
| H. P.   | 30.00          |             |   | SERVICE FACTOR     | 1.15       |
| AMPS  | 34.9           |             |   | VOLTS              | 460        |
| R.P.M.  | 1765           |             |   | HERTZ              | 60         |
| DUTY  | CONT 40°C AMB. |             |   | DATE CODE          |            |
| CLASS INSUL.  | F              | NEMA DESIGN | B | K.V.A. CODE        | G          |
| SH. END BRG.  | 50BC03JPP3     |             |   | NEMA NOM. EFF.     | 93.6       |
|   |                |             |   | OPP. END BRG.      | 50BC03JPP3 |
| <b>MILL AND CHEMICAL DUTY QUALITY INDUCTION MOTOR</b> |                |             |   |                    |            |
| Siemens Energy & Automation, Inc. Little Rock, AR     |                |             |   | MADE IN U.S.A.     |            |

# MACCHINE SINCRONE TRIFASE

## PRINCIPIO DI FUNZIONAMENTO

Lo statore è costituito come quello della macchina asincrona trifase: è di materiale ferromagnetico laminato e nelle cave ricavate alla periferia del traferro è alloggiato un avvolgimento trifase percorso da correnti alternate. Per evitare la circolazione di correnti dovute a terne armoniche nelle f.e.m., l'avvolgimento di statore è solitamente collegato a stella. Il rotore in generale è di materiale ferromagnetico massiccio (eventualmente sono laminate le espansioni polari) ed è sede di un avvolgimento di eccitazione percorso da corrente continua. Si possono avere due diversi tipi di struttura di rotore: a poli lisci ed a poli salienti. La figura 1.1.a mostra il rotore di una macchina a poli lisci. L'avvolgimento di eccitazione (o di campo) è disposto nelle cave distribuite lungo la periferia del rotore. Il traferro ha spessore costante ed il circuito magnetico è isotropo. La figura 1.1.b mostra una macchina a poli salienti. L'avvolgimento di eccitazione è costituito da bobine avvolte sui corpi dei poli. Il traferro in questo caso ha spessore variabile ed il circuito magnetico è anisotropo; in particolare vengono evidenziati l'asse polare, in cui il traferro è minimo e l'asse interpolare, in cui il traferro è massimo.

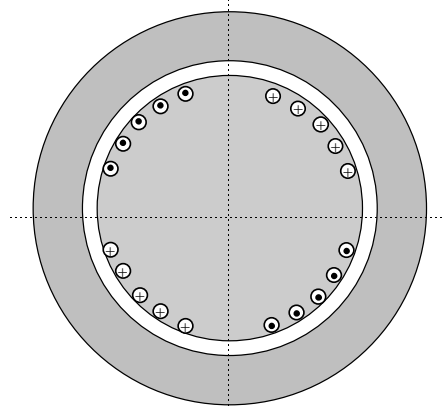


Fig. 1.1.a - Sezione di una macchina sincrona a poli lisci.

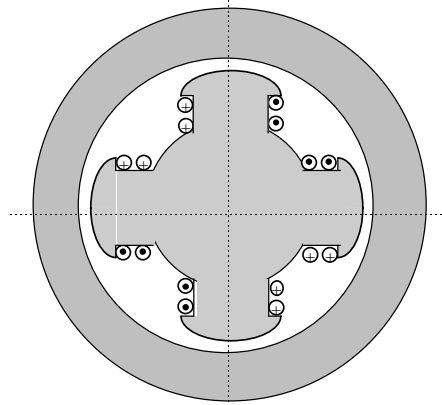


Fig. 1.1.b - Sezione di una macchina sincrona a poli salienti.

L'avvolgimento di eccitazione, percorso dalla corrente continua  $i_e$ , crea un campo magnetico in modo tale che si possono distinguere successivamente un "polo nord" (flusso "uscente" dal polo) e un "polo sud" (flusso "entrante" nel polo). La distanza fra l'asse di un polo nord e di un polo sud misurata al traferro è pari al passo polare  $\tau$  la cui espressione è la seguente, dove  $R$  è il raggio interno dello statore e  $p$  il numero di coppie di poli dell'avvolgimento:

$$\tau = \frac{\pi R}{p} \quad (1.1)$$

**L'andamento spaziale del campo di eccitazione lungo la periferia del traferro risulta sinusoidale, a meno di armoniche superiori che è possibile trascurare in prima approssimazione. Nella macchina a poli lisci ciò viene ottenuto distribuendo opportunamente le cave o la corrente al traferro, nella macchina a poli salienti, sagomando le espansioni polari.**

La figura 1.2 mostra parte del circuito magnetico di una macchina anisotropa, costituita da due poli e relativa corona d'indotto. Come si vede, il traferro lungo l'espansione polare non è costante passando dal valore minimo  $\delta_0$ , in mezzeria dell'espansione polare, a quello di valore circa doppio agli estremi dell'espansione polare. La legge di variazione utilizzata è  $\delta = \delta_0 / \cos(p\alpha)$ , essendo  $p$  il

numero di coppie polari. Al di fuori delle espansioni polari il traferro assume valori estremamente elevati.

Quando si pone in rotazione il rotore alla velocità angolare costante  $\omega_m$ , il campo di eccitazione, solidale col rotore, ruota al traferro alla velocità  $\omega_c = \omega_m$ . Il campo rotante così prodotto induce nell'avvolgimento trifase che è alloggiato nelle cave di statore un sistema trifase simmetrico di f.e.m., sinusoidali nel tempo con pulsazione  $\omega$  data dalla seguente relazione:

$$\omega = p \omega_m \quad (1.2)$$

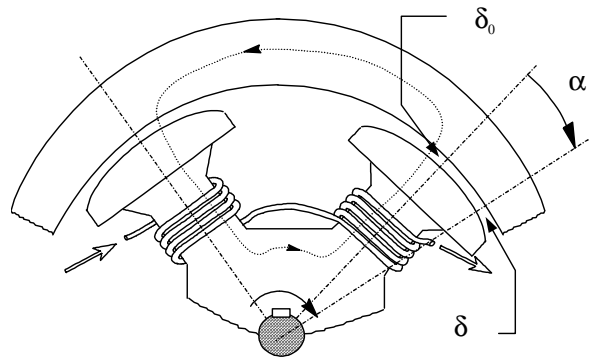


Figura 1.2

Se lo statore alimenta un carico equilibrato, esso diventa sede di tre correnti di pulsazione  $\omega$  che producono un campo rotante statorico. Quindi (se il numero di coppie polari dello statore è uguale al numero di coppie polari del rotore) il campo rotante statorico ruota con velocità angolare  $\omega_c = \omega/p = \omega_m$ . **Il campo rotante statorico  $\widehat{B}_s$  risulta dunque immobile rispetto al campo rotante rotorico  $\widehat{B}_r$  e quindi il campo risultante è un campo che ruota al traferro con la velocità del rotore**, da cui il nome di macchina sincrona ( $\widehat{B}_s$  e  $\widehat{B}_r$  hanno la stessa velocità e si sommano)

Il funzionamento intuitivo della Macchina sincrona si può illustrare con la seguente “catena logica”:

$$i_r \rightarrow B_r \rightarrow \widehat{B}_r \rightarrow \overset{\wedge}{E}_s \rightarrow \overset{\wedge}{I}_s \rightarrow \widehat{B}_s \rightarrow \widehat{B} = \widehat{B}_s + \widehat{B}_r \quad (1.3)$$

$\omega_m (\equiv n')$      $\uparrow$      $\uparrow$

dove  $\wedge$  indica un sistema simmetrico (di tensioni) o equilibrato (di correnti),  $\widehat{\phantom{x}}$  indica il campo rotante ed i pedici s ed r indicano statore e rotore, rispettivamente.

La potenza meccanica fornita all'albero della macchina per vincere la resistenza della coppia elettromagnetica dovuta allo sfasamento fra campo statorico e campo rotorico, viene trasformata, a meno delle perdite interne della macchina, in potenza elettrica ceduta al carico collegato allo statore. La macchina funziona quindi da generatore e viene chiamata **alternatore**.

Si può dimostrare che per una macchina sincrona a poli lisci in rotazione a velocità costante (si suppongono valide le ipotesi di campo illustrate relativamente al campo rotante), la caratteristica tensione-corrente sulla prima fase di statore (e analogamente per le altre) ha la seguente forma (riferimenti associati con convenzione del generatore):

$$\underline{V} = -j X_s \underline{I} + \underline{E}_0$$

ove la reattanza sincrona  $X_s$  è una costante della macchina considerata e la tensione a vuoto  $E_0$  dipende dalla corrente di eccitazione. La **curva di magnetizzazione (caratteristica a vuoto)** fornisce sperimentalmente la tensione ai morsetti di statore in funzione della corrente di eccitazione. A causa della saturazione del materiale ferromagnetico tale curva non è rettilinea.

Per alimentare l'avvolgimento viene utilizzata una sorgente esterna che viene collegata mediante un collettore ad anelli. Per potenze elevate vengono impiegate delle eccitatrici senza spazzole, costituite da una macchina sincrona con il circuito di eccitazione montato sullo statore ed il circuito d'armatura montato sull'albero del rotore (vedi figure). L'uscita trifase del generatore di eccitazione viene raddrizzata tramite un circuito raddrizzatore trifase pure montato sull'albero. La corrente continua così prodotta viene inviata al circuito di eccitazione principale. Quando il circuito di eccita-

zione è sostituito da magneti permanenti, si ottiene un sistema indipendente da qualsiasi sorgente di potenza elettrica esterna.

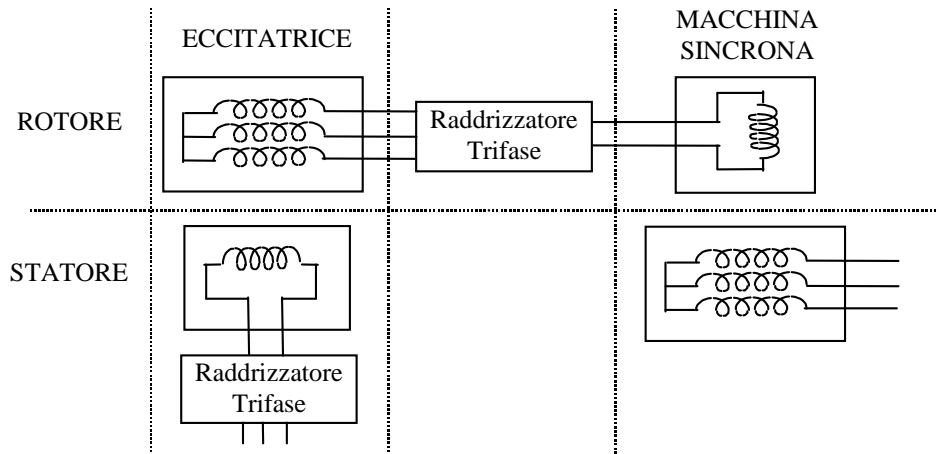


Figura 1.a. - Schema di macchina sincrona con eccitatrice

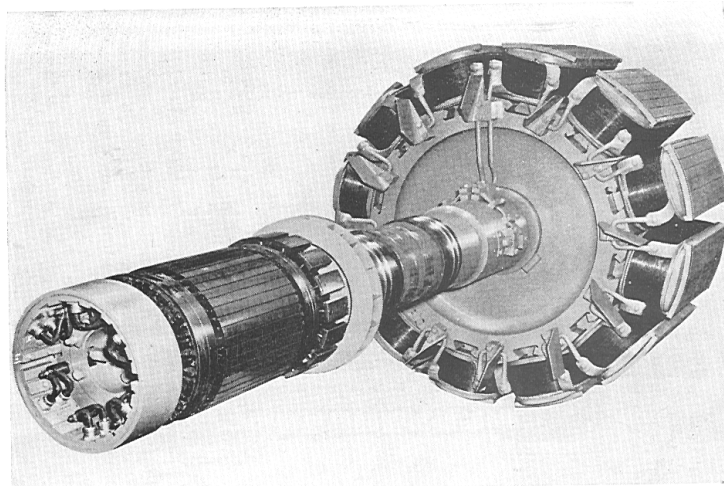


Figura 1.b - Rotore di macchina sincrona con eccitatrice coassiale.

### PARALLELO CON UNA RETE TRIFASE DI POTENZA INFINITA

Si supponga di collegare l'avvolgimento statorico di una macchina sincrona ad una rete trifase, già alimentata da altri alternatori. Si supponga inoltre che la potenza di questi ultimi sia tale da poter considerare che il valore efficace e la frequenza della terna di tensioni concatenate della rete siano indipendenti dalle correnti assorbite dalla macchina sincrona che viene collegata (rete di potenza infinita). Per potere effettuare correttamente il parallelo con la rete di potenza infinita è necessario portare prima la macchina sincrona in un regime di funzionamento, a vuoto, in cui le tensioni concatenate presenti ai morsetti della macchina coincidano in valore efficace, frequenza e fase con quelle della rete. Se così non fosse infatti, alla chiusura dell'interruttore di collegamento della macchina con la rete si svilupperebbero nello statore della macchina sincrona delle correnti di valore elevato che potrebbero provocare la rottura della macchina stessa.

Con riferimento alla figura 2, la sequenza delle operazioni da eseguire per effettuare il parallelo è la seguente:

1. La macchina viene portata in rotazione, a vuoto, alla velocità di sincronismo imposta dalla frequenza di rete ( $n = 60 f / p$ ) dal motore M che in questo caso deve fornire solo la coppia necessaria a vincere gli attriti interni della macchina.

2. Viene alimentato l'avvolgimento di eccitazione con una tensione tale da ottenere ai morsetti della macchina un sistema di tensioni concatenate avente una frequenza ed un valore efficace coincidenti con quelli della rete e misurati mediante i voltmetri V e V' ed i frequenzimetri f ed f'. La macchina opera ancora a vuoto e quindi ancora il motore M deve fornire solo la coppia necessaria per vincere gli attriti.

3. Si agisce sul motore M, con una regolazione fine della velocità, per portare tensioni concatenate di rete e di macchina a coincidere sia come frequenza che come fase, viene chiuso l'interruttore T ed il parallelo è concluso.

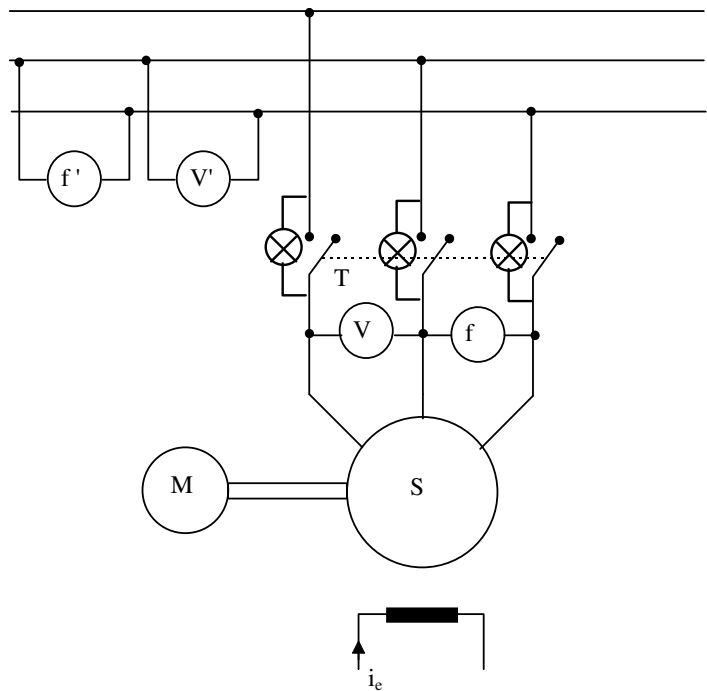


Figura 2 - Parallelo di una macchina sincrona (S) con una rete di potenza infinita.

Al termine delle operazioni di parallelo, la macchina sincrona è collegata alla rete, ma funziona ancora a vuoto, in quanto le f.e.m. indotte nelle fasi di statore uguagliano le tensioni concatenate e quindi le correnti nelle fasi di statore risultano nulle. A partire da questa condizione di funzionamento è possibile portare la macchina sincrona a funzionare come generatore, erogando potenza sia attiva che reattiva alla rete, oppure come motore, assorbendo potenza elettrica dalla rete, oppure come compensatore sincrono, erogando solo potenza reattiva alla rete.

### Coppia elettromagnetica

È possibile ottenere una buona approssimazione della coppia elettromagnetica, considerando il bilancio energetico della macchina sincrona e trascurando le perdite nel ferro e nel rame di statore. In tal caso infatti, visto che la potenza elettrica assorbita dal rotore viene interamente dissipata per effetto Joule nell'avvolgimento di rotore, tutta l'energia elettrica assorbita in un periodo dall'avvolgimento di statore, viene trasformata in energia meccanica erogata all'albero. Si può dimostrare che la coppia elettromagnetica risulta:

$$C_e = -3 \frac{p}{\omega} \frac{VE_0}{X_s} \sin(\delta)$$

ove  $\delta$  è lo sfasamento della tensione a vuoto  $\underline{E}_0$  rispetto alla tensione  $\underline{V}$ . Esso viene chiamato “angolo di carico” corrispondente alla condizione di funzionamento considerata. Quando l'angolo di carico è positivo ( $\underline{E}_0$  in anticipo rispetto a  $\underline{V}$ ), la coppia risulta negativa, cioè la macchina assorbe potenza meccanica ed eroga potenza elettrica attiva alla rete trifase (**funzionamento da generatore**). Quando l'angolo di carico è negativo ( $\underline{E}_0$  in ritardo rispetto a  $\underline{V}$ ), la coppia è positiva, cioè la macchina eroga potenza meccanica ed assorbe potenza elettrica attiva dalla rete trifase (**funzionamento da motore**). Quando l'angolo di carico è nullo ( $\underline{E}_0$  in fase con  $\underline{V}$ ), la coppia è nulla, cioè la macchi-

na non scambia né potenza meccanica né potenza elettrica attiva, può però scambiare potenza elettrica reattiva con la rete trifase; si dice allora che la macchina funziona da compensatore sincrono.

### Funzionamento da generatore

Se, tramite il motore M, viene fornita potenza meccanica al rotore; ha inizio un transitorio in cui il rotore tende ad accelerare e le f.e.m. indotte nelle fasi di statore si sfasano rispetto alle tensioni delle rete. Circola corrente nell'avvolgimento di statore e si crea una coppia elettromagnetica resistente. La condizione di regime viene raggiunta quando la coppia elettromagnetica resistente uguaglia la coppia meccanica fornita al rotore. La potenza meccanica assorbita all'albero dalla macchina viene trasformata in potenza elettrica ed erogata alla rete. È quindi possibile variare la potenza elettrica reattiva erogata alla rete, semplicemente variando la corrente di eccitazione della macchina.

### Funzionamento da motore

Se il motore M viene sostituito col carico meccanico che si vuole trascinare, al rotore della macchina viene applicata una coppia resistente; ha inizio un transitorio in cui il rotore tende a rallentare e le f.e.m. indotte nelle fasi di statore si sfasano rispetto alle tensioni delle rete. Circola corrente nell'avvolgimento di statore e si crea una coppia elettromagnetica motrice. La condizione di regime viene raggiunta quando la coppia elettromagnetica motrice uguaglia la coppia meccanica resistente applicata al rotore. La potenza elettrica assorbita dalla rete viene trasformata in potenza meccanica erogata all'albero della macchina. Il principale ostacolo nella applicazione del motore sincrono consiste nel valore nullo della coppia di spunto e quindi nella necessità di avere comunque a disposizione un motore di lancio. L'alternativa al motore di lancio esterno consiste nel sistema di autoavviamento. Quest'ultimo consiste in una speciale gabbia di scoiattolo che si sistema sul rotore entro cave ricavate sulle espansioni polari. Il motore si avvia quindi, una volta chiuso l'interruttore di rete, come un motore asincrono. Giunti in prossimità della velocità di sincronismo, si eccita il rotore, che viene accelerato da parte dell'avvolgimento statorico fino a raggiungere il sincronismo.

### Funzionamento da compensatore sincrono

Se, agendo sulla tensione di alimentazione dell'avvolgimento di eccitazione, si aumenta la corrente di eccitazione della macchina, ha inizio un transitorio in cui le f.e.m. indotte nelle fasi di statore, pur restando in fase con le tensioni imposte dalla rete di alimentazione, le superano in valore efficace. Si genera quindi una corrente di armatura  $\underline{I}$  che risulta in quadratura ritardo rispetto alla f.e.m.  $\underline{E}_0$  ed alla tensione  $\underline{V}$  (vedi figura 4.3.a). La potenza elettrica erogata è una potenza reattiva puramente induttiva: tutto avviene come se la macchina sincrona fosse un condensatore (**condensatore rotante**) la cui capacità può essere variata a piacere semplicemente variando la corrente di eccitazione. Viceversa, se si diminuisce la corrente di eccitazione, la f.e.m.  $\underline{E}_0$  risulta minore della tensione  $\underline{V}$  e la corrente di armatura  $\underline{I}$  risulta in quadratura anticipo rispetto ad  $\underline{E}_0$  e  $\underline{V}$  (vedi figura 4.3.b). La potenza elettrica erogata è una potenza reattiva puramente capacitiva; tutto avviene come se la macchina sincrona fosse un induttore (**induttore rotante**) la cui induttanza può essere variata a piacere semplicemente variando la corrente di eccitazione.

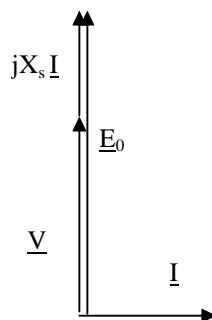


Figura 4.3.a - Diagramma fasoriale del condensatore sincrono

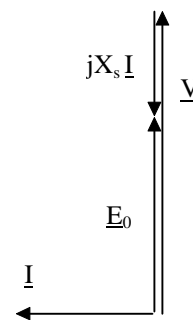


Figura 4.3.b - Diagramma fasoriale dell'induttore sincrono

## MACCHINE IN CORRENTE CONTINUA

### Schema di Principio e f.e.m.

È indicato in figura l' "Anello di Pacinotti".

L' avvolgimento di eccitazione (avvolgimento di statore) è avvolto sui poli [N e S] e determina il flusso  $\Phi$ .

L' avvolgimento di indotto, disposto sul rotore, è chiuso.

La f.e.m. indotta in una generica spira [ $\Phi \neq 0, n' \neq 0$ ] è:

$$e = - \frac{d\Phi_c}{dt} \quad (1)$$

ove

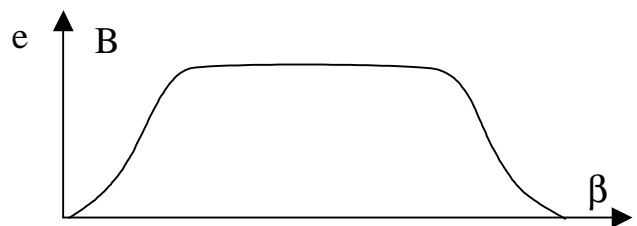
$$\Phi_c = \Phi_c(\beta) \quad (2)$$

da cui

$$e = - \frac{d\Phi_c}{d\beta} \frac{d\beta}{dt} = BR\ell\omega_m = Blv \quad (3)$$

ove B è la componente normale alla superficie esterna dell'anello del vettore induzione magnetica, R è il raggio al traferro,  $\ell$  la lunghezza assiale,  $\omega_m$  è la velocità angolare e  $v = R \omega_m$  è la velocità periferica dell'anello.

Per una data velocità  $\omega_m$  la f.e.m. è proporzionale a B (vedi figura, ove è indicato l'andamento dell'induzione, e quindi della f.e.m., sotto un polo).



- La f.e.m. complessiva nell'avvolgimento di indotto è nulla (a due a due si annullano i contributi di spire diametrali).
- La f.e.m. che si raccoglie fra le "spazzole" A, B è invece espressa dalla somma delle f.e.m. relative ad una "via interna" (uno dei due tratti AB):

$$E = e_1 + e_2 + e_3 + \dots \quad (4)$$

da cui

$$E = \frac{e_1\Delta t + e_2\Delta t + e_3\Delta t + \dots}{\Delta t} = \frac{\Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 + \Delta\phi_3 + \dots}{\Delta t} = \frac{\Phi}{\Delta t} \quad (5)$$

ove  $\Delta t$  è il tempo necessario affinché il rotore ruotando percorra la distanza che separa due spire contigue. Nel caso di macchina a due poli (come l'Anello di Pacinotti)  $\Delta t$  vale:

$$\Delta t = \frac{60}{N_s n'} \quad (6)$$

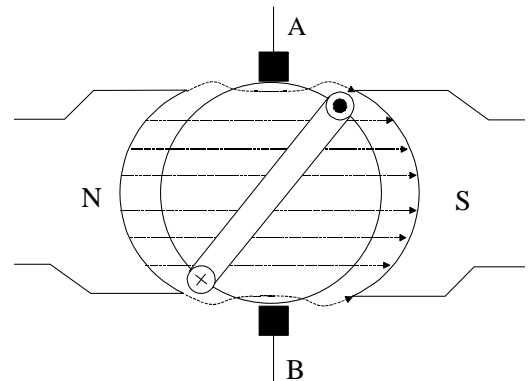
ove dove  $n'$  è il numero di giri al minuto del rotore e  $N_s$  il numero di spire dell'indotto. Sostituendo la (6) nella (5) si ottiene:

$$E = \frac{n'}{60} N_s \Phi \quad (7)$$

È possibile generalizzare la (7) [se ne tralascia la dimostrazione] al caso di macchina con avvolgimento a tamburo, 2a vie interne e  $2p$  poli. Risulta:

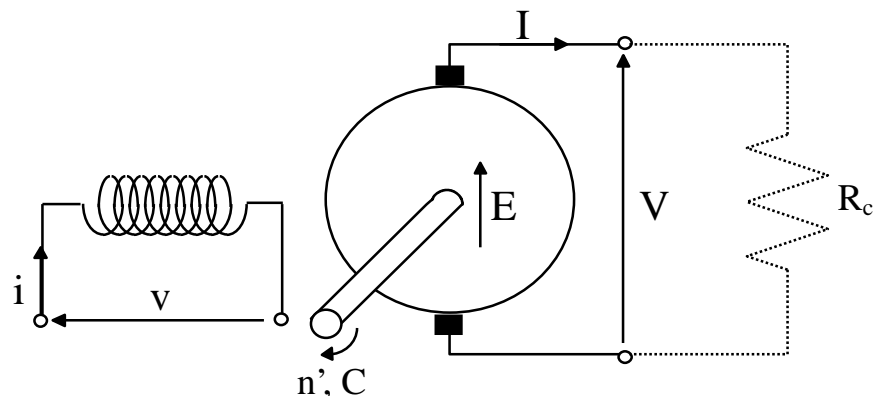
$$E = \frac{2p}{2a} \frac{n'}{60} N \Phi \quad (8)$$

dove  $N$  è il numero di conduttori attivi. Ciò è legato al fatto che, nell'avvolgimento a tamburo (vedi figura) le spire hanno un flusso concatenato massimo pari a  $\Phi$  anziché a  $\Phi/2$  come negli avvolgimenti ad anello.



### Equazioni Fondamentali

La figura mostra lo schema di una macchina generatrice ("dinamo") a eccitazione indipendente. Le equazioni interne si scrivono immediatamente:

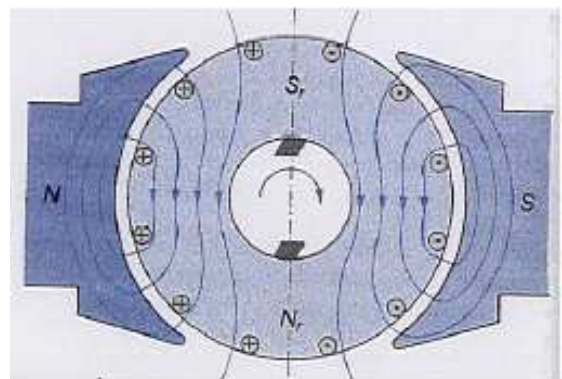


$$v = r i \quad (9)$$

$$k n' \Phi = V + R I \quad (10)$$

$$N_e i = R \Phi \quad (11)$$

Nella (10) la f.e.m., espressa dalla (8), è indicata con  $kn'\Phi$ . Essendo  $k$  una costante di macchina [ $k = \frac{2p}{2a} \frac{N}{60}$ ]. La (11) ["l'equazione di accoppiamento magnetico"] è scritta, nell'ipotesi di trascurare la saturazione del ferro e coincide quindi con la legge di Hopkinson. È da notare che in essa non compare il contributo di amperspire relativo alla corrente  $I$  di indotto. Ciò si giustifica pensando che la corrente rotorica genera un campo magnetico ("**REAZIONE DI ARMATURA**") le cui linee di flusso danno però un contributo nulla al flusso uscente dal polo (vedi figura).





Nel caso in cui si voglia tenere conto della saturazione il fenomeno della reazione di armatura si complica sensibilmente e si può dimostrare che, in questo caso, il flusso  $\Phi$  dipende in parte anche dalla corrente  $I$ .

### Coppia

Dalla (10) si trae il seguente bilancio energetico:

$$kn'\Phi I = VI + RI^2 \quad (12)$$

Potenza meccanica = Potenza erogata al carico + Potenza dissipata

La coppia si deduce dalla potenza meccanica con ovvio passaggio:

$$C = \frac{kn'\Phi I}{2\pi n'} = \frac{60}{2\pi} \frac{2p}{2a} \frac{N}{60} \Phi I \quad (13) \Rightarrow C = k_c \Phi I \quad (14)$$

avendo posto  $k_c = (2p/2a)(N/2\pi)$  [(15)].

### Equazioni esterne

Le variabili che figurano nelle equazioni fondamentali sono sei, e precisamente  $v$ ,  $i$ ,  $n'$ ,  $\Phi$ ,  $V$ ,  $I$ . TRE sono quindi i gradi di libertà che si possono saturare imponendo tre condizioni (“equazioni di collegamento con l’esterno”). Ad esempio:

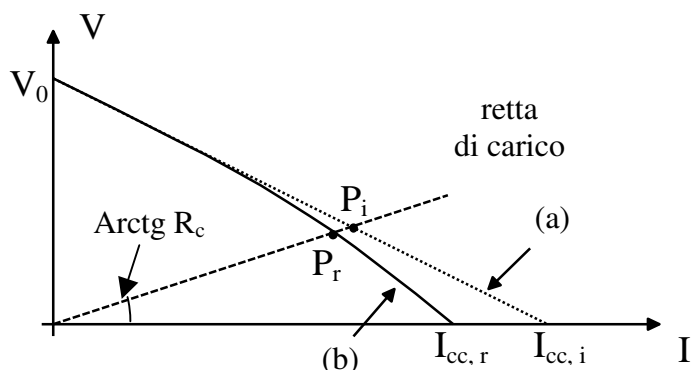
$$\begin{aligned} v &= \text{costante} \\ n' &= \text{costante} \\ V &= R_c I \end{aligned} \quad (16)$$

L’ultima delle (16) è la legge di Ohm applicata al carico esterno  $R_c$  che si suppone noto.

### Caratteristica esterna

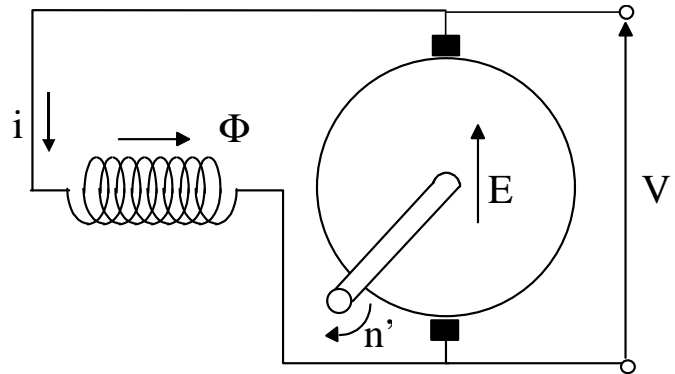
È la curva  $V = V(I)$  a  $i = \text{cost.}$ ,  $n' = \text{cost.}$  [ $I$  è la variabile “pilota”]. La retta (a) [vedi figura], deducibile dalla (10), è la caratteristica teorica in assenza di saturazione; la curva (b), sperimentale, è la caratteristica reale.

In figura è pure indicata la “retta di carico” (o caratteristica dell’utente) la cui espressione analitica è rappresentata dall’ultima delle (16). Il punto di funzionamento della macchina si realizza ovviamente all’incrocio della caratteristica esterna della di-



## Dinamo Autoeccitate

Il tipo più impiegato è indicato in figura (**dinamo autoeccitata in derivazione**). Facendo ruotare la macchina ad un dato numero di giri  $n'$ , nasce una tensione  $V$  tra i morsetti. Ciò è dovuto alla presenza di un magnetismo residuo e alla non linearità della "caratteristica di eccitazione"  $\Phi = \Phi(i)$ .



Il fenomeno dell'autoeccitazione è descritto dalla seguente catena logica:

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_r \\ n' \end{array} \right\} \xrightarrow{(8)} E_r \rightarrow i \rightarrow \Phi \uparrow\uparrow \rightarrow E \uparrow\uparrow \rightarrow i \uparrow\uparrow \dots$$

L'avviamento di una dinamo autoeccitata in parallelo è possibile grazie alla presenza della magnetizzazione residua sempre presente nel nucleo della macchina, e può essere qualitativamente descritta come segue:

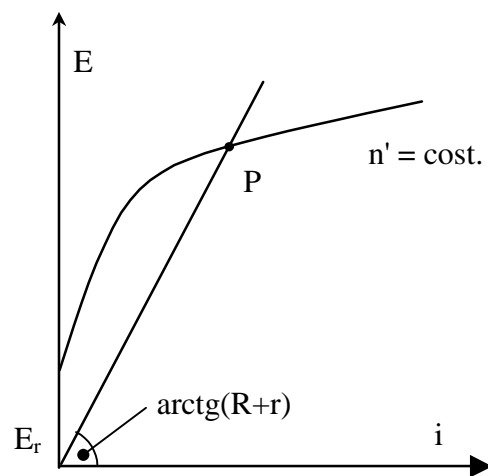
- La rotazione dell'albero provoca un movimento delle spire dell'indotto nelle linee di campo d'induzione residuo. Si genera una f.e.m. nelle spire d'indotto, che si traduce in una tensione alle spazzole  $E$ .
- La f.e.m. alle spazzole provoca una corrente  $i$  nell'avvolgimento eccitatore. Il flusso generato da tale corrente, che, se il rotore gira nel verso opportuno, è concorde con il flusso residuo. Il flusso al traferro quindi aumenta.
- L'incremento del flusso causa un incremento della f.e.m. agente sulle spire e, conseguentemente, un aumento della tensione alle spazzole. Il ciclo si richiude al punto b), finché non si è raggiunta la condizione stazionaria (il fenomeno raggiunge un equilibrio per la presenza della saturazione).

Per determinare il punto di funzionamento in condizioni stazionarie occorre risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} E = (R + r)i & (17) \\ E = kn\Phi(i) & (18) \end{cases}$$

Le (17) e (18) costituiscono il sistema che fornisce, nel funzionamento a vuoto, le incognite  $E$ ,  $i$ . In figura è indicata la soluzione grafica del sistema che descrive il fenomeno dell'autoeccitazione.

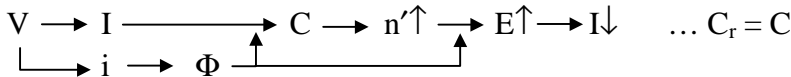
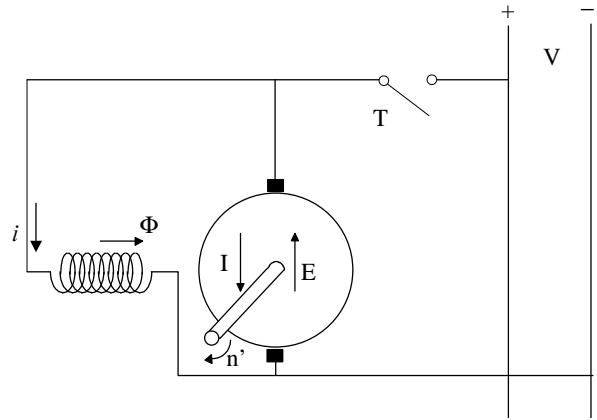
È opportuno osservare che, se si desidera che una dinamo si autoecciti, è necessario ruotare l'albero in verso opportuno e ciò al fine di non distruggere il flusso residuo



## Motori a Corrente Continua

### Motori eccitati in derivazione

Lo schema è indicato in figura. Alla chiusura dell'interruttore T il motore si avvia. Fisicamente ciò si giustifica con la seguente catena logica:



Il funzionamento della macchina può essere spiegato intuitivamente come segue:

- all'avviamento, la tensione  $V$  genera nell'avvolgimento di eccitazione una corrente  $i$ , che una volta esaurito il transitorio, tende al valore  $V/r$ . La corrente  $i$  genera il flusso principale;
- all'avviamento, la tensione  $V$  genera nell'avvolgimento di indotto una corrente  $I$ , che in assenza di flusso principale assume valore  $V/R$ . Tale corrente viene detta corrente di spunto;
- l'interazione della corrente di indotto  $I$  con il flusso principale dà luogo ad una coppia motrice. Se tale coppia è maggiore della coppia resistente, l'albero del motore comincia a ruotare con moto accelerato;
- la rotazione dell'albero provoca il moto delle spire di indotto attraverso il flusso di induzione. Su ogni spira si induce quindi una f.e.m. che produce una tensione alle spazzole  $E$  che si oppone alla tensione  $V$ ;
- la f.e.m.  $E$ , detta anche f.e.m. controelettromotrice, provoca una diminuzione della corrente di indotto  $i$ , e, di conseguenza, una diminuzione della coppia motrice;
- finché la coppia motrice rimane maggiore della coppia resistente, il rotore continua ad aumentare la sua velocità angolare. L'aumento di velocità angolare causa l'aumento della f.e.m. controelettromotrice  $E$ , quindi la diminuzione della corrente di indotto  $I$  e infine la diminuzione della coppia motrice. Il transitorio di avviamento si arresta una volta raggiunta la condizione di equilibrio tra la coppia motrice e quella resistente

Con le convenzioni di figura, le equazioni risultano:

$$V = r i \quad (19)$$

$$V = k n' \Phi + R I \quad (20)$$

$$N i = R \Phi \quad (21)$$

ove  $E = k n' \Phi$

n° variabili 5 →  $V, i, I, \Phi, n'$

n° equazioni 3

n° gradi 2

I due gradi di libertà si possono saturare con due condizioni corrispondenti a due equazioni di collegamento con l'esterno:

$$k_c \Phi I = C_u \quad (22)$$

$$V = \text{costante} \quad (23)$$

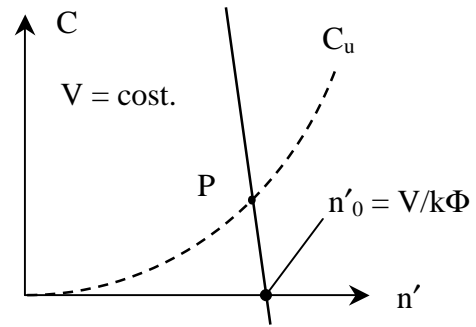
ove  $C = k_c \Phi I$

è la coppia elettromagnetica del motore.

Caratteristica meccanica C(n)

La variabile pilota è  $n'$ , la grandezza che si fissa è  $V$ .

$$(20) \rightarrow n' = \frac{V - RI}{k\Phi} \xrightarrow{(14)} n' = \frac{V - R \frac{C}{k_c \Phi}}{k\Phi} \quad (24)$$

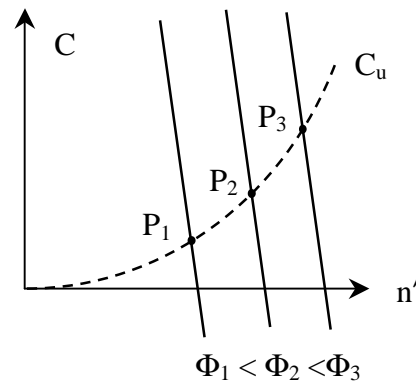
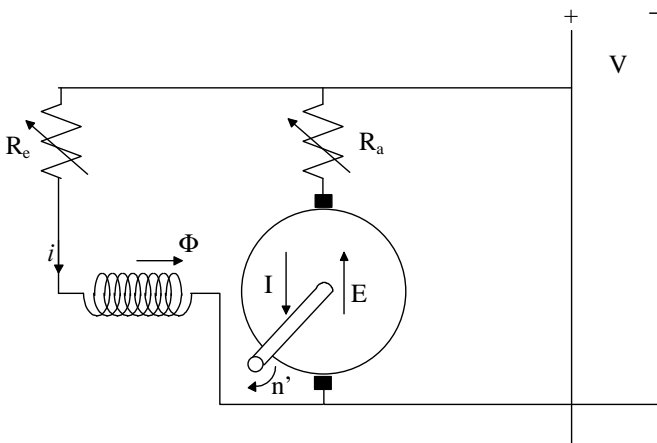


Se  $V = const. \xrightarrow{(19)} i = const. \xrightarrow{(21)} \Phi = const.$ , quindi la (24) è una retta (vedi figura).

Il punto di funzionamento  $P$  si ha all'intersezione della caratteristica meccanica con la caratteristica dell'utilizzatore (vedi figura). Tale intersezione può essere variata (ottenendo un "regolazione di velocità") modificando il flusso mediante un reostato di eccitazione  $R_e$ .

Ciò si verifica immediatamente considerando la velocità a vuoto ( $C = 0$ ):

$$n'_0 = \frac{V}{k\Phi} \quad (25) \Rightarrow \Phi \downarrow, n'_0 \uparrow$$



Avviamento

$$(20) \rightarrow I = \frac{V - kn'\Phi}{R} \xrightarrow{(n'=0)} I_{avv} = \frac{V}{R} \uparrow \uparrow$$

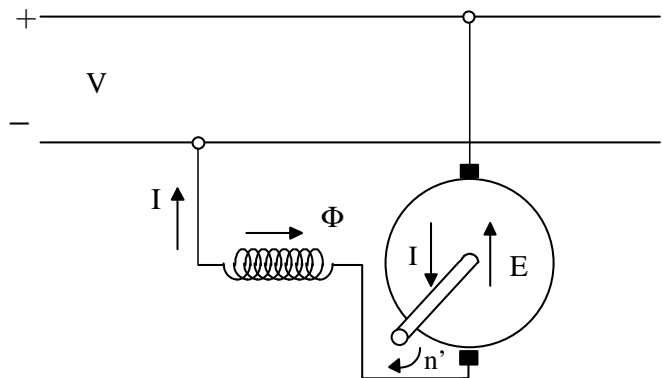
Per limitare la corrente all'avviamento  $I_{avv}$  si ricorre all'inserzione, durante l'avviamento, di un reostato di avviamento  $R_a$ .

Motori eccitati in serie

Equazioni (due)

$$V = kn'\Phi + (R + r) I \quad (26)$$

$$NI = R \Phi \quad (27)$$

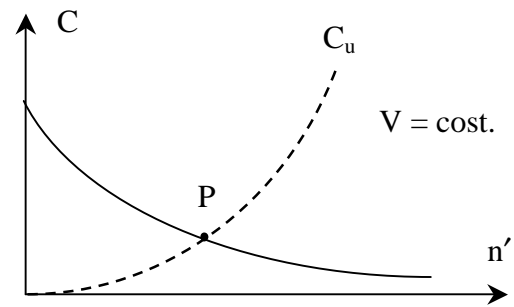


Dalle (14), (26) e (27) si ottiene quindi la caratteristica meccanica:

$$C = \frac{kN}{R} \frac{V^2}{\left[ \frac{kN}{R} n' + (r + R) \right]^2} \quad (28)$$

L'andamento della caratteristica meccanica è mostrato in figura. Per limitare la corrente all'avviamento ( $n' = 0$ ) si ricorre all'inserzione, durante l'avviamento, di un reostato di avviamento  $R_a$ , analogamente a quanto visto per il motore eccitato in derivazione. In condizioni di regime il reostato viene disinserito. In teoria il numero di giri a vuoto ( $C = 0$ ) è infinito. È quindi necessario prendere qualche precauzione affinché il motore non si danneggi qualora accidentalmente funzioni con coppia resistente molto bassa.

È possibile regolare la velocità e la coppia della macchina variando il flusso principale, quindi: a) agendo su un reostato posto in parallelo al circuito di eccitazione; b) variando, mediante un opportuno selettore, il numero di spire del circuito di eccitazione.



## 2. CENNI COSTRUTTIVI

Il rotore di una macchina a c.c. è costituito da un cilindro laminato in materiale ferromagnetico, nella cui periferia sono ricavate le scanalature (**cave**) che accolgono le spire dell'avvolgimento di indotto. I poli sono composti da un nucleo attorno al quale vengono sistemati gli avvolgimenti di eccitazione, e da un'espansione polare, sagomata a ventaglio con profilo concentrico a quello del rotore (vedi figura 2.1). La maggiore sezione dell'espansione polare ha lo scopo di diminuire la riluttanza del traferro. Per la stessa ragione si limita quanto più possibile lo spessore del traferro. A causa dello spostamento dei denti rotorici si hanno sensibili variazioni di flusso sull'espansione polare. Per limitare gli effetti delle correnti parassite dovute a tali variazioni, le espansioni sono costruite con lamierini isolati tra loro con vernici.

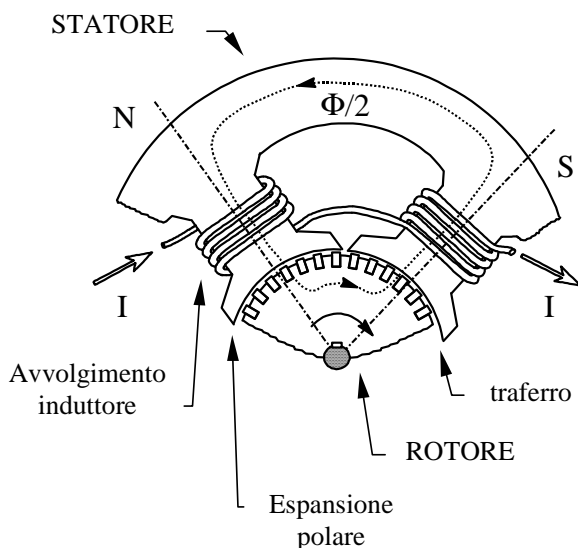


Figura 2.1.

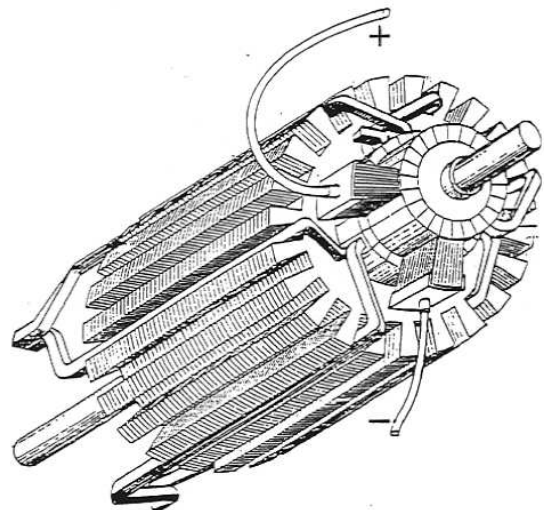


Figura 2.2. - Rotore di una macchina a c.c. con parte dell'avvolgimento.

### 3. REAZIONE DI ARMATURA

Non si è finora parlato dell'effetto delle correnti che passano negli avvolgimenti di indotto. La distribuzione del campo di induzione magnetica è infatti influenzata dalle correnti di indotto, che a loro volta dipendono dal carico applicato alle spazzole. Si consideri la distribuzione del campo di induzione magnetica nel funzionamento a vuoto (vedi figura 3.1). In questo caso l'andamento dell'induzione magnetica è generato unicamente dalle correnti di eccitazione, dal momento che sono nulle le correnti di indotto. Quando invece le spazzole sono connesse ad un carico, le correnti nel circuito rotorico generano una forza magnetomotrice (f.m.m.) che va linearmente lungo il traferro.

Le correnti nel circuito d'indotto generano un campo di induzione magnetica, la cui distribuzione spaziale è mostrata in figura 3.2, e che viene indicato come campo prodotto dalla **reazione d'armatura**. Supponendo valida l'ipotesi di linearità del materiale, è lecito sommare il campo di induzione magnetica prodotto dai circuiti di eccitazione a quello generato dalla reazione dell'armatura, per ottenere il campo risultante illustrato in figura 3.3. È immediato verificare che la deformazione del campo prodotta dalla reazione di indotto provoca lo spostamento dell'asse neutro. Dato che il campo di induzione prodotto dalla reazione di indotto è antisimmetrico rispetto all'asse delle espansioni polari, il flusso totale  $\Phi$  non viene modificato, e quindi rimane invariata la f.e.m. alle spazzole. Quindi, in ipotesi di linearità del mezzo, la tensione erogata dalla macchina risulta indipendente dal carico. In realtà, per la non linearità del ferro, il campo risultante al traferro non è uguale alla somma del campo di eccitazione e del campo di reazione. In particolare, a causa della saturazione del ferro, la diminuzione dell'induzione sotto una metà del polo non è completamente compensata dall'aumento sotto l'altra metà. Questo provoca una diminuzione di flusso e quindi una diminuzione della f.e.m. a carico rispetto a quella a vuoto.

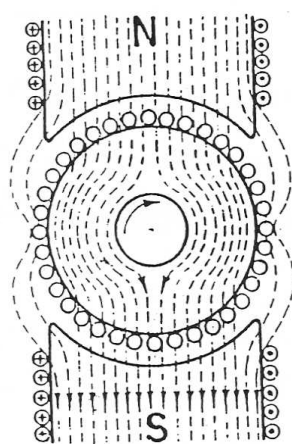


Figura 3.1  
CAMPO INDUTTORE

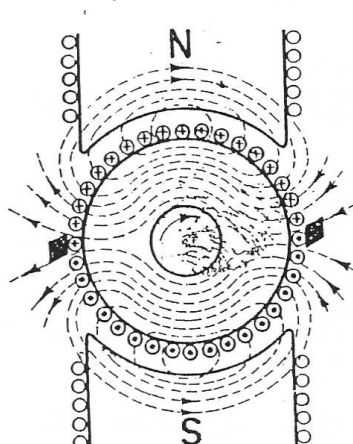


Figura 3.2  
CAMPO TRASVERSALE  
(o INDOTTO)

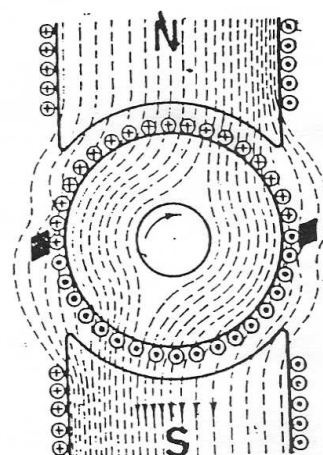


Figura 3.3  
CAMPO RISULTANTE

Concludiamo riassumendo gli effetti principali prodotti dalla reazione di armatura:

- Distorsione del campo;
- spostamento dell'asse neutro;
- peggioramento della commutazione;
- diminuzione del flusso al traferro (in saturazione);

#### 4. LA COMMUTAZIONE

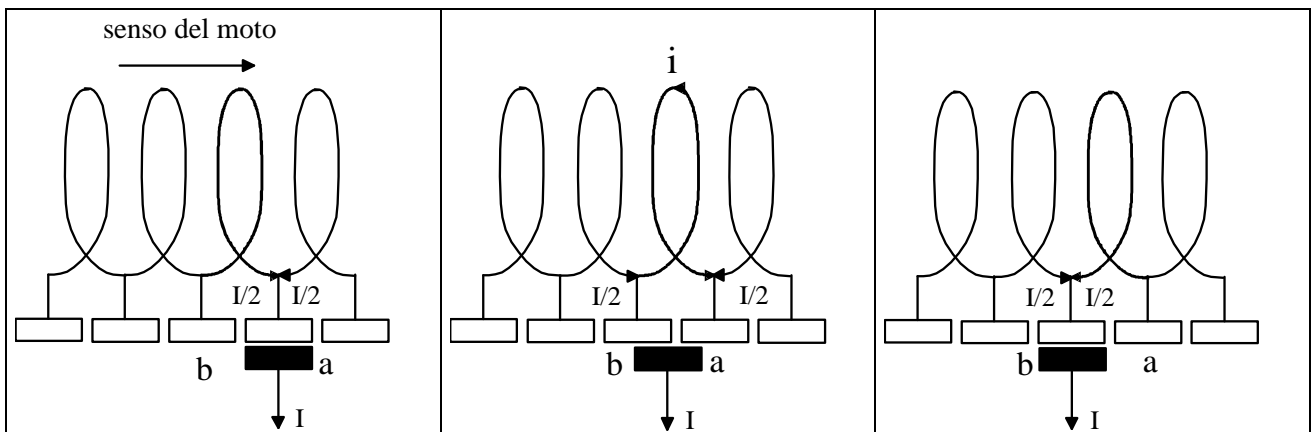


Figura 4.1. - Spira in commutazione

Viene definita **commutazione** il passaggio dei lati attivi di una spira da una via interna all'altra. Si consideri la figura 4.1, nella quale è illustrato schematicamente un indotto ad anello in prossimità di una delle spazzole. Al generico istante  $T$  la spazzola è a contatto solo con la lama  $a$  del collettore. La corrente  $I$  che viene raccolta dalla spazzola arriva in eguale misura dalle due spire a destra e a sinistra della lama  $a$ . Per effetto della rotazione del rotore, in un tempo  $t_c$ , detto **tempo di commutazione**, la spazzola si viene a trovare a contatto unicamente con la lamella  $b$ . Nel periodo di tempo  $T < t < T + t_c$ , La spira rappresentata in figura 4.1 con tratto più grosso è cortocircuitata, poiché la spazzola è a contatto con le due lame  $a$  e  $b$ . La corrente  $i$  che percorre tale spira varia nel tempo, poiché deve passare da un valore  $I/2$  a  $-I/2$ .

Ipotizzando che:

- sia nulla la resistenza ohmica della spira;
- siano nulle le forze elettromotrici agenti sulla spira in corto circuito;
- sia costante la resistenza di contatto tra spazzola e collettore;

la corrente  $i$  passerebbe da  $I/2$  a  $-I/2$  con legge lineare, e a tale andamento corrisponderebbe una distribuzione di densità di corrente costante sulla superficie di contatto tra spazzola e collettore. Una commutazione siffatta si dice **lineare** o a **densità di corrente costante**, ed è illustrata in figura 4.2.

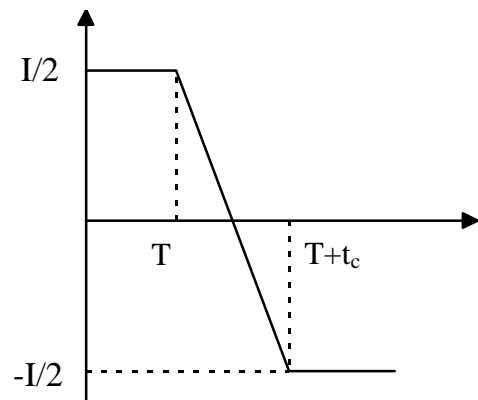


Figura 4.2. - Commutazione lineare.

In realtà le ipotesi fatte non sono mai rispettate, e l'andamento della corrente  $i$  può discostarsi anche notevolmente da quello lineare. In particolare, durante la commutazione intervengono i seguenti fenomeni:

- la spira in corto circuito, per effetto del moto del rotore, si muove in un campo di induzione variabile nello spazio, ed è quindi sede di f.e.m.;
- la spira è concatenata ad un campo magnetico prodotto dalla corrente  $i$ . L'inversione di tale corrente provoca l'insorgere di f.e.m. autoindotte che si oppongono a tale variazione;
- La resistenza della spira non è nulla;
- La resistenza di contatto diminuisce all'aumentare della densità di corrente attraverso il contatto.
- Altre spire che commutano contemporaneamente a quella presa in considerazione possono produrre f.e.m. di mutua induzione.

Se la macchina ha due spazzole collocate sull'asse neutro, le uniche f.e.m. agenti sulle spire in corto circuito sono quelle autoindotte che si oppongono all'inversione della corrente, esercitando un'azione ritardante sulla commutazione. In tal caso si verifica un addensamento di corrente sulla superficie di contatto (orlo di uscita) tra la spazzola e la lamella che viene abbandonata (la lamella a in figura 4.1). Tale addensamento provoca uno scintillio che cresce al crescere della corrente  $I$  erogata dalla macchina. L'andamento della corrente  $i$  nella spira in commutazione è rappresentato qualitativamente in figura 4.3 dalla curva 2.

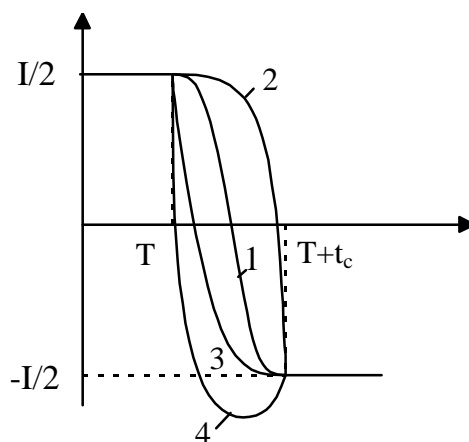


Figura 4.3.

Se, in una macchina che funziona da generatore, le spazzole sono spostate di un certo angolo nel senso del moto del rotore, la variazione di flusso principale concatenato alla spira durante la commutazione genera una f.e.m. che ha segno opposto a quello della f.e.m. autoindotta, e quindi anticipa la commutazione. Al contrario, la variazione del flusso concatenato generata dalla reazione di armatura può avere effetto ritardante, generando una f.e.m. concorde con quella autoindotta. È possibile annullare il fenomeno dello scintillio spostando le spazzole di un opportuno angolo  $\alpha_c$ , in modo da annullare le f.e.m. agenti sulla spira in corto circuito. Poiché le f.e.m. autoindotte dipendono dalla corrente erogata, l'angolo  $\alpha_c$  dipende dalle condizioni di carico del generatore. Tale accorgimento non è quindi attuabile su macchine di grossa potenza, ed è inefficace in presenza di brusche variazioni di carico. Quando l'angolo di rotazione delle spazzole è tale che le f.e.m. generate dalla variazione di flusso principale concatenato siano maggiori delle f.e.m. autoindotte, la densità di corrente tende ad addensarsi sulla superficie di contatto tra la spazzola e la lamella in entrata. In tal caso la corrente  $i$  segue un andamento del tipo 3 in figura 4.3 e si può verificare uno scintillio sull'orlo di ingresso della spazzola. Ulteriori spostamenti delle spazzole possono dare origine ad andamenti di corrente del tipo 4, che corrispondono a commutazioni con scintillio sull'orlo di ingresso e di uscita delle spazzole.

Modificando opportunamente l'andamento del campo di induzione è possibile migliorare la commutazione mantenendo le spazzole sull'asse neutro. A ciò si provvede mediante i **poli ausiliari** o **di commutazione** caratterizzati da un'espansione molto ridotta rispetto a quella dei poli principali, e posti in corrispondenza dell'asse neutro. I poli di commutazione sono eccitati mediante un avvolgimento posto in serie all'indotto, ed è quindi percorso da una corrente uguale a quella che fluisce nelle spire rotoriche. In tal modo, a meno di effetti di saturazione, il campo di induzione generato dai poli di commutazione è sempre proporzionale alla corrente di indotto. Il moto della spira in commutazione attraverso tale campo di induzione provoca una f.e.m. che è in grado di bilanciare la f.e.m. autoindotta per qualsiasi condizione di carico. I poli di commutazione, inoltre hanno la funzione di annullare l'effetto della reazione d'armatura nella zona interpolare, facendo in modo che l'asse neutro coincida con l'asse interpolare e non dipenda dalla corrente di indotto.

In macchine di grossa potenza le condizioni di funzionamento sono ulteriormente modificate mediante l'adozione dei **circuiti compensatori**. Tali circuiti, disposti in cave ricavate nelle espansioni polari principali, sono in serie con i poli di commutazione, e generano un campo di induzione con asse coincidente con l'asse neutro. Tale campo riduce la distorsione provocata dalla reazione d'armatura.



# ELEMENTI DI IMPIANTI ELETTRICI

## LE CENTRALI DI PRODUZIONE

È evidente l'importanza che assume agli effetti dello sviluppo della vita civile ed industriale di una regione la disponibilità di energia in una forma facilmente trasformabile in calore, in lavoro meccanico, in energia chimica, in luce o in altre richieste utilizzazioni. Allo stato attuale la forma di energia che meglio si presta alle esigenze suddette è l'energia elettrica per la sua facilità di trasformazione, per la possibilità di trasmissione a lunghe distanze, per la sua facile divisibilità, per il ridotto e controllabile impatto ambientale, per la sua affidabilità e per la semplicità di accumulo. Pertanto, la maggior parte delle energie economicamente utilizzabili vengono trasformate in energia elettrica o immediatamente alla sorgente o dopo un trasporto nella loro forma originale, verso i centri di utilizzazione. Le centrali si classificano in base all'energia primaria utilizzata; le forme di energia primaria oggi economicamente utilizzabili sono:

- *Energia idraulica.* Nella maggior parte conseguente a salti di grandi portate d'acqua fluente o accumulata in serbatoi (o bacini); eccezionalmente derivante da spostamenti di grandi masse d'acqua per effetto delle maree. In entrambi i casi la conversione in energia elettrica deve avvenire nelle vicinanze delle sorgenti di energia. Nelle centrali ad acqua fluente si sfruttano grandi portate d'acqua con piccoli valori di salto geodetico. Si utilizzano particolari turbine idrauliche (Francis e Kaplan), che funzionano meglio a basse velocità. Ne consegue che gli alternatori accoppiati hanno un elevato numero di coppie polari (generalmente 8 o 16). Le centrali a serbatoio utilizzano invece l'energia potenziale di masse d'acqua immagazzinata in opportuni bacini (naturali o artificiali); di solito funzionano con piccole portate e con elevati salti geodesici. Di regola si utilizza come turbina idraulica una turbina Pelton, che funziona meglio ad alte velocità. Ne consegue che gli alternatori accoppiati hanno un piccolo numero di coppie polari (generalmente 2, 3 o 4). La presenza del bacino consente a queste centrali di erogare energia nei periodo di tempo più opportuni. Inoltre la turbina Pelton si presta meglio di quelle termiche a rapide e continue variazioni di carico. Si noti che tutte le centrali idroelettriche, benché in parte dipendenti dagli eventi meteorologici, non danno luogo a costi per il "combustibile". Il costo di impianto delle centrali nuove è tuttavia crescente a causa dell'esaurimento dei siti facilmente sfruttabili.
- *Energia termica.* Eccezionalmente di natura geotermica (soffioni boraciferi), nel qual caso è indispensabile la conversione presso la sorgente; generalmente ottenuta con la combustione di combustibili fossili solidi, liquidi o gassosi (carbone, petrolio, nafta, metano, gas naturale) sia nei pressi delle sorgenti, sia vicino ai centri di utilizzazione. In fase contrastata di impiego è la produzione di energia termica derivante dall'utilizzo della fissione nucleare, energia di costo molto variabile. Il calore sviluppato dal combustibile viene in ogni caso sfruttato mediante turbine a vapore o turbine a gas, che funzionano da motore nei riguardi degli alternatori. Le turbine termiche funzionano meglio ad alte velocità, per cui i turboalternatori hanno un numero molto ridotto di coppie polari (1 o 2). Per la loro grande inerzia termica, occorrono alcune ore per la loro messa in marcia. A differenza delle centrali idroelettriche, le centrali termoelettriche presentano il vantaggio di un regime di produzione indipendente da fattori stagionali, adattandosi flessibilmente alle esigenze del consumo. Tuttavia, per tutte le centrali termiche, con l'eccezione di quelle geotermiche, occorre tenere conto che, oltre al costo di costruzione, vi è un costo di esercizio dovuto al consumo di combustibile. Inoltre, è bene ricordare che questo tipo di centrale è caratterizzato da un notevole impatto ambientale: all'immissione in atmosfera dei prodotti della combustione e allo smaltimento delle scorie (ceneri, bitumi, ecc.) in discarica, si aggiunge l'inquinamento termico provocato dalle acque di scarico degli scambiatori di calore.
- *Energia eolica.* Utilizzata per la produzione di modeste quantità di energia elettrica in zone battute dai venti per la maggior parte dell'anno, lontano da altre centrali elettriche: è evidente l'aleatorietà di questo tipo di produzione, che però rappresenta attualmente la più importante e promettente fonte alternativa a quelle convenzionali.

- *Energia solare.* Per mezzo della conversione fotovoltaica (a resa media annuale di circa 60 W per metro quadrato impegnato), consente limitate produzioni di energia elettrica (in corrente continua) utilizzabili in zone lontane da centri di produzione. Le centrali solari, per essere connesse alla rete elettrica, necessitano di opportuni convertitori DC/AC. Più conveniente è l'utilizzo dell'energia solare per il riscaldamento di acqua a bassa temperatura (circa 60°C); possibile anche il riscaldamento dell'acqua ad alta temperatura concentrando per mezzo di specchi parabolici, la luce su adeguati "bollitori". Anche in questo caso la regolarità della produzione è fortemente pregiudicata, essendo condizionata dalle condizioni atmosferiche e stagionali.
- *Energia da biomasse.* Sono energie ottenibili utilizzando razionalmente materiali di rifiuto prodotti da uomini, animali e vegetali. L'utilizzo può avvenire a mezzo di combustione diretta o per combustione dei prodotti gassosi della fermentazione (principalmente metano).

La maggior parte delle centrali di produzione sono connesse tra loro e con il sistema di distribuzione dell'energia, cosicché l'intera rete nazionale può essere vista come un unico carico, il cui fabbisogno di energia è variabile nel tempo secondo dei diagrammi di carico giornalieri, il cui andamento tipico è mostrato in figura 1. L'andamento del diagramma di carico varia a seconda della stagione dell'anno considerata, tuttavia esso presenta sempre due massimi (punte di carico) ed un minimo notturno. Ponendo in ordinate la potenza richiesta ed in ascisse il tempo, l'area del diagramma di carico rappresenta l'energia giornaliera richiesta.

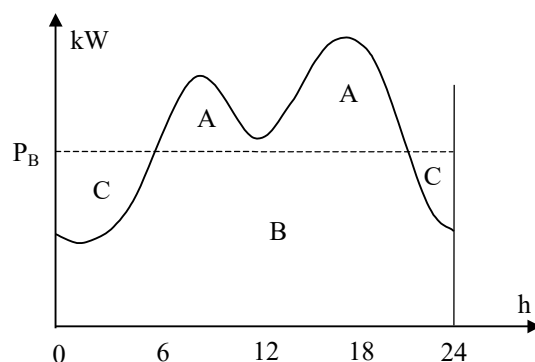


Fig. 1. – Esempio di diagramma di carico giornaliero. Sono evidenziate: le punte di carico (A), il carico base (B) e le eccedenze (C).

L'adeguamento della produzione alla richiesta viene fatta facendo funzionare alcune centrali in servizio continuativo, in modo che sia sempre disponibile una potenza base  $P_B$ , mentre altre centrali entrano in funzione per coprire le punte di carico. È evidente che nei periodi in cui la potenza richiesta è minore di  $P_B$  vi sarà una eccedenza di potenza disponibile. Per sopperire a questo inconveniente si utilizzano frequentemente delle centrali di pompaggio che, nei periodi di eccedenza, pompino acqua dai bacini di valle ai bacini in quota, accumulando così energia potenziale gravitazionale che potrà essere utilizzata il giorno dopo per coprire le punte del carico.

La scelta delle centrali che devono espletare il servizio di base o quello di punta avviene in base a criteri che possono essere così sintetizzati:

- Le centrali idroelettriche hanno tempi di messa in servizio piuttosto ridotti, dell'ordine dei minuti, per cui sono adatte all'espletamento del servizio di punta, che comporta frequenti distacchi ed inserzioni dell'impianto;
- Le centrali termoelettriche, invece, hanno bisogno di tempi di avviamento molto maggiori, a causa del tempo necessario per fare arrivare il vapore alla pressione ed alla temperatura di funzionamento, con costanti di tempo dell'ordine delle ore (crescente con la potenza). Essendo inoltre di potenza notevolmente maggiore di quelle idroelettriche, esse sono idonee al servizio di base, caratterizzato da un funzionamento continuo, anche se non sempre alla stessa potenza.

## LE LINEE ELETTRICHE

L'insieme delle macchine, apparecchiature e linee destinate alla produzione, trasformazione, trasmissione, distribuzione ed utilizzazione dell'energia elettrica costituisce il *sistema elettrico* in senso lato. In effetti il sistema complessivo è l'unione di più sottosistemi distinti fra loro a seconda della funzione, della tensione nominale o in base ad altri criteri. In maniera molto schematica la struttura generale di un sistema elettrico di potenza, di tipo trifase, è sintetizzata nella figura 2, dove si fa

riferimento ad un unico generatore e si adotta la schematizzazione unifilare per la rappresentazione dei conduttori.

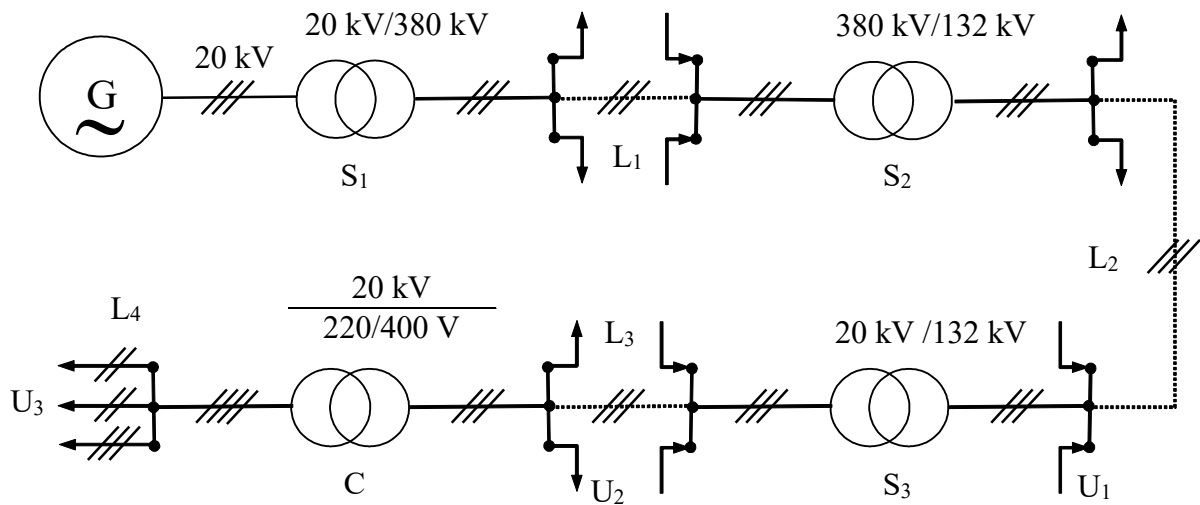


Fig. 2. – Schematizzazione di un sistema elettrico di potenza.

Le funzioni delle varie parti del sistema si possono così classificare:

- *Produzione* di energia elettrica mediante centrali di vario genere, funzionanti a tensione non molto elevata, per problemi di isolamento degli alternatori.
- *Trasformazione* delle grandezze elettriche (tensione e corrente) al fine di avere in ogni punto del sistema il valore di tensione più opportuno. Tale funzione viene svolta dalle stazioni di trasformazione (S<sub>1</sub>, S<sub>2</sub>, S<sub>3</sub>) e dalle cabine di trasformazione (C). Le stazioni S<sub>1</sub> ed S<sub>2</sub> sono dette primarie, le S<sub>3</sub> secondarie.
- *Trasmissione* dell'energia elettrica, ossia il trasporto di notevoli quantità di energia a grandi distanze e con valori elevati di tensione, mediante linee aeree o in cavo. Nella figura 2 il tratto L<sub>1</sub> rappresenta una linea di trasmissione ed L<sub>2</sub> una linea di trasmissione secondaria.
- *Distribuzione*: è l'ulteriore livello del trasporto dell'energia ed interessa il collegamento tra le stazioni, le cabine e le utenze. Si distingue una distribuzione in media tensione (MT) svolta dalla linea L<sub>3</sub> ed una in bassa tensione (BT), propria delle linee L<sub>4</sub><sup>(o)</sup>. Nelle zone di elevata densità di utenza queste linee sono generalmente in cavo.
- *Utilizzazione* dell'energia elettrica, ossia trasformazione di tale energia in una forma adatta ad utilizzazioni civili ed industriali (illuminazione, movimentazione di organi meccanici, ecc.). Nella figura 2 si distinguono le utenze alimentate in AT (U<sub>1</sub>), in MT (U<sub>2</sub>) e in BT (U<sub>3</sub>). La consegna dell'energia elettrica viene effettuata in AT o MT solo per le utenze più importanti (utenze industriali). Per le utenze minori, quali officine o abitazioni (utenze domestiche), le cabine

<sup>(o)</sup> Secondo la pratica corrente, pur se non sancita da alcuna norma, si parla di bassa, media ed alta tensione secondo il seguente criterio:

- *Bassa tensione* (BT) quando la tensione nominale è minore di 1000 V;
- *Media tensione* (MT) quando la tensione nominale è maggiore di 1000 V e minore di 30000 V;
- *Alta tensione* (AT) quando la tensione nominale è maggiore di 30000 V.

La norma CEI 64-8 classifica invece i sistemi elettrici in base alla tensione nominale nel seguente modo:

- *Categoria zero* quando la tensione nominale è minore di 50 V in alternata o di 120 V in continua;
- *Prima categoria* quando la tensione nominale è di 50 ÷ 1000 V in alternata o di 120 ÷ 1500 V in continua;
- *Seconda categoria* quando la tensione nominale è di 1000 ÷ 30000 V in alternata o di 1500 ÷ 30000 V in continua;
- *Terza categoria* quando la tensione nominale è maggiore di 30000 V sia in alternata sia in continua.

È da notare infine che, ai fini antinfortunistici, il DPR n. 547 considera di bassa tensione gli impianti con tensione nominale inferiore a 400 V in alternata e 600 V in continua; tutti gli altri sono da considerarsi di alta tensione.

garantiscono una tensione concatenata nominale di circa 380 V oppure una tensione fase – neutro di 220 V.

In realtà il sistema elettrico italiano ha una complessità ben maggiore di quella deducibile dalla figura 2. Tutte le maggiori centrali di produzione sono tra loro collegate mediante linee di interconnessione, in modo tale che, al livello delle tensioni più alte vi sia una unica rete interconnessa, in cui confluisce tutta l'energia prodotta, con il vantaggio che la messa fuori servizio di una centrale non pregiudica l'alimentazione di una o più zone del territorio nazionale. In questo modo diventa però estremamente delicato il problema della regolazione delle energie prodotte dalle varie centrali e della ripartizione dei flussi di energia sulle varie linee. È da tenere presente inoltre la presenza di linee di connessione tra l'Italia ed i paesi confinanti (Francia, Svizzera, Austria) attraverso le quali si attua l'import-export energetico.

Dalla figura 2 si nota che i vari punti del sistema elettrico sono caratterizzati da diversi livelli di tensione. I motivi che portano ad una scelta tecnicamente ed economicamente corretta dei vari valori sono molteplici. Alcuni di essi sono i seguenti:

- Isolamento delle macchine e delle apparecchiature, che deve essere proporzionato alla tensione di esercizio; poiché i trasformatori, che sono macchine statiche, sono più facilmente isolabili degli alternatori si preferisce produrre con tensioni di 15÷30 kV ed elevare la tensione a valori adatti al trasporto mediante i trasformatori. Tali valori sono in generale funzione della potenza da trasmettere e della distanza. In proposito valgono i seguenti ordini di grandezza:

|        |          |         |        |       |       |
|--------|----------|---------|--------|-------|-------|
| P [MW] | 500      | 130     | 60     | 25    | 10    |
| l [km] | 300÷1000 | 100÷300 | 60÷130 | 20÷60 | 10÷20 |
| V [kV] | 380      | 220     | 132    | 60    | 20    |

- A parità di potenza apparente la corrente  $I = N/\sqrt{3} V$  (in corrente alternata trifase) diminuisce all'aumentare della tensione e pertanto è conveniente effettuare il trasporto, specie per potenze rilevanti, alla tensione più elevata possibile;
- Livelli di tensione delle utenze: la maggior parte delle utenze funziona a bassa tensione e pertanto occorrono i vari stadi di trasformazione della tensione, dai valori di trasporto (220 kV, 380 kV) a quelli di utilizzo (220 V, 380 V nella maggior parte dei casi);
- Sicurezza degli utenti, che aumenta al diminuire della tensione e pertanto, per le parti di impianto a diretto contatto con le persone, è preferibile adottare bassi livelli di tensione.

Un'altra considerazione da fare riguarda la frequenza: il sistema di trasmissione generalmente impiegato è quello a corrente alternata trifase di frequenza 50 Hz (in Europa, 60 Hz negli USA). L'adozione di frequenze più elevate comporterebbe macchine di minori dimensioni a pari potenza. Tuttavia gli aumenti delle reattanze magnetiche proprie delle linee e dei generatori renderebbero estremamente difficoltosa la regolazione della tensione e la stabilità dell'esercizio.

## CENNI COSTRUTTIVI

Le linee di trasporto sono realizzate, generalmente, con conduttori nudi che si appoggiano ad appositi sostegni. Valutazioni di carattere sia elettrico (livello di tensione e di corrente) che meccanico (lunghezza dei tratti di conduttore fra due sostegni, presenza di sollecitazioni aggiuntive, quali vento e neve o ghiaccio) sono alla base dei criteri che conducono alla scelta del materiale conduttore per le linee e la loro organizzazione strutturale. I conduttori (in rame o alluminio) sono realizzati in fili o corde. A parità di resistenza elettrica, un conduttore di alluminio deve avere una sezione maggiorata del 60% rispetto ad un conduttore di rame: il suo peso risulta tuttavia circa la metà di quello in rame. Generalmente sono irrobustiti meccanicamente da un'anima interna costituita da una fune di acciaio.

Le linee ad alta tensione prevedono la presenza di un conduttore supplementare (indicato con G nella figura 3), denominato fune di guardia, generalmente posto in cima al traliccio di supporto. La sua funzione è quella di costituire una schermatura protettiva dei cavi sottostanti (indicati con L nella figura 3) nei confronti di eventuali fulminazioni dirette. Inoltre, la fune di guardia, metallicamente connessa ai tralicci, abbassa la resistenza di terra complessiva dei singoli tralicci, collegati in parallelo verso terra. La fune di guardia è generalmente costituita da corde in acciaio zincato o *aluminumweld*, un conduttore con anima in acciaio e strato esterno in alluminio.

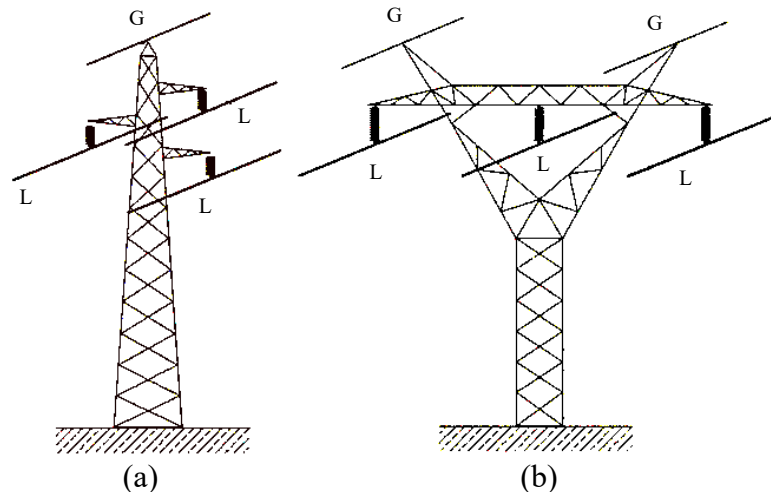


Fig. 3. – Tralicci per MT (a) ed AT (b).

L'impiego di conduttori nudi comporta la necessità di provvedere ad un loro adeguato isolamento dai supporti (tralicci), interponendo opportuni isolatori costruiti perlopiù in vetro, porcellana o resine polimeriche. Gli isolatori sono formati spesso da elementi assemblati in maniera da formare una catena la cui rigidità dielettrica complessiva risulta circa multipla di quella dell'isolatore singolo. Un ulteriore parametro di progetto è costituito dalla forma degli isolatori. Il problema della forma è particolarmente curato per gli isolatori per esterno. A differenza di quelli per interni, infatti, devono far fronte a condizioni di esercizio certamente più gravose per la presenza di fattori ambientali sfavorevoli, quali la pioggia, l'umidità e l'azione di agenti contaminanti (fumi industriali e/o salsedine nelle zone costiere).

## SOVRATENSIONI E SOVRACORRENTI

### Sovratensioni

Il dimensionamento e la tenuta degli isolamenti non può essere riferito alla sola tensione di normale esercizio delle linea ma deve offrire adeguata sicurezza anche nei confronti di eventuali sovratensioni, quasi sempre di carattere transitorio, spesso molto più elevate dei valori massimi per i quali è previsto il normale funzionamento dell'impianto.

- Le sovratensioni per *cause interne* sono quelle prodotte da variazioni di regime più o meno brusche legate, in genere, a:
  - a) manovre sugli impianti, generalmente riconducibili a chiusura o apertura di un interruttore,
  - b) improvvisa riduzione del carico,
  - c) risonanza in rete,
  - d) contatto accidentale di un impianto con un altro a tensione di esercizio maggiore.
- Le sovratensioni per *cause esterne* sono imputabili a fenomeni di origine atmosferica, dovuti, in genere, a induzione elettrostatica e/o elettromagnetica. Il caso più grave è certamente quello della fulminazione diretta, quando una linea viene colpita da un fulmine. (Un fulmine presenta valori tipici di tensione massima di circa 1÷5 MV, per tempi di 5÷50  $\mu$ s. Il valore massimo della corrente prodotta da un fulmine varia fra circa 5 e 100 kA)

## Sovracorrenti

Un *sovraccarico* è la causa più frequente di sovracorrente, consistente nel superamento dei valori di corrente per i quali una linea o una apparecchiatura sono proporzionate. Si tratta, quasi sempre, di fenomeni di durata limitata, che si verificano in connessione con l'intrinseca modalità di funzionamento di alcuni dispositivi: un esempio tipico è costituito dalle elevate correnti di spunto dei motori asincroni in fase di avviamento, fino a  $6 \div 8$  volte superiori alle correnti nominali. I sovraccarichi hanno un effetto quasi esclusivamente termico: se sono di durata limitata e non si ripetono troppo frequentemente, sono privi di conseguenze pericolose. A sovraccarichi via via più rilevanti corrispondono danni sempre più gravi: a partire dal semplice, anche se irreparabile, deterioramento dell'isolante dei cavi, si arriva al vero e proprio incendio.

Una corretta protezione dal sovraccarico richiede che siano rispettate le seguenti condizioni:

- 1) la corrente nominale del dispositivo di protezione non deve essere inferiore alla corrente di normale esercizio del conduttore entro il quale è inserito (al fine di evitare interventi inopportuni);
- 2) la corrente nominale del dispositivo di protezione deve essere inferiore alla corrente massima sopportata dal conduttore in regime permanente (l'intervento della protezione deve aver luogo prima che il conduttore sia compromesso definitivamente);
- 3) il tempo di intervento deve essere inversamente proporzionale all'entità del sovraccarico.

Le sovracorrenti più rilevanti, e pericolose, sono quelle dovute a un cortocircuito tra due elementi dell'impianto non equipotenziali: in tempi brevissimi si possono raggiungere valori elevatissimi della corrente, limitati solo dalle caratteristiche del generatore equivalente della linea a monte della zona di guasto. Le condizioni per la protezione più efficiente dal cortocircuito<sup>(o)</sup> sono:

- 1) il dispositivo di protezione deve avere un *potere di interruzione* non inferiore al valore presumibile per la corrente di cortocircuito nel punto di installazione del dispositivo;
- 2) l'intervento deve aver luogo in maniera tempestiva per un cortocircuito che si verifichi in qualunque punto della linea protetta, prima che isolanti o conduttori risultino irrimediabilmente danneggiati;
- 3) il dispositivo deve essere installato all'inizio del tratto da proteggere, con una tolleranza di 3 m (salvo eventuali rischi di incendio);
- 4) la corrente nominale del dispositivo deve essere non inferiore alla corrente di esercizio ordinario della linea protetta.

La *corrente di cortocircuito*  $I_{cc}$  in un punto di un impianto elettrico rappresenta la corrente che circolerebbe in un conduttore di resistenza trascurabile che collegasse le linee in tensione. Il valore di  $I_{cc}$  dipende da una molteplicità di fattori, quali la sezione e la lunghezza delle linee a monte del guasto o la potenza nominale del trasformatore di alimentazione più prossimo. Un criterio prudenziale consiste nell'assumere quale valore presunto della corrente di cortocircuito quello corrispondente al caso peggiore, quando si supponga l'impedenza di cortocircuito nulla e il tempo di intervento delle protezioni abbastanza da lungo da consentire alla corrente di raggiungere il valore di regime, a transitorio estinto.

## APPARECCHI DI MANOVRA E PROTEZIONE

La gestione e la sicurezza di una rete elettrica è affidata ad una molteplicità di apparecchiature che provvedono a:

- a) realizzare le manovre richieste dalle esigenze dell'utenza in condizioni di esercizio ordinario,
- b) far fronte in maniera automatica ad anomalie di funzionamento che possano costituire pericolo per le cose o le persone.

---

<sup>(o)</sup> Per la definizione di "Potere di interruzione" si veda a pag. 13.

Il normale esercizio degli impianti prevede la necessità di inserire o disinserire generatori, carichi o intere sezioni di rete. Gli apparecchi di manovra a tale scopo utilizzati presentano caratteristiche funzionali che dipendono fortemente dalla gravosità delle condizioni operative cui devono fare fronte. La sintetica panoramica che segue prescinde intenzionalmente dalle complesse problematiche tipiche delle reti in AT, limitandosi a far riferimento soprattutto alle reti in media e bassa tensione.

## DISPOSITIVI DI INTERRUZIONE

### Interruttori

Gli interruttori consentono la chiusura e l'apertura di una linea sotto carico anche in condizioni di cortocircuito. Il loro simbolo, per la versione azionata dall'operatore, è quello di figura 4.a. Il simbolo di figura 4.b si riferisce, invece, alla versione automatica, il cui funzionamento è asservito all'intervento di un sistema di protezione (con sensori, relè o altro).



Fig. 4 – Simboli dell'interruttore azionato manualmente (a) e dell'interruttore automatico (b).

All'apertura di una rete sotto carico si manifesta quasi sempre un arco elettrico che tende a conservare la continuità della corrente. Generalmente gli interruttori sono costruiti in maniera tale da non impedire la formazione dell'arco, la cui presenza limita le sovratensioni induttive, ma nel contempo provvedere alla sua estinzione in tempi brevi (dell'ordine dei millisecondi) ed impedirne il riaccensione a manovra conclusa. Affinché questo avvenga si devono adottare determinati accorgimenti, consistenti in:

- *Deionizzazione dell'ambiente*, sostituendo il dielettrico ionizzato con altro non ionizzato, in modo da ripristinare la rigidità dielettrica tra i contatti;
- *Allungamento dell'arco* e suo eventuale frazionamento in archi elementari, allo scopo di aumentare il valore di tensione necessario al sostentamento dell'arco stesso;
- *Raffreddamento* dei contatti per evitare l'emissione termoionica e limitare la sollecitazione termica.

In relazione al metodo impiegato per l'estinzione dell'arco vi sono vari tipi di interruttore, adatti alle diverse esigenze e con modalità costruttive dipendenti dalla tensione del sistema in cui devono essere impiegati e dalle prestazioni richieste. Tra i più diffusi vi sono: gli *Interruttori ad olio*, *ad aria compressa*, *in aria a deionizzazione magnetica (DEION)*, *ad esafluoruro di zolfo (SF<sub>6</sub>)* e *sotto vuoto*.

Le principali caratteristiche funzionali che caratterizzano un interruttore sono:

- La *tensione nominale di esercizio*  $V_e$ , che rappresenta la tensione alla quale vengono riferite le prestazioni dell'apparecchio sia nelle normali operazioni di apertura e chiusura che in condizioni di cortocircuito. Nel caso di reti trifasi, occorre riferirsi alla tensione concatenata.
- La *corrente nominale*, che è il valore della corrente che l'interruttore può condurre in assegnate condizioni ambientali e nel rispetto delle specifiche termiche progettuali. Il valore può variare a seconda del tipo di servizio previsto, continuo o discontinuo.
- Il *potere nominale di interruzione*  $I_{in}$ , espresso dal valore della corrente di cortocircuito che un interruttore può interrompere ad una tensione superiore di non oltre il 10% rispetto a quella nominale, quando la frequenza e il fattore di potenza siano quelli nominali. Il potere di interruzione, indicato sulla targa di identificazione dell'apparecchio, deve essere superiore alla corrente di cortocircuito presunta nel punto di installazione della protezione.

La necessità di far fronte a sollecitazioni meccaniche e termiche anche molto gravose rende, in conclusione, gli interruttori molto ingombranti, pesanti e costosi.

## Teleruttori (o contattori)

I teleruttori sono dimensionati per interrompere le sole correnti di normale esercizio, con esclusione di quelle di cortocircuito. Confrontato con un interruttore di uguale corrente nominale, un contattore presenta, dunque, struttura più semplice, dimensioni ridotte e costo sensibilmente inferiore.



Fig. 5 – Simboli del contattore azionato manualmente (a) e del contattore automatico (b).

## Sezionatori

I sezionatori sono destinati ad interrompere la continuità elettrica per le sole linee a vuoto. I loro contatti, spesso del tipo a coltello, sono generalmente visibili e forniscono, in tal modo, una sorta di assicurazione visiva sullo stato di apertura della linea.

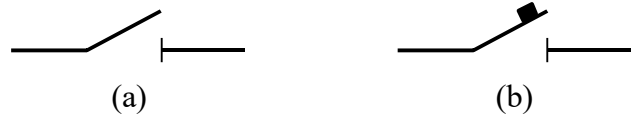


Fig. 6 – Simboli del sezionatore azionato manualmente (a) e del sezionatore automatico (b).

La manovra dei sezionatori può essere effettuata a mano o con l'ausilio di azionamenti elettrici o meccanici: è importante, in ogni caso, che rimanga rigorosamente subordinata, a quella degli interruttori (o dei teleruttori), in modo che i sezionatori operino sempre a vuoto (in assenza di corrente). Nella fase di interruzione del circuito, si apre prima l'interruttore e poi i sezionatori; in quella di ripristino della continuità invece si richiudono prima i sezionatori e poi l'interruttore.

## Fusibili

I fusibili rappresentano i più semplici e, spesso, i più rapidi dispositivi di protezione contro le sovracorrenti. Sono costituiti essenzialmente da un corto conduttore in lega a basso punto di fusione alloggiato entro un apposito contenitore. Per le loro caratteristiche intrinseche i fusibili non discriminano fra sovraccarico e cortocircuito: il tempo di intervento dipende esclusivamente dal raggiungimento del regime termico che ne determina la fusione e decresce all'aumentare della corrente. Indicando con  $R_f$  la resistenza del conduttore con il quale il fusibile è realizzato, la protezione interviene interrompendo il circuito quando il calore  $W_j$  dissipato per effetto Joule nell'intervallo convenzionale di intervento  $[0, t_i]$  supera il calore di fusione  $W_f$ . La figura 7.a riporta un tipico andamento della caratteristica tempo - corrente di un fusibile, in scala doppiamente logaritmica. La retta verticale  $f$  corrisponde alla corrente minima di fusione  $I_m$  mentre la tratteggiata  $j$  rappresenta il calore di fusione  $RI^2t$ : insieme contribuiscono a determinare la curva a tratto spesso della cosiddetta *caratteristica del tempo di fusione*.

In realtà, le condizioni di intervento di un fusibile sono determinate solo entro una fascia di incertezza legata a una molteplicità di fattori, tra i quali vanno annoverate le differenze costruttive. È usuale, allora, far riferimento piuttosto alla cosiddetta zona di intervento del fusibile: indicata con  $F$  in figura 7.b, rappresenta l'insieme dei punti di sicura fusione; i valori di corrente inferiori alla fascia di incertezza individuano la zona di sicurezza  $S$ , entro la quale può essere escluso l'intervento della protezione.

La scelta di un fusibile viene effettuata con riferimento ai parametri di seguito definiti.

- La *corrente nominale*
- La *forma d'onda della corrente*
- Il *potere di interruzione nominale* (è definito in maniera analoga a quello degli interruttori).
- La *tensione nominale*



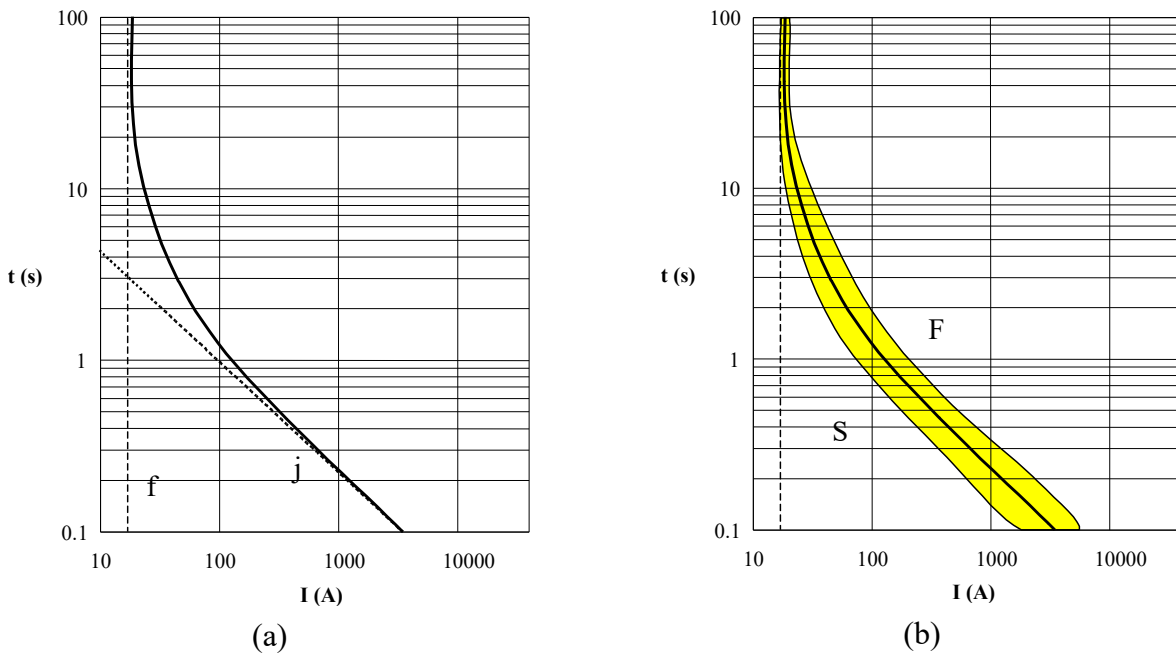


Fig. 7 – Caratteristica del tempo di fusione e zona di intervento (F) del fusibile.

La figura 8 mostra la forma più comune di fusibile per bassa tensione. Il corpo, in vetro per i modelli più piccoli, o in ceramica, è terminato da cappellotti di testata a grande superficie di contatto. L'elemento fusibile cilindrico è sistemato al centro del contenitore. Il simbolo del fusibile è riportato in figura 9.a; il simbolo di figura 9.b si riferisce invece al fusibile dotato di indicazione a tratto spesso dell'estremo che rimane in tensione dopo l'intervento. Tempi di intervento particolarmente rapidi diventano essenziali quando si tratta di proteggere strumenti di misura o delicate apparecchiature elettroniche. In questi casi si fa ricorso ai fusibili di tipo rapido (sigla F) o ultrarapido (sigla FF) in cui il conduttore fusibile è caricato con una molla pre-tesa che ne forza la rottura prima che questa sia completata dal normale processo di fusione.



Fig. 8.



Fig. 9.

### Scaricatori

Gli scaricatori rappresentano i più semplici dispositivi di protezione contro le sovratensioni. Nella versione spinterometrica (vedi figura 10), sono costituiti da due elettrodi affacciati posti ad una certa distanza: uno di essi fa capo alla linea da proteggere mentre l'altro è collegato direttamente a terra. Quando la tensione di linea supera la rigidità dielettrica dell'aria interposta fra le punte dello scaricatore, si verifica un arco, che costituisce la via preferenziale attraverso la quale si scarica la sovratensione: la distanza fra le punte dipende dal valore della tensione per la quale si desidera che avvenga l'innesco dell'arco.

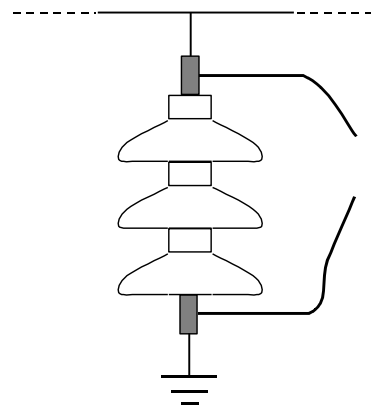


Fig. 10. - Schema di scaricatore spinterometrico.

## RELÈ

Il termine indicava, originariamente, un dispositivo, con funzioni sia di protezione che di manovra, costituito, in sostanza, dall'elettromagnete EM della figura 11. In tale relè elettromagnetico, eccitato da una opportuna corrente di comando  $i_c$ , la forza di attrazione sviluppata vince la resistenza di una molla antagonista M e sposta una ancora A mobile capace di operare un azionamento meccanico, ad esempio, per aprire o chiudere i contatti C.

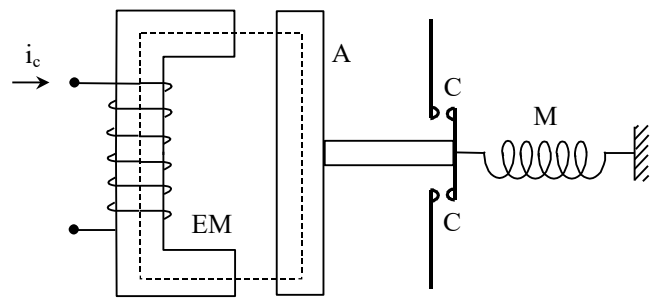


Fig. 11 – Schema di principio di un relè elettromagnetico.

Nella accezione attuale il relè designa una gamma decisamente più ampia di dispositivi, anche molto complessi, ai quali viene asservita una molteplicità di dispositivi di comando o di segnalazione, in funzione dell'andamento di una o più grandezze caratteristiche dei circuiti. In relazione alla grandezza alla quale sono sensibili, i relè vengono classificati come voltmetrici, amperometrici, wattmetrici, frequenzimetrici, a impedenza, termici, tachimetrici, ecc. L'impiego di trasduttori consente la realizzazione di relè sensibili anche a grandezze non elettriche, quali pressione, posizione, ecc.

Una ulteriore suddivisione fa riferimento al valore della grandezza controllata:

- *relè di massima* sono quelli che intervengono quando una certa grandezza supera un valore prefissato;
- *i relè di minima* intervengono quando la grandezza da controllare scende al di sotto di una soglia determinata;
- *i relè differenziali* sono sensibili alla differenza fra due grandezze, ad esempio tra quella di ingresso e quella di uscita da un certo dispositivo;

La figura 12 riproduce un possibile simbolo del relè: i due terminali costituiscono l'accesso alla corrente di controllo (o eccitazione); a lato c'è un tipico schema "logico" dell'azione del relè su una molteplicità di contatti mobili, che possono essere in chiusura, in apertura o misti.

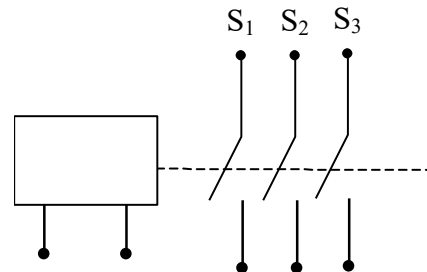


Fig. 12

### Relè amperometrico

Nello schema di figura 13 il relè elettromagnetico assume il ruolo di relè a massima corrente: quando la corrente  $I$  supera un valore assegnato, apre il circuito di alimentazione sconnettendo l'utilizzatore  $U$  eventualmente affetto da cortocircuito. La presenza della resistenza  $R$  (shunt) è richiesta dalla necessità di limitare la corrente  $i_c$ , nella bobina di eccitazione del relè.

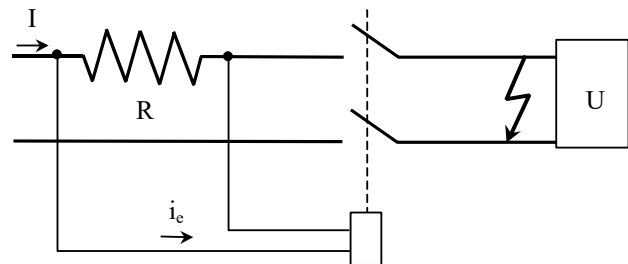


Fig. 13 – Schema di principio di relè amperometrico di massima corrente.

## Relè voltmetrico

Un relè elettromagnetico si presta molto agevolmente a svolgere la funzione di protezione a massima tensione quando venga impiegato secondo lo schema di principio di figura 14. La bobina di eccitazione viene inserita fra i due fili di linea: la resistenza aggiuntiva  $R_a$  serve a limitare la corrente di eccitazione. Quando la tensione di alimentazione supera una soglia prefissata (regolabile con la taratura della molla), il relè provoca l'apertura dei contatti.

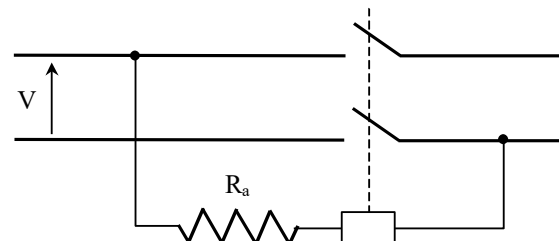


Fig. 14 – Schema di principio di relè voltmetrico di massima tensione.

## Relè termico

Si tratta di un relè provvisto di un dispositivo di sgancio sensibile alla temperatura. Secondo la schematizzazione di figura 15, si basa sul diverso coefficiente di dilatazione termica dei due metalli che compongono la lamina bimetallica (1): la corrente  $I$ , condotta dal il cavo flessibile (2), ne provoca il riscaldamento e il progressivo incurvamento, fino a determinare lo scatto del meccanismo di sgancio (3), con la conseguente apertura del circuito di alimentazione. Per il ripristino manuale del dispositivo di sgancio occorre attendere che la lamina bimetallica si sia raffreddata.

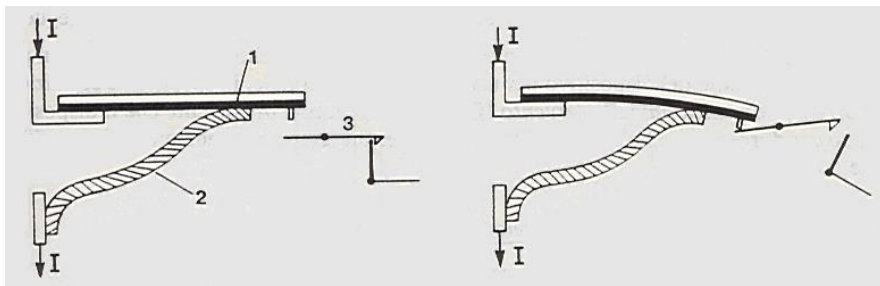


Fig. 15 – Principio di funzionamento di un relè termico: 1) lamina bimetallica, 2) cavo flessibile, 3) meccanismo di sgancio.

Tempi e soglie di intervento dipendono dal regime termico esistente: una stessa variazione di corrente può provocare o meno lo sgancio del relè a seconda che la lamina sia già calda o sia, invece, a temperatura ambiente. Questo tipo di relè si presta ad essere efficacemente impiegato nei casi in cui sia prevedibile una sovracorrente anche piuttosto intensa ma di breve durata, come avviene, ad esempio, all'avviamento di un motore asincrono: l'inerzia termica del dispositivo vale a prevenire aperture intempestive del circuito di alimentazione ma non manca di assicurare la protezione nel caso di una sovracorrente protratta nel tempo.

## Relè magnetotermico

Risulta dalla combinazione di un relè termico con un relè elettromagnetico e sfrutta le caratteristiche di entrambi per realizzare una più efficace caratteristica di protezione. In particolare, i due componenti di base vengono calibrati in modo tale che

- per correnti non troppo elevate (da circa 3 a circa 15 volte la corrente nominale del circuito) è previsto l'intervento del relè termico;
- per correnti superiori interviene il relè elettromagnetico.

Una tipica caratteristica tempo-corrente, in scala doppiamente logaritmica, è quella riportata in figura 15.a: la zona indicata con A, corrisponde alla fascia di valori della corrente sufficientemente bas-

si da escludere l'intervento del relè; per sovracorrenti comprese nella fascia B interviene il relè termico: la pendenza negativa garantisce tempi di intervento inversamente proporzionali alla sovracorrente; il relè elettromagnetico, infine, interviene in tempi brevissimi per le correnti di cortocircuito della fascia C.

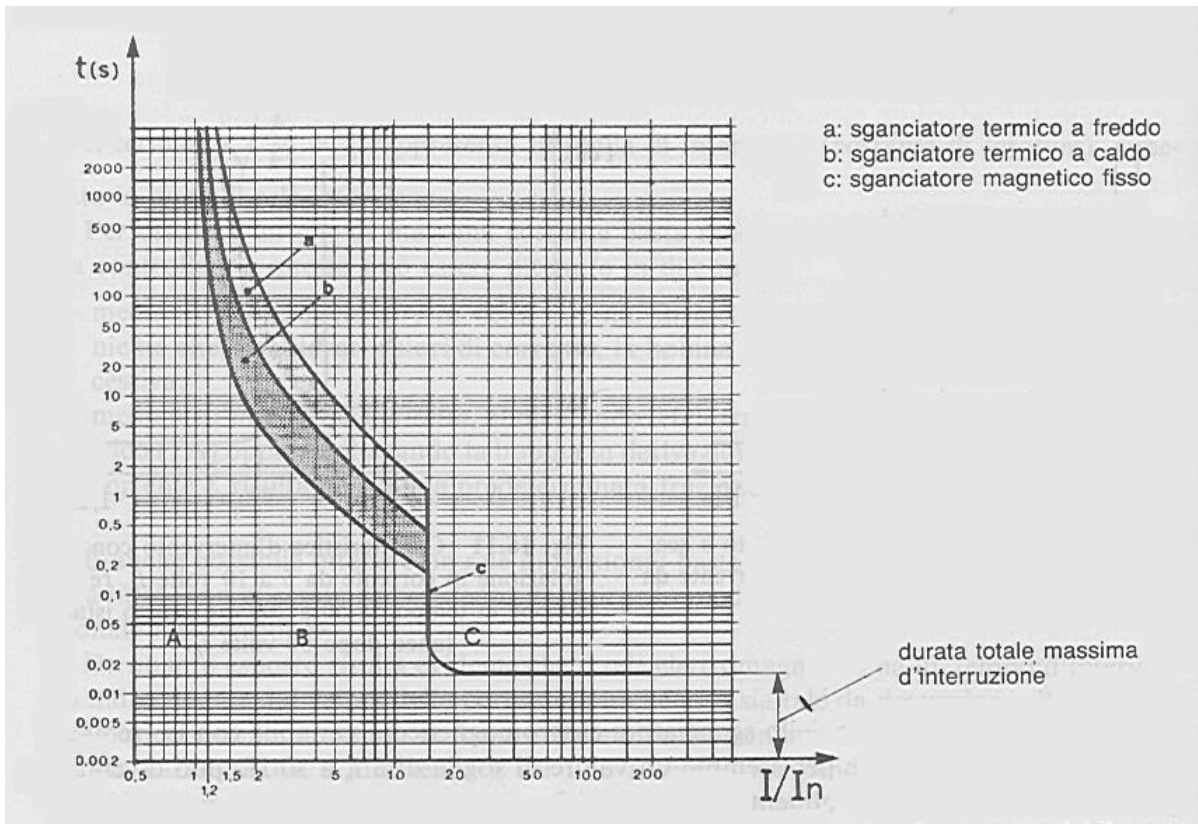


Fig. 15.a - Caratteristica tempo-corrente di un relè magnetotermico.

### Relè differenziale

La linea tratteggiata di figura 16 delimita i componenti che costituiscono lo schema di principio di un relè differenziale monofase. Intorno ad un nucleo magnetico toroidale vengono controavvolti due avvolgimenti di uguale numero di spire  $N_1$ , percorsi dalla corrente fornita dall'alimentazione all'impedenza di carico  $Z_c$ . Se la corrente entrante è uguale a quella uscente, i flussi induzione prodotti dai due avvolgimenti sono uguali e di segno opposto: il flusso netto nel nucleo è nullo.

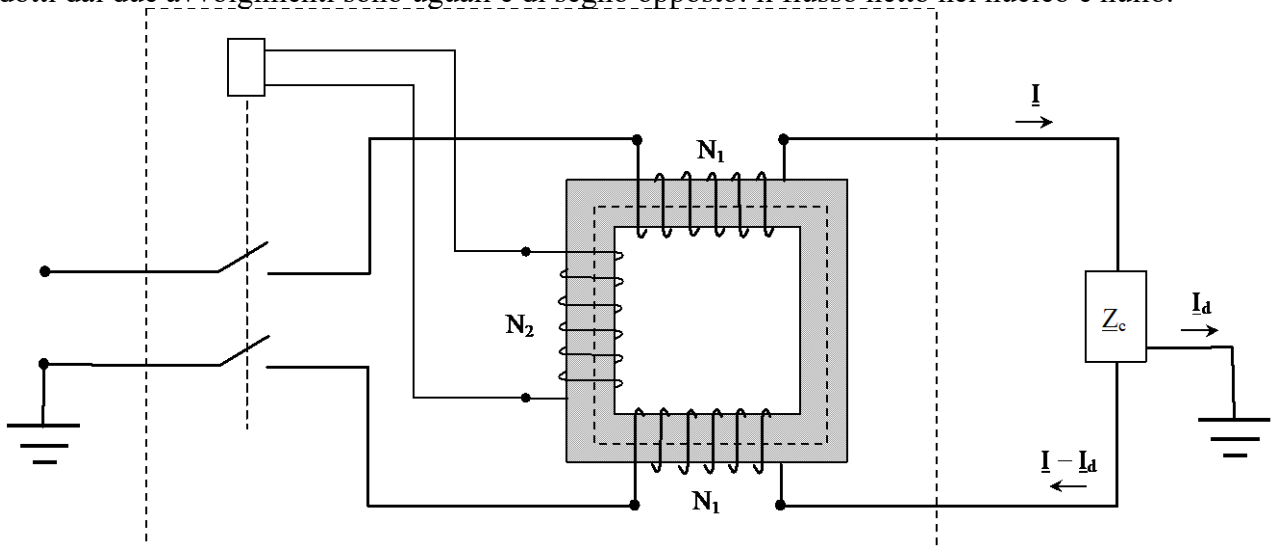


Fig. 16 - Schema di principio di relè differenziale monofase.

Se a causa di un guasto viene derivata verso terra una corrente  $I_d$ , la disuguaglianza fra la corrente entrante,  $I$ , e quella uscente,  $I - I_d$ , altera il precedente equilibrio fra i flussi di induzione: si manifesta un flusso netto che, concatenandosi con le  $N_2$  spire di un terzo avvolgimento, vi determina una f.e.m. indotta e la circolazione di una corrente che, eccitando il relè, provoca l'apertura degli interruttori e il distacco dell'alimentazione.

Questo dispositivo è caratterizzato da una sensibilità nominale, definita come il valore minimo  $I_{\Delta N}$  della differenza fra i valori efficaci delle correnti sufficiente a provocare l'apertura del circuito. Il relè differenziale, nella versione con sensibilità nominale  $I_{\Delta N} = 0.3 \text{ A}$ , viene abitualmente impiegato per la protezione di motori o altre apparecchiature contro i "guasti a terra": quando, per la perdita di isolamento di un conduttore di alimentazione, la carcassa venga accidentalmente in tensione, la corrente dispersa a terra provoca l'intervento della protezione differenziale.

Come si vedrà in maggiore dettaglio nel capitolo sulla sicurezza elettrica, una maggiore sensibilità,  $I_{\Delta N} < 0.03 \text{ A}$ , rende questo dispositivo particolarmente idoneo a costituire l'unica forma di *protezione* attiva per la sicurezza personale contro i rischi della folgorazione.

## ELEMENTI DI SICUREZZA ELETTRICA

### LE BASI LEGISLATIVE DELLA SICUREZZA

La prima fonte legislativa è la *Costituzione* dove si può leggere:

Art. 32: “La Repubblica tutela la salute come fondamentale diritto dell’individuo ed interesse della collettività ...”;

Art. 35: “La Repubblica tutela il lavoro in tutte le sue forme ed applicazioni ...”;

Art. 41: “L’iniziativa economica privata è libera. Non può svolgersi in contrasto con l’utilità sociale o in modo da arrecare danno alla sicurezza, alla libertà, alla dignità umana ...”.

Il *Codice civile* stabilisce:

Art. 2050: “Chiunque cagiona danni ad altri nello svolgimento di una attività pericolosa, per sua natura o per la natura dei mezzi adoperati, è tenuto al risarcimento se non prova di avere adottato tutte le misure idonee ad evitare il danno”;

Art. 2087: “L’imprenditore è tenuto ad adottare nell’esercizio dell’impresa le misure che secondo la particolarità del lavoro, l’esperienza e la tecnica, sono necessarie a tutelare l’integrità fisica e la personalità morale dei prestatori di lavoro”.

Il *Codice penale* sancisce:

Art. 437: “Chiunque omette di collocare impianti, apparecchi o segnali destinati a prevenire disastri o infortuni sul lavoro, ovvero li rimuove o danneggia, è punito con la reclusione da sei mesi a cinque anni; se dal fatto deriva un disastro o un infortunio la pena è la reclusione da tre a dieci anni”;

Art. 451: “Chiunque, per colpa, omette di collocare, ovvero rimuove o rende inservibili, apparecchi o altri mezzi destinati alla estinzione di un incendio o al salvataggio o al soccorso contro disastri o infortuni sul lavoro, è punito con la reclusione fino a un anno e con la multa da lire quarantamila a duecentomila”;

Nel settore elettrico è di fondamentale importanza la legge 1-3-1968 n.186: “Disposizioni concernenti la produzione di materiali, apparecchiature, macchinari, installazioni e impianti elettrici ed elettronici” che consta dei seguenti due articoli:

Art. 1: “Tutti i materiali, le apparecchiature, i macchinari, le installazioni e gli impianti elettrici ed elettronici devono essere realizzati e costruiti a regola d’arte.”

Art. 2: “I materiali, le apparecchiature, i macchinari, le installazioni e gli impianti elettrici ed elettronici realizzati secondo le Norme del CEI si considerano costruiti a regola d’arte.”

Si sottolinea infine che sono destinatari dell’obbligo della sicurezza, oltre all’imprenditore, tutti gli operatori di un processo produttivo, ciascuno in misura dipendente dalle capacità decisionali e di intervento che gli competono. Sono così responsabili della sicurezza, ciascuno per la propria parte: costruttori, venditori, noleggiatori di macchinari, di attrezzature e di impianti, progettisti, direttori dei lavori, collaudatori, ispettori, dirigenti, impiegati ed operai.

Condizione e modalità per il verificarsi di un infortunio elettrico possono essere estremamente variabili, in relazione ad una molteplicità di apparecchiature, di impianti e di condizioni di impiego. Anche se la legislazione ordinaria contiene esplicite disposizioni atte a favorire la sicurezza, la previsione del rischio e la formulazione di prescrizioni e misure atte a prevenire od a minimizzare il pericolo viene affidata ad appositi enti nazionali ed internazionali che provvedono ad emanare ed aggiornare periodicamente le Normative di Sicurezza. Nel caso dell’Italia tale attività viene svolta dal CEI. L’importanza delle Norme CEI è evidenziata già dalla legge 1-3-1968 n.186. La legge 18-10-1977 n.791 estende tale concetto anche al settore della sicurezza, come ribadito anche dalla recente legge 5-3-1990 n.46, in gran parte modificata dal D.M. n. 37 del 22 gennaio 2008. L’adeguamento alle norme CEI costituisce dunque una condizione sufficiente, anche se non neces-

saria, al soddisfacimento delle condizioni sulla esecuzione a regola d'arte e secondo criteri di sicurezza.

### EFFETTI DELLA CORRENTE ELETTRICA SUL CORPO UMANO

Il passaggio di una corrente elettrica nei tessuti umani (elettrocuzione) ha effetti fisiologici largamente variabili, dipendenti dal valore della corrente, dalla sua frequenza, dalla durata del contatto, dalla sensibilità individuale e dalla zona del corpo in cui il fenomeno ha luogo. La *soglia di sensibilità* può variare da alcune decine di  $\mu\text{A}$ , per la lingua, a poco più di una decina di mA. L'elettrocuzione risulta pericolosa a causa dei seguenti fenomeni fisiologici:

1. *Tetanizzazione*: a causa dello stimolo elettrico sulle singole cellule, si manifesta la contrazione di un intero fascio muscolare, con una sintomatologia non diversa da quella del tetano (da cui il nome). Particolarmente pericoloso un contatto in corrente alternata: i tessuti muscolari sono interessati da una serie di stimoli che si ripetono in maniera regolare determinando uno stato di contrazione permanente che impedisce all'fortunato di interrompere il contatto. La massima corrente che attraversi il corpo e consenta ancora di "lasciare la presa" viene definita *corrente di rilascio*.
2. *Blocco respiratorio*: per valori piuttosto elevati di corrente (che accentuano i sintomi di contrazione muscolare) e soprattutto se la zona interessata è quella toracica, comprendente i muscoli respiratori, si può subire un danno da paralisi respiratoria, causa di danni irreversibili al cervello se tale blocco supera i 2 ÷ 3 minuti. È questo tipo di fenomeno la causa del colorito cianotico che presentano le vittime dell'elettrocuzione.
3. *Fibrillazione ventricolare*: i disturbi legati a cause elettriche investono anche il muscolo cardiaco, regolato nel suo pulsare da stimoli elettrici. Se a questi si sovrappongono altri stimoli esterni, di intensità adeguatamente alta, si può pervenire ad una perdita completa di quel coordinamento che rende possibile l'attività cardiaca. A seguito di una stimolazione intensa ed incoerente, ciascuna delle fibre del ventricolo risulta soggetta a contrazioni disordinate, il cui persistere finisce per diventare letale.
4. *Ustioni*: bastano densità di corrente di pochi  $\text{mA}/\text{mm}^2$  per qualche secondo per provocare ustioni apprezzabili, soprattutto sulle zone dotate di maggiore resistività, come la pelle. Oltre i 40 ÷ 50  $\text{mA}/\text{mm}^2$  si ha una carbonizzazione dei tessuti interessati, che, aumentando notevolmente la resistenza locale, può avere un effetto paradossalmente protettivo nei confronti di ulteriori più gravi danni.

La resistenza del corpo umano, che generalmente compete alla pelle, si fissa al valore convenzionale di 2 k $\Omega$  e se si assume come non pericolosa una corrente non superiore a 25 ÷ 30 mA, risultano non pericolose le tensioni fino a circa 50 ÷ 60 V: è sulla base di queste considerazioni che le Norme pongono un limite al livello di tensione sopportabile senza che intervenga qualche forma di protezione.

Gli incidenti di tipo elettrico vengono classificati in due categorie:

1. Un *contatto diretto* si verifica quando una o più parti del corpo vengono in tensione con parti di impianto elettrico normalmente in tensione (conduttore nudo, viti di fissaggio, morsettiera);
2. si parla invece di *contatto indiretto* quando la folgorazione è provocata dal contatto con ampie parti metalliche normalmente non in tensione (*massa*), che potrebbero però andare in tensione per un difetto di isolamento.

### PROTEZIONI DAL CONTATTO INDIRETTO

La misura di protezione più usuale contro i contatti indiretti è quella di collegare la massa dell'apparecchio a terra, tramite un apposito conduttore, che prende il nome di conduttore di prote-

zione. I requisiti della protezione dipendono dal tipo di sistema elettrico di alimentazione, ma in ogni caso si deve garantire *l'interruzione automatica del circuito* in caso di pericolo per le persone.

Quindi, i dispositivi di interruzione automatica del circuito devono intervenire in un tempo tanto più breve quanto maggiore è la tensione sulle masse, secondo una curva limite tensione - tempo compatibile con la protezione del corpo umano (curva di sicurezza) illustrata in figura 1. Un apparecchio, destinato ad essere protetto mediante interruzione automatica del circuito, è dotato di isolamento principale e la massa è munita di un morsetto dove collegare il conduttore di protezione; esso viene denominato *apparecchio di classe I*.

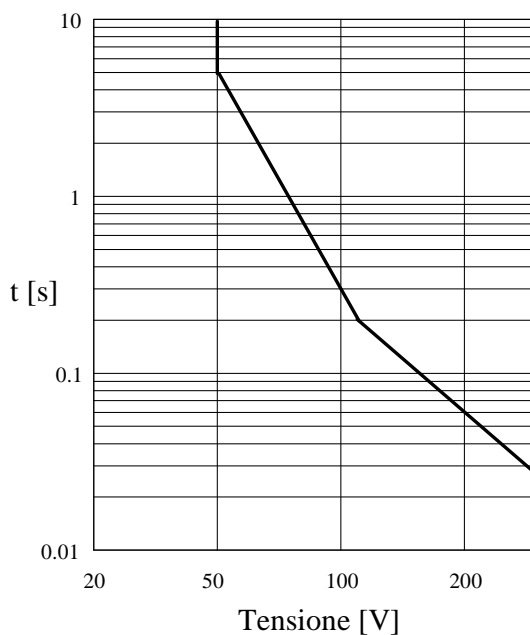


Figura 1.

### IMPIANTO DI TERRA

1. Con il termine *terra* si indica la massa del terreno assunta convenzionalmente a potenziale nullo ovunque.
2. Un *dispersore di terra* è un corpo metallico posto ad una certa profondità nel terreno, in buon contatto con questo e destinato a disperdere eventuali correnti.
3. Il *conduttore di terra* provvede a realizzare il collegamento fra le parti da proteggere ed il dispersore di terra.
4. Un *impianto di terra* è costituito dall'insieme dei dispersori e dei conduttori di terra.

Al fine di chiarire quanto definito sopra, si consideri un dispersore emisferico (vedi figura 2) di raggio  $R_0$  che disperda in un terreno omogeneo, di conducibilità  $\sigma$ , una corrente  $I$ . A causa della caduta di tensione lungo il terreno, la tensione misurabile tra l'elettrodo ed i punti del terreno aumenta con la distanza  $r$ , in tutte le direzioni radiali. Per punti infinitamente lontani la differenza di potenziale tra l'elettrodo ed il terreno è massima

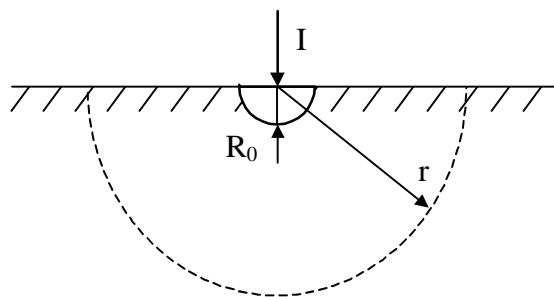


Fig. 2. – Dispersore di terra emisferico.

È possibile dimostrare che, nel caso ideale considerato, la legge di variazione del potenziale è espressa da:

$$v(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{1}{\|\mathbf{r}\|}$$

Si è assunto pari a zero il potenziale dei punti infinitamente lontani dal dispersore, come usuale. Questo punto convenzionale, in pratica abbastanza lontano da poterne trascurare il potenziale, costituisce una *terra di riferimento a potenziale zero*. Su tutti i punti della superficie del dispersore, ponendo  $r = R_0$ , il valore del potenziale è:



$$V_t = \frac{I}{2\pi\sigma R_0}$$

Tale tensione  $V_t$  è detta *tensione totale di terra* e rappresenta la differenza di potenziale tra l'elettrodo ed il punto a potenziale zero. La *resistenza totale di terra* si calcola quindi eseguendo il rapporto:

$$R_t = \frac{V_t}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma R_0}$$

Il dispersore di terra risulta quindi rappresentabile con lo schema elettrico illustrato in figura 3, dove E indica l'elettrodo e TO il punto di terra a potenziale zero. Questo consente di conglobare nella resistenza  $R_t$  tutta l'opposizione incontrata dalla corrente I dispersa a terra.

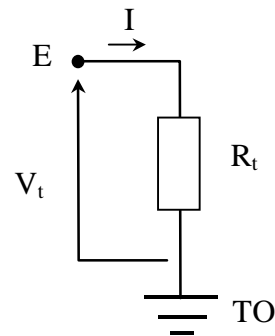


Fig. 3. - Schema elettrico equivalente del dispersore di terra.

In linea di principio, qualunque oggetto metallico che risulti posto in intimo contatto con il terreno può essere considerato un dispersore. Le Norme forniscono prescrizioni relative a qualità e dimensioni dei dispersori. Il materiale costitutivo deve essere tale da impedire un facile deterioramento dovuto all'umidità (la corrosione è responsabile di un aumento della resistenza di terra). I metalli comunemente impiegati sono il rame, l'acciaio rivestito di rame e i materiali ferrosi a pesante zincatura.

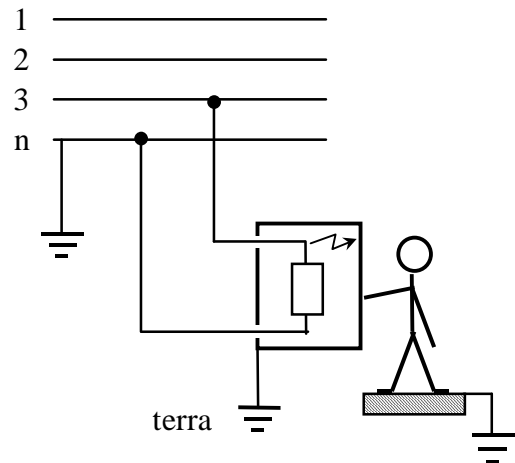
La resistenza di terra dipende dalla resistività del terreno entro il quale è immerso il dispersore e dalle sue dimensioni; Un metodo efficace per abbassare, anche di molto, la resistenza di terra consiste nel sostituire il terreno tutt'intorno al dispersore con grafite, torba, argilla o altro materiale a bassa resistività. L'operazione, compiuta durante la fase di installazione del dispersore, ha lo scopo di migliorare le condizioni di conducibilità nella zona immediatamente circostante il dispersore: è proprio questa zona, infatti, a fornire il maggior contributo nel calcolo della resistenza complessiva di terra. Un altro metodo consiste nel disporre una molteplicità di dispersori reciprocamente collegati, a costituire una efficace maglia di protezione il cui perimetro segue, con buona approssimazione, quello dell'edificio protetto.

Si consideri ora il caso (vedi figura 4.a) di una persona che tocca una massa collegata ad un dispersore di terra nel momento in cui si disperde una corrente I. Nell'ipotesi di trascurare tutti i parametri non resistivi, si può valutare la corrente che attraversa l'infortunato assumendo che sia:  $R_c$  la resistenza equivalente del corpo umano,  $R_{ct}$  una resistenza aggiuntiva tra corpo e terra (calze, scarpe, pavimento),  $R_n$  la resistenza equivalente del neutro verso terra, E la tensione di fase (220 V per il sistema di distribuzione in bassa tensione adottato in Europa).

Dal circuito equivalente (vedi figura 4.b) si ricava per la corrente di elettrocuzione  $I_c$  il valore (approssimato per eccesso):

$$I_c = E \frac{R_t}{R_n(R_t + R_c + R_{ct}) + R_t(R_c + R_{ct})}$$

Si conclude dunque che una resistenza di terra molto piccola offre un elevato grado di sicurezza, assorbendo la maggior aliquota della corrente di guasto. Inoltre, ad un basso valore della resistenza di terra è associata una corrente di guasto  $I_g$  tendenzialmente abbastanza elevata da provocare l'intervento di un interruttore automati-



co di massima corrente. Occorre aggiungere, però, che se la  $R_n$  tende a zero, la corrente  $I_c$  non dipende più da  $R_t$  vanificando così la messa a terra. L'efficacia della messa a terra dipende pertanto anche dalla presenza di una resistenza non nulla tra il neutro e la terra.

Una resistenza di terra relativamente alta vanifica la funzione protettiva dell'interruttore di massima corrente, che viene affidata ad un interruttore differenziale, la cui sensibilità può essere scelta sulla base del valore della  $R_t$  effettivamente disponibile. La limitazione della tensione di contatto a 50 V imposta dalle Norme può essere espressa in funzione della corrente differenziale  $I_{\Delta n}$  che determina l'intervento dell'interruttore automatico:  $R_t I_{\Delta n} < 50$ .

Si deduce che una protezione differenziale è efficace anche per resistenza di terra relativamente elevata, come indica sinteticamente la tabella seguente, nella quale si è fatto riferimento ad alcuni dei valori più comuni di sensibilità  $I_{\Delta n}$ .

|                    |    |    |    |     |     |     |      |      |
|--------------------|----|----|----|-----|-----|-----|------|------|
| $I_{\Delta n}$ [A] | 10 | 5  | 1  | 0.5 | 0.3 | 0.1 | 0.03 | 0.01 |
| $R_t$ [ $\Omega$ ] | 5  | 10 | 50 | 100 | 167 | 500 | 1667 | 5000 |

L'efficienza del relè (interruttore) differenziale ad alta sensibilità come elemento di sicurezza personale giustifica il nome di *salvavita* con il quale viene comunemente indicato: i valori più comuni per  $I_{\Delta n}$  sono di 10 e 30 mA, espressamente previsti da decreti e capitolati.

### UN CASO PERICOLOSO

Nel caso di un impianto di terra comune a più utenze, va segnalato per una pericolosità potenzialmente elevata il caso in cui anche una sola delle utenze non sia dotata di protezione differenziale. Facendo riferimento, infatti, alla figura 5, si supponga che tutti i carichi siano provvisti di relè differenziale con la usuale alta sensibilità nominale  $I_{\Delta n} = 30$  mA, con la sola eccezione del carico 1, protetto soltanto da un interruttore automatico magnetotermico con  $I_n = 32$  A e  $I_{5s} = 3 I_n = 96$  A.

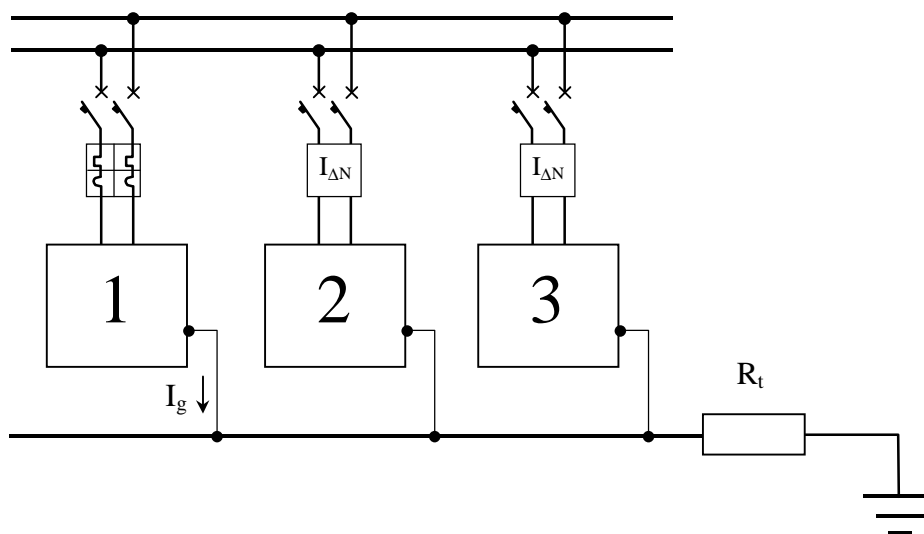


Fig. 5

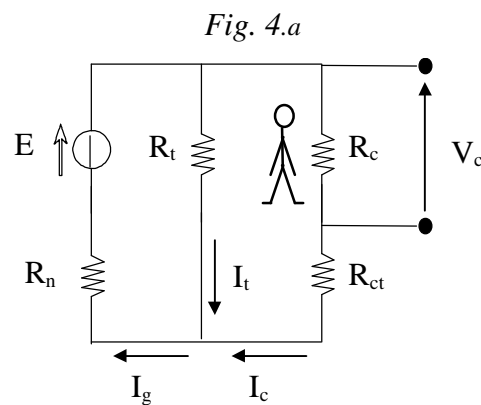


Fig. 4.b

Le norme di sicurezza vengono soddisfatte con una resistenza di terra  $R_t < 50 / I_{5s} \approx 0.52 \Omega$ , un valore estremamente basso che ripropone le stesse difficoltà già segnalate in precedenza e che finiscono per rendere praticamente necessaria l'integrazione con le protezioni differenziali. Nel caso piuttosto comune di valori consistentemente più elevati, intorno a  $10\div 20 \Omega$ , possono instaurarsi tensioni di contatto decisamente pericolose: la presenza di un salvavita nei rimanenti appartamenti viene così completamente vanificata e rischia, anzi, di indurre soltanto un mal riposto senso di sicurezza. Tale situazione, estremamente diffusa nei condomini, dovrebbe essere sanata con la definitiva applicazione della legge 46/90, contenente Norme per la sicurezza degli impianti, tra le quali l'obbligo di installazione generalizzata della protezione differenziale con  $I_{\Delta N} < 30 \text{ mA}$ .

### PROTEZIONI DAL CONTATTO DIRETTO

Le prescrizioni delle Norme sono di tipo essenzialmente passivo, intese soprattutto ad evitare che si verifichi il contatto diretto di persone con parti di impianto normalmente in tensione. A tale scopo occorre adottare misure di protezione totale nei luoghi accessibili a persone non consapevoli del rischio elettrico. Gli isolamenti impiegati devono soddisfare alle specifiche elettriche e meccaniche. In particolare, tutte le parti attive devono essere contenute entro involucri capaci di garantire una protezione totale in tutte le direzioni. Ove questo non sia possibile, occorre che siano rese inaccessibili con sbarramenti adeguati. Eventuali eccezioni riguardano apparecchi o parti di apparecchi che, per la loro specifica natura, non possono essere protetti nella maniera descritta (ad esempio la parte metallica di un portalampada). Le Norme ammettono l'apertura degli involucri isolanti, per ragioni di esercizio o di manutenzione, a patto che sia rispettata una delle seguenti condizioni:

- richieda l'uso di uno specifico attrezzo,
- richieda l'uso di una chiave, affidata, in un numero limitato di copie, a personale specializzato,
- determini la sconnessione automatica dalla rete delle parti in tensione (interblocco), con il ripristino dell'alimentazione reso possibile solo dopo la richiusura dell'involucro,
- l'apertura dell'involucro determini l'interposizione di una barriera intermedia supplementare, rimossa automaticamente solo dopo il ripristino delle condizioni di sicurezza precedenti.

Le misure di *protezione parziale* hanno lo scopo di prevenire solo i contatti accidentali e risultano del tutto inefficaci contro la maggior parte dei contatti intenzionali. Impiegate in locali accessibili solo al personale specializzato, consistono in ostacoli strategicamente disposti e nell'opportuno distanziamento delle parti in tensione e delle masse. Per gli ostacoli viene ammessa la possibilità di rimozione volontaria senza bisogno di speciali attrezzi. Il distanziamento è finalizzato a rendere impossibile l'accesso simultaneo a parti a tensione diversa. Il rispetto di questo obbligo si traduce nella definizione di un *volume di accessibilità* che ponga le parti in tensione fuori dalla "portata di mano" di operatori anche addestrati.

L'interruttore differenziale ad alta ( $I_{\Delta n} = 30 \text{ mA}$ ) o ad altissima sensibilità ( $I_{\Delta n} = 10 \text{ mA}$ ) costituisce l'unica forma di protezione attiva contro il contatto diretto. Tuttavia, il salvavita può risultare del tutto inefficace nel caso di contatto diretto bipolare. Nel caso il corpo umano sia isolato da terra, la protezione non interviene affatto, dal momento che non viene dispersa a terra nessuna corrente. Leggermente meno pericoloso il contatto bipolare se il corpo ha un contatto a terra: pur circolando nel corpo una corrente eventualmente letale, una aliquota di corrente dispersa può provocare l'intervento dell'interruttore differenziale in un tempo sufficientemente breve.

# APPENDICI

# ELETTROMAGNETISMO

## 1. RICHIAMI SULLE DEFINIZIONI DELLE GRANDEZZE FONDAMENTALI

### Forza di Lorentz

La forza esercitata su una carica puntiforme in moto nel vuoto ha la seguente espressione (forza di Lorentz):

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.1)$$

dove:

$\mathbf{F}$  = forza che si esercita sulla carica puntiforme (N);

$q$  = carica elettrica (C);

$\mathbf{v}$  = velocità (m/s);

$\mathbf{E}$  = campo elettrico (V/m);

$\mathbf{B}$  = induzione magnetica (T).

La funzione vettoriale  $\mathbf{E}$  che esprime il campo elettrico viene definita in base alla forza  $\mathbf{F}$  agente su una carica puntiforme (carica di prova,  $q_p$ ) collocata nel punto in esame e *ferma* rispetto all'osservatore in un riferimento inerziale<sup>(o)</sup>. Per tale definizione operativa si richiede che la carica di prova non influenzi, con la sua presenza, le sorgenti del campo. In tali condizioni il campo elettrico  $\mathbf{E}$  è definito dal rapporto  $\mathbf{F}/q_p$  e l'esperienza mostra che esso è indipendente dal valore e dal segno della carica di prova. Così definito in termini del tutto generali, il vettore  $\mathbf{E}$  appare descrittivo dello stato del sistema nel punto considerato.

Come mostrato dalla (1.1), una carica puntiforme  $q$  in moto con una velocità  $\mathbf{v}$  rispetto all'osservatore è sottoposta ad una forza che, oltre al termine  $q\mathbf{E}$ , contiene il termine mozionale  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , di interazione tra la velocità della carica e l'induzione magnetica  $\mathbf{B}$  (forza che è ortogonale a  $\mathbf{v}$  e che dunque non compie lavoro) Tale termine viene assunto come definizione operativa di  $\mathbf{B}$  nel punto "attraversato" dalla carica  $q$  nell'istante considerato con la velocità  $\mathbf{v}$  rispetto all'osservatore in un riferimento inerziale (tale definizione si affianca a quella che coinvolge il momento amperiano puntiforme di prova, che permette di fare misure statiche ma necessita di una attenta definizione di "momento di dipolo magnetico"). Si noti tuttavia che, in linea di principio, la conoscenza del termine  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  non permette di determinare la componente di  $\mathbf{B}$  parallela a  $\mathbf{v}$ , il che implica necessariamente che per la determinazione di  $\mathbf{B}$  è necessaria almeno una coppia di misure nello stesso punto, ma con velocità vettorialmente diverse. Inoltre, come per la misura del campo elettrico, tale definizione operativa richiede che la carica di prova non influenzi, con la sua presenza, le sorgenti del campo.

### Polarizzazione elettrica

Da un punto di vista macroscopico e strettamente fenomenologico – che tiene conto solo degli effetti prodotti e non delle cause che li hanno prodotti – l'azione di un campo elettrico  $\mathbf{E}$  su un materiale non conduttore può essere descritta dicendo che ogni volumetto di materia, quando è sottopo-

---

<sup>(o)</sup> La formulazione dell'elettromagnetismo è appunto concepita nell'ambito dei *Sistemi di riferimento inerziali* (o *galileiani*); si tratta dei sistemi per i quali è verificato il principio di inerzia (la conservazione dello stato di quiete o di moto di un corpo non soggetto a forze). Tali sono tradizionalmente considerati i sistemi in quiete rispetto alle stelle fisse e, in pratica, anche quelli ancorati ai laboratori terrestri. Si ricorda che è *inerziale ogni sistema in moto traslatorio uniforme rispetto ad un sistema inerziale* e, più in generale, che *tutte le leggi della fisica* (e quindi anche quelle dell'elettromagnetismo) *sono invarianti rispetto alla totalità dei sistemi inerziali*. In questo principio si inquadra l'*invarianza della velocità della luce nel vuoto* rispetto a tutti i sistemi inerziali.

sto al campo  $\mathbf{E}$ , diviene sede di un dipolo elettrico<sup>(1)</sup> con momento infinitesimo  $d\mathbf{p}$ , proporzionale al volume  $d\tau$  occupato dal volumetto. Così lo stato della materia polarizzata può essere caratterizzato punto per punto per mezzo della grandezza vettoriale intensità di polarizzazione elettrica:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V} \quad (1.2)$$

dove :

$\mathbf{P}$  = polarizzazione elettrica del mezzo ( $\text{C}/\text{m}^2$ );  $\Delta \mathbf{p}$  = momento di dipolo elettrico ( $\text{C}\cdot\text{m}$ );  $\Delta V$  = volume ( $\text{m}^3$ ).

Il passaggio al limite va effettuato con volumi sufficientemente piccoli da poter trascurare le variazioni delle grandezze nella regione dello spazio considerata, ma allo stesso tempo sufficientemente grandi da contenere un numero elevato di atomi, tale da poter trascurare le fluttuazioni delle grandezze su scala atomica.

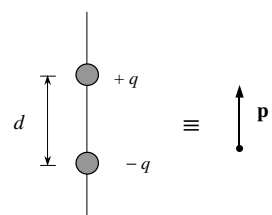
### Magnetizzazione

Da un punto di vista macroscopico e strettamente fenomenologico l'azione sulla materia di un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  può essere descritta dicendo che ogni volumetto  $d\tau$  di materia, quando è sottoposto all'azione del campo  $\mathbf{B}$ , diviene sede di un dipolo magnetico<sup>(2)</sup> con momento infinitesimo  $d\mathbf{m}$ , proporzionale a  $d\tau$ . Così lo stato della materia magnetizzata può essere caratterizzato punto per punto per mezzo della grandezza vettoriale intensità di polarizzazione magnetica (magnetizzazione):

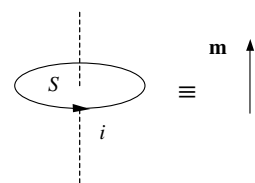
$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{m}}{\Delta V} \quad (1.3)$$

dove:

<sup>(1)</sup> Si consideri il sistema costituito da due cariche puntiformi di valore opposto,  $+q$  e  $-q$ , situate nel vuoto ad una distanza  $d$ , e si supponga di avvicinarle progressivamente fra loro, aumentandone contemporaneamente il valore assoluto, in modo che il prodotto  $qd$  non cambi. Più precisamente, si consideri il limite al quale tende tale sistema quando  $d$  e  $q$  tendono rispettivamente a 0 e a  $+\infty$ , in modo tale che il prodotto  $qd$  tenda ad una quantità  $m_e$  finita e non nulla. Il sistema che si ottiene facendo questo limite si chiama **dipolo elettrico**. Per caratterizzare un dipolo elettrico occorre individuare: 1) la *direzione* della retta sulla quale sono poste le due cariche puntiformi opposte; 2) il *verso* (da quella negativa a quella positiva) secondo il quale le cariche sono disposte; 3) il *valore*  $p$  al quale tende il prodotto  $qd$ . Occorre perciò una grandezza vettoriale  $\mathbf{p}$  che si chiama **momento del dipolo elettrico**.



<sup>(2)</sup> Si consideri (Figura. 2) il sistema costituito da una corrente  $i$  che percorre una spira circolare: sia  $S$  l'area della superficie circondata dalla spira. Si supponga di diminuire progressivamente  $S$  aumentando contemporaneamente  $i$ , in modo che il prodotto  $iS$  non cambi. Più precisamente si consideri il limite al quale tende tale sistema quando  $S$  e  $i$  tendono rispettivamente a 0 e a  $+\infty$ , in modo tale che il prodotto  $iS$  tenda ad una quantità  $m_m$  finita e non nulla. Il sistema che si ottiene facendo questo limite si chiama **dipolo magnetico**. Per caratterizzare un dipolo magnetico occorre individuare: 1) la *giacitura* del piano della spira, e ciò può farsi assegnando la *direzione* della normale al piano; 2) il *verso* della corrente  $i$  nella spira, e ciò può farsi assegnando un verso sulla direzione precedente: quello destrogiro rispetto al verso della corrente  $i$ ; 3) il *valore*  $m$  al quale tende il prodotto  $iS$ . Occorre perciò una grandezza vettoriale  $\mathbf{m}$  che si chiamerà **momento del dipolo magnetico**.



$\mathbf{M}$  = magnetizzazione del mezzo (A/m);  $\Delta\mathbf{m}$  = momento di dipolo magnetico ( $\text{A}\cdot\text{m}^2$ );  $\Delta V$  = volume ( $\text{m}^3$ ).

### Spostamento elettrico e campo magnetico

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.4)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (1.5)$$

dove:

$\mathbf{D}$  = spostamento elettrico ( $\text{C}/\text{m}^2$ );  $\mathbf{H}$  = campo magnetico (A/m);  $\epsilon_0$  = costante dielettrica del vuoto ( $8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F}/\text{m}$ );  $\mu_0$  = permeabilità magnetica del vuoto ( $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H}/\text{m} \cong 1.256 \cdot 10^{-6} \text{ H}/\text{m}$ ).

Spesso è possibile supporre che la polarizzazione elettrica sia proporzionale al campo elettrico e che la magnetizzazione sia proporzionale al campo magnetico (mezzo omogeneo isotropo):

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (1.7)$$

dove  $\chi_e$ ,  $\chi_m$  sono rispettivamente la suscettività elettrica e magnetica. In questo caso è possibile riscrivere le (1.4)-(1.5) come segue:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1.8)$$

$\epsilon_r = 1 + \chi_e$  = costante dielettrica relativa;

$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  = costante dielettrica (del mezzo)

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (1.9)$$

$\mu_r = 1 + \chi_m$  = permeabilità magnetica relativa;

$\mu = \mu_r \mu_0$  = permeabilità magnetica (del mezzo)

### Densità volumetrica di carica elettrica

Si consideri un punto P dello spazio ed un elemento di volume V centrato in P.

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad (1.10)$$

dove:

$\rho$  = densità volumetrica di carica elettrica nel punto P ( $\text{C}/\text{m}^3$ );  $\Delta Q$  = carica elettrica presente in V (C);  $\Delta V$  = volume di V ( $\text{m}^3$ ).

### Densità di corrente elettrica

Si consideri un punto P dello spazio ed una superficie piana passante per P.

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t} \quad (1.12)$$

dove:

$\mathbf{J}$  = densità volumetrica di corrente elettrica nel punto P ( $\text{A}/\text{m}^2$ );  $\mathbf{n}$  = versore normale alla superficie nel punto P;  $\Delta S$  = area dell'elemento di superficie considerato centrato in P ( $\text{m}^2$ );  $\Delta Q$  = carica

elettrica che ha attraversato l'elemento di superficie nel verso individuato da  $\mathbf{n}$  (C);  $\Delta t$  = intervallo di tempo considerato (s).



## 2. LE EQUAZIONI FONDAMENTALI DELL'ELETTROMAGNETISMO

### Equazioni di Maxwell in forma locale

Sono riportate qui di seguito le due equazioni di Maxwell in forma locale:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

alle quali viene associata l'equazione di continuità:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.3)$$

dove  $\mathbf{E}$  è il vettore **campo elettrico**,  $\mathbf{D}$  il vettore **induzione elettrica**,  $\mathbf{H}$  il vettore **campo magnetico**,  $\mathbf{B}$  il vettore **induzione magnetica**,  $\mathbf{J}$  la **densità di corrente** e  $\rho$  la **densità volumetrica di carica**.

Il problema elettrodinamico è ulteriormente definito introducendo le **equazioni di legame materiale**:

$$\mathbf{D} = f_1(\mathbf{E})$$

$$\mathbf{B} = f_2(\mathbf{H})$$

$$\mathbf{J} = f_3(\mathbf{E}, \mathbf{E}_i)$$

Quando è possibile assumere l'ipotesi di **mezzo omogeneo** (indipendenza dalla posizione), **isotropo** (indipendenza dalla direzione) e **lineare**, come ad esempio nel vuoto, le **equazioni di legame materiale** vengono riscritte come segue:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \quad (2.6)$$

dove  $\varepsilon$ ,  $\mu$  e  $\sigma$  sono rispettivamente la **permittività dielettrica** (o, **costante dielettrica**), la **permeabilità magnetica** e la **conducibilità elettrica** del mezzo considerato. La (2.6) è detta **legge di Ohm in forma locale**. Il vettore  $\mathbf{E}_i$  che vi compare è detto campo elettrico impresso. Tale vettore non conservativo è essenziale al fine di ottenere una circolazione di corrente. Esso ha le dimensioni di un campo elettrico (V/m): esercita azioni di forza sulle cariche elettriche ma non deve considerarsi un campo elettrico in quanto la sua natura è legata a fenomeni non elettrici. Senza entrare nel dettaglio, si ricorda che esistono numerosi fenomeni di varia natura (chimica, termica, meccanica) che causano azioni di forza sulle cariche elettriche. I dispositivi entro cui hanno sede i fenomeni suddetti, sono denominati "generatori elettrici".

Applicando l'operatore divergenza alla (2.1), e ricordando la solenoidalità del rotore si ottiene:

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.7)$$

che, combinata con l'equazione di continuità (2.3), fornisce :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{D} - \rho = \text{cost.}$$

Ipotizzando che sia esistito un istante in cui in ogni punto dello spazio considerato si sia avverata una situazione in cui  $\mathbf{D} = 0$  e  $\rho = 0$ , la costante è identicamente nulla. Si ottiene quindi la **legge di Gauss** in forma locale:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.8)$$

Analogamente, applicando l'operatore divergenza ad ambo i membri della (2.2) si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = \text{cost.}$$

Ipotizzando che sia esistito un istante in cui il campo di induzione magnetica sia stato ovunque nullo, si ottiene infine:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.9)$$

*Il campo  $\mathbf{B}$  è quindi solenoidale, e le sue linee di forza si richiudono sempre su se stesse.*

### Equazioni di Maxwell in forma integrale

Integrando ambo i membri della (2.1) su una superficie  $S$  avente come contorno la curva chiusa  $\Gamma$  ed applicando il teorema di Stokes si ottiene:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i_c = \int_S \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.10)$$

dove con  $i_c$  si è indicata la corrente totale concatenata<sup>(o)</sup>, somma della corrente di conduzione e della corrente di spostamento.

La (2.10) esprime la legge della circuitazione magnetica, nota anche come **legge di Ampère - Maxwell**: *la circuitazione del vettore campo magnetico lungo una linea chiusa qualsiasi è pari alla corrente totale concatenata con tale linea.* Si noti che è corretto parlare di corrente concatenata  $i_c$ , poiché, per la (2.7), la quantità  $\mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t$  è solenoidale. La corrente concatenata  $i_c$  non dipende quindi dalla superficie  $S$ , ma solo dalla curva  $\Gamma$  su cui tale superficie si appoggia. Non è così, in generale, per le correnti di conduzione e di spostamento prese separatamente.

Analogamente, integrando ambo i membri della (2.2) su una superficie  $S$  avente come contorno la linea chiusa  $\Gamma$  ed applicando il teorema di Stokes si ottiene:

---

<sup>(o)</sup> Si intende per corrente "concatenata" con una data linea  $\Gamma$ , l'intensità della corrente che attraversa la superficie  $S$ , arbitrariamente scelta tra quelle il cui bordo è  $\Gamma$ ; il verso di riferimento per il segno della corrente è quello del versore  $\mathbf{n}$  associato al verso di percorrenza di  $\Gamma$ , secondo la convenzione destrogira (regola della mano destra).

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{ndS} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = e = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{ndS} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{ndS} \quad (2.11)$$

dove  $\Phi_c$  rappresenta il flusso del campo di induzione magnetica concatenato con la linea chiusa  $\Gamma$ . L'equazione (2.11) esprime la legge della circuitazione elettrica, altrimenti nota come **legge di Faraday - Neumann - Lenz**, fondamentale per lo studio dei fenomeni di induzione elettromagnetica: *ogni volta che il flusso di induzione magnetica concatenato con una linea chiusa qualsiasi varia nel tempo, si genera nella linea stessa una forza elettromotrice (f.e.m.) pari alla derivata temporale del flusso cambiata di segno*. Se la linea è conduttrice il senso della f.e.m. indotta è tale da creare una corrente che dà luogo ad un campo magnetico che tende ad opporsi alla variazione di flusso che ha originato la f.e.m. stessa.

Applicando il teorema della divergenza alla (2.8) si ottiene la legge di Gauss in forma integrale:

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{D} \, d\tau = \oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{ndS} = \int_{\tau} \rho \, d\tau = Q \quad (2.12)$$

cioè: il flusso del vettore di induzione elettrica attraverso una superficie chiusa qualsiasi è pari alla quantità di carica racchiusa in tale superficie.

Allo stesso modo, dalla (2.9) si ottiene:

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{B} \, d\tau = \oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{ndS} = 0 \quad (2.13)$$

Applicando il teorema della divergenza alla legge della conservazione della carica si ottiene:

$$i = \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{J} \, d\tau = \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{ndS} = -\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau = -\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \, d\tau = -\frac{dQ}{dt} \quad (2.14)$$

cioè: il flusso del vettore densità di corrente uscente da una superficie chiusa qualsiasi è pari alla variazione di carica nell'unità di tempo nel volume racchiuso da tale superficie.

A completare il quadro si aggiunge la **legge di Lorentz**:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.15)$$

esprime la forza che agisce su una carica  $q$  in moto in un campo elettromagnetico con velocità  $\mathbf{v}$ . La (2.15) può essere riferita all'unità di volume, caratterizzata dalla densità di carica  $\rho$  e dalla densità di corrente  $\mathbf{J}$ :

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (2.16)$$

## Teorema di Poynting

Il teorema di Poynting rappresenta il bilancio energetico fondamentale dell'elettromagnetismo, fornendo un'espressione che descrive la conservazione dell'energia nei sistemi elettromagnetici. Moltiplicando scalarmente per  $\mathbf{E}$  la (2.1) e per  $\mathbf{H}$  la (2.2), e sottraendo membro a membro si ha:

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.17)$$

Utilizzando l'identità vettoriale:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{C}$$

il primo membro della (2.17) può essere riscritto come segue:

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (2.18)$$

Supponendo valida la legge di Ohm locale (2.6), la (2.18) può essere ulteriormente sviluppata:

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}^2 - \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J} \quad (2.19)$$

La grandezza vettoriale  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  viene chiamata **vettore di Poynting**, e rappresenta la densità di potenza associata ad un'onda elettromagnetica. La (2.19) può essere più facilmente interpretata integrandola su un volume finito  $\tau$  delimitato dalla superficie chiusa  $S$ . Applicando in maniera opportuna il teorema della divergenza si ottiene:

$$\int_{\tau} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J} dV = \int_{\tau} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV + \int_{\tau} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV + \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma} dV + \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.20)$$

Supponendo valida l'ipotesi di mezzo lineare, ed applicando le equazioni di legame materiale per mezzi lineari, isotropi ed omogenei (2.4) e (2.5) si ottiene<sup>(\*)</sup>:

$$\int_{\tau} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J} dV = \frac{d}{dt} \left( \int_{\tau} \frac{B^2}{2\mu} dV + \int_{\tau} \frac{\epsilon E^2}{2} dV \right) + \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma} dV + \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.21)$$

Integrando, infine, entrambi i membri della (2.21) dal tempo iniziale  $t_0$  all'istante  $t$ , si ottiene:

$$\int_{t_0}^t \int_{\tau} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J} dV dt = \left[ \int_{\tau} \frac{B^2}{2\mu} dV + \int_{\tau} \frac{\epsilon E^2}{2} dV \right]_{t_0}^t + \int_{t_0}^t \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma} dV dt + \int_{t_0}^t \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS dt \quad (2.22)$$

Ponendo:

$$\begin{aligned} E_e &= \frac{1}{2} \int_{\tau} \epsilon E^2 dV & E_m &= \frac{1}{2} \int_{\tau} \frac{B^2}{\mu} dV & E_{em} &= E_e + E_m \\ L_g &= \int_{t_0}^t \int_{\tau} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J} dV dt & E_d &= \int_{t_0}^t \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma} dV dt & E_S &= \int_{t_0}^t \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS dt \end{aligned}$$

<sup>(\*)</sup> Si noti che dimensionalmente tutti i termini della (2.21) rappresentano delle potenze, misurate in Watt (W).

la (2.22) si presta alla seguente interpretazione: il lavoro  $L_g$  compiuto (nell'unità di tempo) all'interno del volume dai campi impressi (lavoro compiuto dai generatori) è pari alla somma della variazione di energia elettromagnetica  $E_{em}$  contenuta in  $\tau$ , dell'energia dissipata  $E_d$  (per effetto Joule) all'interno di  $\tau$  e dell'energia  $E_S$  uscente dal volume.

$$L_g = \Delta E_{em} + E_d + E_S \quad (2.23)$$

La variazione di energia elettromagnetica  $\Delta E_{em}$  è somma della variazione di energia elettrostatica  $E_e$  e della variazione di energia magnetica  $E_m$ .

Come già accennato, il flusso del vettore di Poynting rappresenta il flusso di energia irradiato attraverso la superficie  $S$ . Nel caso di campi stazionari o quasi stazionari il vettore di Poynting cala, al crescere del raggio  $r$  della superficie nella quale è contenuto il sistema elettromagnetico in esame, come  $1/r^4$ , e quindi si attenua molto rapidamente. In tali casi è lecito trascurare l'energia irradiata nel bilancio (2.23). I campi rapidamente variabili calano invece come  $1/r$ , ed il flusso del vettore di Poynting non può essere trascurato neanche a distanze molto grandi (poiché va come  $1/r^2$ , e la superficie di integrazione cresce come  $r^2$ ).

### TABELLA RIASSUNTIVA DELLE LEGGI FONDAMENTALI DELL'ELETTROMAGNETISMO

Si postula la validità delle equazioni di Maxwell in qualunque punto dello spazio ed in qualunque mezzo materiale purché in quiete rispetto al sistema di riferimento inerziale assunto.

| FORMA LOCALE   | $\Leftrightarrow$             | FORMA INTEGRALE   |
|--|-------------------------------|---|
| $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$             | $\Leftrightarrow$             | $e = \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_e}{dt}$ |
| $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ | $\Leftrightarrow$             | $\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i_c$                     |
| EQUAZIONE DI CONTINUITÀ DELLA CARICA ELETTRICA                                   |                               |   |
| $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$                    | $\Leftrightarrow$             | $i = \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{dQ}{dt}$           |
| EQUAZIONI DELLA DIVERGENZA   |                               |   |
| $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$   | $\Leftrightarrow$             | $\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q$                            |
| $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  | $\Leftrightarrow$             | $\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$                            |
| EQUAZIONI DI LEGAME MATERIALE<br>PER MEZZI LINEARI, OMOGENEI E ISOTROPI          |                               |   |
| $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$   | $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ | $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_t)$                        |

### 3. PROPRIETÀ ELETTRICHE DEI MATERIALI CONDUTTORI ED ISOLANTI

La resistività dei metalli varia con la temperatura secondo il coefficiente di proporzionalità  $\alpha$ : esso è positivo e costante fra circa  $-100^{\circ}\text{C}$  e  $+150^{\circ}\text{C}$ . La resistività alla temperatura  $T$  è data da:

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \quad (3.1)$$

La formula non è valida vicino allo zero assoluto (superconduttività) ed al punto di fusione; i conduttori non metallici hanno generalmente un coefficiente di temperatura negativo. Gli isolanti hanno pure un coefficiente di temperatura negativo e di valore non costante.

| materiale            | resistività<br>$\rho$ [ $\text{n}\Omega\cdot\text{m}$ ] | conducibilità<br>$\sigma$ [ $\text{MS}/\text{m}$ ] | coefficiente di temperatura<br>$\alpha$ [ $\text{m}\Omega/(\Omega\cdot\text{K})$ ] (a $20^{\circ}\text{C}$ ) |
|----------------------|---|--|--|
| Argento (99.9%)      | 16  | 62.5   | 3.8  |
| Rame elettrolitico   | 17.6  | 56.8   | 3.9  |
| Rame ricotto         | 17.3  | 56.8   | 3.9  |
| Rame incrudito       | 17.7  | 56.8   | 3.85   |
| Oro                  | 23.6  | 42.4   | 3.0  |
| Alluminio crudo      | 28  | 35.7   | 4  |
| Zinco                | 62  | 16.1   | 4.0  |
| Platino              | 117   | 8.5  | 3.9  |
| Bronzo               | 36  | 27.7   | 1.65   |
| Nickel               | 136   | 13.8   | 5  |
| Ferro (99%)          | 100 ÷ 150   | 6.7 ÷ 10   | 5.5  |
| Ghisa                | 700 ÷ 1600  | 0.6 ÷ 1.4  | 2.0 ÷ 4.5  |
| Acciaio ( 0.1% C)    | 200   | 5  | 4.2  |
| Acciaio ( 0.4% C)    | 160   | 6.2  | 4.2  |
| Acciaio ( 1% Si)     | 170   | 5.9  | -  |
| Acciaio ( 2% Si)     | 350   | 2.8  | -  |
| Acciaio ( 4% Si)     | 550   | 1.8  | -  |
| Grafite              | 4000 ÷ 20000  | 0.05 ÷ 0.25  | 0.4  |
| Carbone per spazzole | 20000 ÷ 100000  | 0.01 ÷ 0.05  | 0.4  |

Nel vuoto e nell'aria la costante dielettrica ha il valore  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$  F/m; negli altri mezzi ha valori variabili, che sono generalmente ottenuti valutando la costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$  riferita a quella del vuoto ( $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ ).

| materiale         | resistività<br>$\rho$ [ $\text{M}\Omega\cdot\text{m}$ ] | costante die-<br>lettrica relati-<br>va, $\epsilon_r$ | temperatura<br>massima di<br>lavoro [ $^{\circ}\text{C}$ ] | rigidità dielettrica<br>K [ $\text{MV}/\text{m}$ ] | densità<br>$\rho_m$ [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ] |
|-------------------|---|---|--|--|--|
| Porcellana        | $10^3 \div 10^7$  | 4.5 ÷ 6   | 1000   | 10 ÷ 12  | 2400   |
| Bachelite         | $10^3 \div 10^4$  | 5 ÷ 7   | 130  | 10 ÷ 12  | 1600   |
| Carta secca       | $10^3 \div 10^4$  | 1.6 ÷ 2.6   | 90   | 4 ÷ 6  | 820  |
| Vetro             | $10^5 \div 10^8$  | 4.5 ÷ 10  | -  | 30 ÷ 150   | 4500   |
| Mica              | $10^6 \div 10^9$  | 5 ÷ 6   | 750  | 60 ÷ 200   | 2800   |
| Gomma             | $10^6 \div 10^8$  | 2.3 ÷ 2.7   | 70   | 16 ÷ 50  | 1500   |
| Carta paraffinata | $10^8$  | 2.5 ÷ 4   | 90   | 10 ÷ 20  | 1100   |

La *rigidità dielettrica*, misurata in V/m, è l'intensità di campo (elettrico) necessaria a provocare la *scarica disruptiva* attraverso il dielettrico. Nei gas e nei liquidi la scarica provoca la volatilizzazione di una parte delle molecole, però al cessare della scarica il dielettrico si ricostituisce e riacquista le

sue proprietà isolanti. Nei solidi la scarica porta alla distruzione del dielettrico che rimane perforato nelle zone di minore resistenza alla scarica.

#### 4. PROPRIETÀ MAGNETICHE

##### Diamagnetismo

In alcuni materiali (tra cui il rame) si ha una perfetta compensazione tra i momenti magnetici di ogni singolo atomo. In tal caso l'applicazione di un campo magnetico esterno anche molto intenso dà luogo ad una magnetizzazione indotta molto debole e smagnetizzante. Il comportamento è diamagnetico per cui la suscettività  $\chi_m$  è negativa. Si tratta di suscettività molto piccole ed indipendenti dalla temperatura (dell'ordine di  $-10^{-5}$ ).

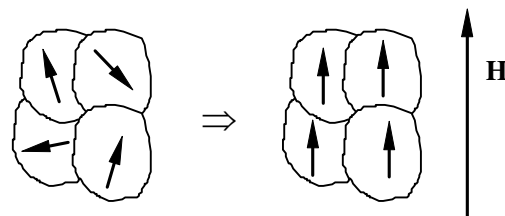
##### Paramagnetismo

Quando gli atomi o le molecole possiedono un momento magnetico proprio, l'azione di un campo esterno produce un allineamento parziale dei momenti secondo il verso del campo. Tale effetto magnetizzante è il risultato dell'equilibrio tra l'azione ordinatrice del campo e quella dell'agitazione termica. Se l'interazione magnetica tra atomi adiacenti è trascurabile, non si ha magnetizzazione spontanea a livello macroscopico: la suscettività magnetica  $\chi_m$  è positiva ed ha valori molto modesti alla temperatura ambiente (dell'ordine di  $10^{-3}$ ). Essa decresce con la temperatura secondo la Legge di Curie:  $\chi_m = C/T$ . I materiali che si comportano così sono detti paramagnetici. Essi hanno dunque un comportamento lineare ed isotropo caratterizzato da una permeabilità relativa poco discosta dall'unità. Essi pertanto, come i materiali diamagnetici, modificano in modo inessenziale i campi prodotti "nel vuoto".

##### Ferromagnetismo

Quando gli atomi, gli ioni o le molecole possiedono un momento magnetico proprio e sono fortemente interagenti tra loro, gli aggregati risultanti sono ferromagnetici. L'esperienza mostra che in tal caso con campi esterni facilmente realizzabili si raggiunge la saturazione (cioè il parallelismo di tutti i dipoli magnetici) a temperatura ambiente. Si riscontrano inoltre vistosi fenomeni di magnetizzazione residua (in assenza di campo magnetico) e di isteresi. Per quanto riguarda la dipendenza dalla temperatura, a partire da un valore critico  $T_c$  della temperatura (**temperatura di Curie**) si ha un comportamento paramagnetico e quindi una suscettività magnetica che segue la Legge di Curie - Weiss:  $\chi_m = C/(T - T_c)$ . Questo insieme di proprietà, ma particolarmente quella di poter dar luogo ad intense magnetizzazioni con deboli campi applicati in materiali di ottimo comportamento meccanico - strutturale, rende il ferromagnetismo di fondamentale importanza per le applicazioni elettrotecniche.

Dal punto di vista microscopico, i materiali ferromagnetici sono formati dall'aggregazione di innumerevoli "domini magnetici" o "domini di Weiss" delle dimensioni di  $10^{-3} \div 10^{-6}$  m che sono composti da molecole o atomi che possiedono un momento magnetico proprio e sono allineati fra loro

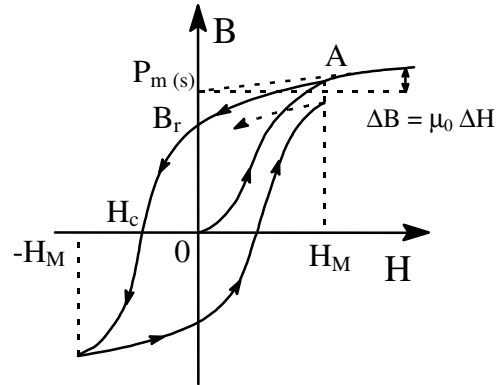


*Domini di Weiss prima e dopo l'allineamento con il campo magnetico esterno*

Se il materiale è allo stato nativo i momenti magnetici dei domini di Weiss sono orientati casualmente, producendo quindi una magnetizzazione macroscopicamente nulla. In presenza di un campo magnetico esterno, tuttavia, i momenti magnetici tendono ad allinearsi. Tale allineamento permane anche se il campo magnetico esterno è rimosso, dando origine ad una magnetizzazione residua. Tale

effetto magnetizzante è il risultato dell'equilibrio statistico tra l'azione ordinatrice del campo e quella dell'agitazione termica. Aumentando la temperatura l'effetto dell'agitazione diventa sempre più sensibile, causando la completa smagnetizzazione quando si raggiunge la temperatura di Curie. Per studiare i materiali ferromagnetici ci si basa, in concreto, sulle **caratteristiche di magnetizzazione**, cioè sui diagrammi che forniscono il valore in modulo e verso dell'induzione magnetica  $\mathbf{B}$  in funzione del campo magnetico  $\mathbf{H}$  per provini omogenei.

In figura è rappresentato un tipico processo di magnetizzazione. Il materiale sia allo stato nativo (smagnetizzato). Si distinguono una curva di prima magnetizzazione, (tratto OA) e, a partire da A un processo ciclico che non si richiude esattamente. Se il campo magnetico viene invertito ripetutamente tra i valori  $\pm H_M$ , l'evoluzione si assesta su cicli simmetrici di **isteresi**. Al variare di  $H_M$  varia l'ampiezza dei cicli.



Il raggiungimento della saturazione è evidenziato dal fatto che, per campi maggiori di  $H_M$ , l'incremento  $\Delta B$  corrispondente ad un incremento  $\Delta H$  è lo stesso che si avrebbe nel vuoto, cioè  $\mu_0 \Delta H$ . Il ciclo di isteresi che viene assunto come termine di paragone è quello descritto a partire dalla saturazione. I principali parametri usualmente considerati per la caratterizzazione dei legami B-H sono:

- le permeabilità relative differenziali valutate lungo la curva di prima magnetizzazione secondo la formula  $\mu_{r(d)} = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{dB}{dH} \right)_{dH>0}$ , in particolare quella iniziale ( $B = 0, H = 0$ ) e quella massima;
- il valore della magnetizzazione di saturazione  $P_{m(s)}$ ;
- l'induzione residua  $B_r$  che si ha quando il campo esterno viene portato a zero;
- il campo coercitivo  $H_c$  che è necessario applicare in verso opposto a  $B_r$  per ridurre a zero l'induzione;
- alcuni valori di energie specifiche del ciclo, quali l'area  $W_{ist}$  del ciclo oppure il valore del massimo del prodotto  $|BH|$  lungo il ciclo.

L'area  $W_{ist}$  del ciclo di isteresi ha un significato particolare: è noto, dal Teorema di Poynting, che la variazione di densità di energia magnetica in seguito ad una variazione  $d\mathbf{B}$  del campo di induzione è  $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$ . Tale energia magnetica viene convertita in parte in energia conservativa ed in parte in energia dissipata (calore), secondo la relazione:

$$\int_{V_m} (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}) d\tau = dE_c + \delta E_d \quad (4.1)$$

Integrando la (2.3) su un ciclo di isteresi, si ottiene:

$$\int_{V_m} \oint (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}) d\tau = \oint dE_c + \oint \delta E_d = E_d \quad (4.2)$$

Se si considera la densità di energia dissipata (misurata in joule /ciclo·m<sup>3</sup>), la (4.2) diventa:

$$P_d = \oint (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}) = W_{ist} \propto B_M^{1.6} \quad (4.3)$$

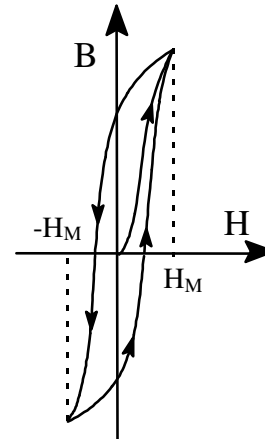


La relazione di proporzionalità dell'area del ciclo di isteresi  $W_{ist}$  con una potenza del campo di induzione massimo  $B_M$  è specificata dalle Norme. L'esponente è solitamente compreso tra 1.6 e 2.

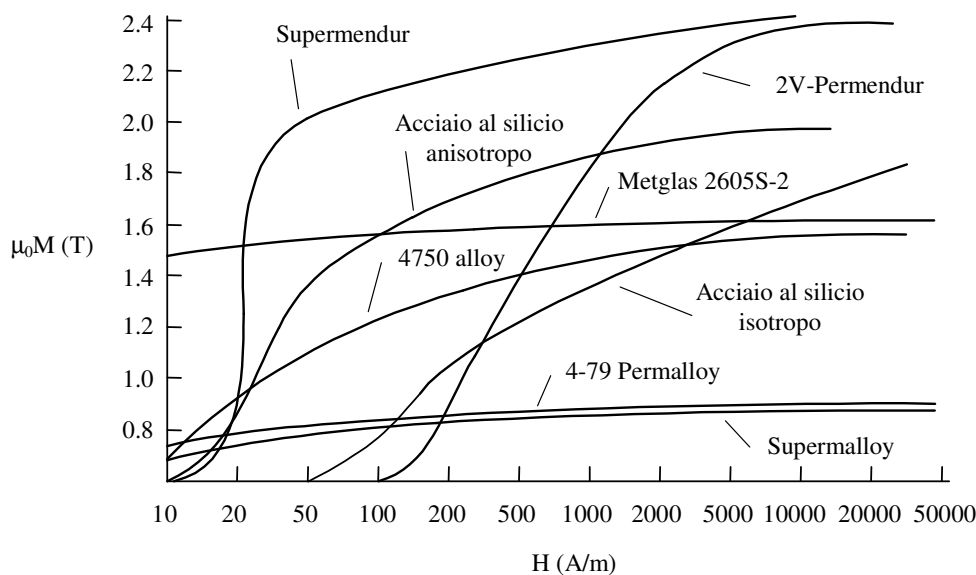
### Materiali ferromagnetici dolci

Un importante sottogruppo nei materiali ferromagnetici è dato dai **materiali ferromagnetici dolci** che sono caratterizzati da elevati valori della permeabilità e basso valore del campo coercitivo ( $H_c < 10^3$  A/m) cui si collega il basso valore dell'area del ciclo di isteresi.

I materiali di questo gruppo vengono impiegati laddove interessa limitare al massimo le correnti necessarie per produrre e controllare i flussi di induzione (nuclei di elettromagneti, nuclei di trasformatori, rotor e statori di macchine rotanti). I materiali di questo gruppo principalmente utilizzati sono il ferro e le sue leghe con nickel, cobalto e silicio, gli acciai a basso tenore di carbonio e le ferriti dolci.



*Ciclo di isteresi per materiali ferromagnetici dolci*



*Caratteristiche di magnetizzazione di alcuni materiali dolci.*

Il ferro commercialmente puro (ferro dolce) viene utilizzato nelle applicazioni in continua (nuclei di elettromagneti). Per applicazioni in alternata, ad esempio lamierini per motori, viene utilizzato preferibilmente acciaio a basso tenore di carbonio (Low Carbon) e acciaio al silicio a grani non orientati (isotropo) a causa della loro minore conducibilità. Questi due materiali sono in assoluto i più usati nel mondo (1÷2 Mton/anno). L'isotropia fa sì che le proprietà magnetiche non varino al variare della direzione del flusso magnetico e quindi che non si abbiano problemi particolari nelle operazioni di taglio e montaggio. Questi tipi di materiale sono usati per le macchine rotanti e solo eccezionalmente per i trasformatori. Diversi sono i tipi di lamiere laminate a caldo sia per quanto riguarda lo spessore (0.5 mm oppure 0.35 mm) sia soprattutto per il tenore di silicio che può andare dall'1% al 4.5%. Per i nuclei dei trasformatori (salvo quelli di piccola potenza), in cui il peso e l'efficienza sono importanti, viene utilizzato preferibilmente acciaio al silicio a grani orientati (anisotropo).

L'anisotropia offerta dalle leghe Fe - Si a cristalli orientati, a differenza delle altre leghe, è tale da presentare per il flusso una sola direzione ottimale (quella di laminazione) per la quale le caratteristiche magnetiche sono molto buone e le perdite molto basse.

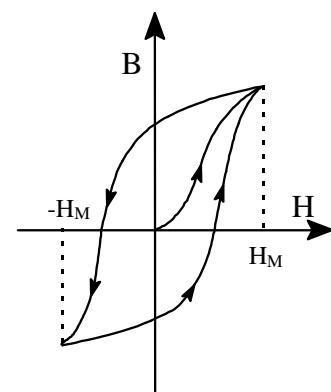
Per le applicazioni elettroniche (trasformatori ed induttori) a frequenza 1÷100 kHz sono solitamente utilizzate le leghe ferro - nickel (permalloys). Queste hanno sia una elevata permeabilità iniziale  $\mu_i$  sia una duttilità sufficientemente elevata da potere formare strisce molto sottili. Le leghe ferro - cobalto, di solito con un 2% di Vanadio per migliorare la duttilità, sono utilizzate nelle applicazioni ad alta temperatura a causa della loro elevata temperatura di Curie ( $T_c \approx 980^\circ\text{C}$ ). Le leghe amorfe ferro - boro (vetri metallici) hanno una composizione del tipo  $(\text{Fe}, \text{Co}, \text{Ni})_{80}(\text{B}, \text{C}, \text{Si})_{20}$  e sono ottenute per rapido raffreddamento del materiale fuso.

Le ferriti (dolci), a causa della loro conducibilità estremamente bassa, sono utilizzate per i nuclei di trasformatori ed induttori funzionanti a frequenza oltre 100 kHz. Le ferriti sono ossidi metallici sinterizzati (facilmente lavorabili) con la formula generale  $\text{XFe}_2\text{O}_4$ . Nelle ferriti manganese - zinco X è una combinazione di Mn, Zn e Fe, mentre nelle ferriti nickel - zinco Mn è sostituito da Ni. Le ferriti MnZn hanno un capo di induzione di saturazione piuttosto elevato, ma anche una alta conducibilità, per cui sono utilizzate per applicazioni fino ad 1 MHz. Oltre 1 MHz si utilizzano solitamente le ferriti NiZn che hanno una conducibilità notevolmente più bassa.

### Materiali ferromagnetici duri

Un altro importante sottogruppo nei materiali ferromagnetici è dato dai **materiali ferromagnetici duri** che sono caratterizzati da elevati valori della induzione residua e del campo coercitivo ( $H_c > 10^4$  A/m) cui si collega l'elevato valore del prodotto  $|BH|$  ottenuto nel 2° quadrante.

I materiali di questo gruppo vengono impiegati laddove interessa realizzare flussi magnetici costanti nel tempo e pertanto conviene ricorrere al magnetismo permanente invece che a circuiti percorsi da corrente.



*Ciclo di isteresi per materiali ferromagnetici duri*

I materiali magnetici duri commercialmente più importanti sono le ferriti (dure), le leghe ed i sinterizzati comprendenti terre rare e gli Alnico. Il mercato mondiale dei materiali magnetici duri nel 1990 è stato  $1.5 \cdot 10^9$  US\$. Le quote di mercato sono state: 65% ferriti, 22% terre rare (18% composti di cobalto, 4% Nd - Fe - B), 11% Alnico, 2% altri.

*Alnico.* Gli Alnico (Fe - Al - Ni - Co - Cu) sono divisi in due sottogruppi: gli alnico isotropi (1-4) che contengono fino al 20% di cobalto e gli alnico anisotropi (5-9) che contengono dal 20% al 40% di cobalto. L'anisotropia viene ottenuta per raffreddamento controllato del materiale fuso in presenza di un campo magnetico esterno. Questi materiali hanno un elevato prodotto  $|BH|_{\max}$  ( $40 \div 70$  kJ/m<sup>3</sup>), una elevata induzione residua (0.7÷1.35 T) e modesto campo coercitivo (40÷160 kA/m). Gli Alnico sono fragili e quindi sono solitamente prodotti per fusione o sinterizzazione. L'Alnico 5 è il materiale più diffuso di questa famiglia.

*Ferriti.* Le ferriti (dure) sono ossidi metallici sinterizzati (facilmente lavorabili) con la formula generale  $\text{XFe}_{12}\text{O}_{19}$  dove X è solitamente Ba o Sr. A differenza degli Alnico, le ferriti hanno elevato

campo coercitivo ( $200 \div 300$  kA/m) ma bassa induzione residua ( $0.4 \div 0.5$  T). Le ferriti di stronzio sono meno diffuse delle ferriti di bario a causa del loro costo più elevato, anche se il loro campo coercitivo è circa doppio. Le ferriti sono prodotte spesso in forma legata elastica o rigida (il legante è solitamente plastica o gomma). Le ferriti legate mostrano una notevole uniformità nelle proprietà magnetiche (importante per la produzione di serie) ed hanno il notevole vantaggio di non essere fragili. Lo svantaggio fondamentale è che le proprietà magnetiche peggiorano notevolmente rispetto alle ferriti non legate (il prodotto  $|BH|_{\max}$  si riduce del 50%).

*Terre rare.* I magneti permanenti contenenti samario sono diventati commercialmente disponibili negli anni 70. I magneti  $\text{SmCo}_5$  hanno ottenuto in laboratorio ottime prestazioni ( $B_r = 1\text{T}$ ,  $H_c = 3200$  kA/m,  $|BH|_{\max} = 200$  kJ/m<sup>3</sup>), ma le prestazioni commerciali sono leggermente più basse ( $|BH|_{\max} = 130 \div 160$  kJ/m<sup>3</sup>). I magneti  $\text{Sm}_2(\text{Co}, \text{Fe}, \text{Cu}, \text{Zr})_{17}$  hanno prestazioni commerciali anche migliori ( $B_r = 1.1\text{T}$ ,  $H_c = 520$  kA/m,  $|BH|_{\max} = 240$  kJ/m<sup>3</sup>). Questi magneti sono prodotti con la tecnologia ceramica per sinterizzazione, ma anche in forma cristallina e mescolati a leganti plastici per migliorare le caratteristiche meccaniche. I magneti permanenti contenenti neodimio sono diventati commercialmente disponibili nel 1983. I magneti  $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$  hanno ottenuto in laboratorio valori record del prodotto  $|BH|_{\max} = 405$  kJ/m<sup>3</sup>, ma le prestazioni commerciali sono leggermente più basse ( $|BH|_{\max} = 160 \div 300$  kJ/m<sup>3</sup>). Eccetto che per la temperatura di Curie relativamente bassa ( $312^\circ\text{C}$ ), i magneti Nd - Fe - B sono decisamente superiori a tutti gli altri materiali magnetici duri disponibili attualmente.

I magneti permanenti sono principalmente utilizzati per motori ed altoparlanti. La figura 1 mostra il progresso avvenuto in questo secolo nel campo dei materiali magnetici. Per definire le proprietà dei magneti si utilizza solitamente il prodotto  $|BH|_{\max}$ . In particolare è evidente la crescita spettacolare avvenuta negli anni 70 nel campo dei sinterizzati comprendenti terre rare. La figura 2 mostra le curve di demagnetizzazione per alcuni materiali ferromagnetici duri.

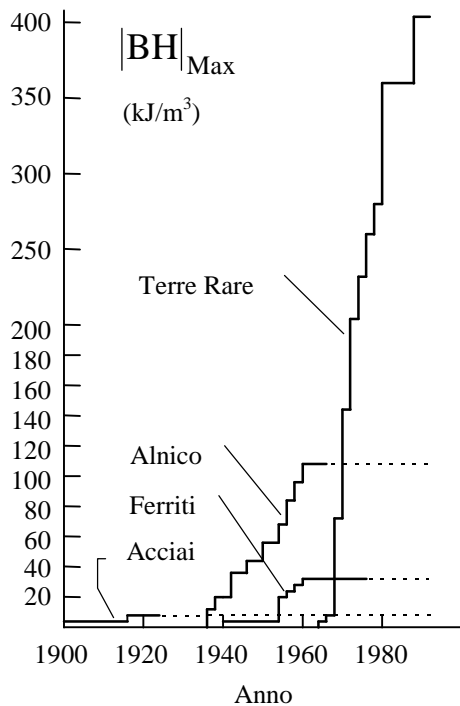


Figura 1.

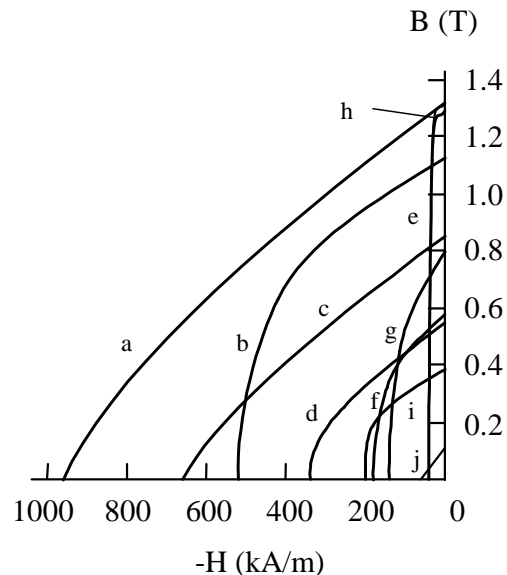


Figura 2. - Curve di demagnetizzazione per materiali ferromagnetici duri: a)  $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ , b)  $\text{Sm}(\text{Co}, \text{Cu}, \text{Fe}, \text{Zr})_{7.4}$ , c)  $\text{SmCo}_5$ , d)  $\text{SmCo}_5$  legato, e) Alnico 5, f) Mn - Al - C, g) Alnico 9, h) Cr - Co - Fe, i) ferrite, j) ferrite legata.

## SISTEMA INTERNAZIONALE DI GRANDEZZE E UNITÀ DI MISURA (SI)

| <b>Grandezze ed unità fondamentali</b>  |           |            |         |
|---|-----------|------------|---------|
| Nome                                    | Simbolo   | Unità      | Simbolo |
| Lunghezza                               | <i>l</i>  | metro      | m       |
| Massa                                   | <i>m</i>  | kilogrammo | kg      |
| Intervallo di tempo                     | <i>t</i>  | secondo    | s       |
| Corrente elettrica                      | <i>i</i>  | ampere     | A       |
| Intervallo di temperatura               | $\theta$  | kelvin     | K       |
| Intensità Luminosa                      | <i>I</i>  | candela    | cd      |
| Quantità di materia                     | -         | mole       | mol     |
| <b>Grandezze ed unità complementari</b> |           |            |         |
| Angolo piano                            | $\varphi$ | radiante   | rad     |
| Angolo solido                           | $\Omega$  | steradiano | sr      |

Ogni grandezza derivata è espressa nella sua forma elementare da un monomio di grandezze precedentemente definite e può sempre essere ridotta ad un monomio di grandezze fondamentali e complementari. Le unità relative sono derivate dalle unità delle grandezze che compaiono nel monomio di definizione; talvolta le unità stesse hanno ricevuto un nome indipendente da quelle delle unità da cui sono derivate. Nella tabella successiva sono riportate alcune grandezze derivate e le loro unità, con particolare riferimento alle grandezze utili nell'elettrotecnica.

| <b>Multipli e sottomultipli nel SI</b> |                |                |
|--|----------------|----------------|
| <b>Prefisso</b>                        | <b>Simbolo</b> | <b>Fattore</b> |
| Tera                                   | T              | $10^{12}$      |
| Giga                                   | G              | $10^9$         |
| Mega                                   | M              | $10^6$         |
| Chilo                                  | k              | $10^3$         |
| Milli                                  | m              | $10^{-3}$      |
| Micro                                  | $\mu$          | $10^{-6}$      |
| Nano                                   | n              | $10^{-9}$      |
| Pico                                   | p              | $10^{-12}$     |

| Grandezza e simbolo                  | Unità e simbolo       | Definizione  |
|--------------------------------------|-----------------------|--|
| Frequenza ( <i>f</i> )               | hertz (Hz)            | $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$  |
| Lavoro (L), Energia (W, E)           | joule (J)             | $1 \text{ J} = 1 \text{ N}\cdot\text{m} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$                    |
| Potenza (P)                          | watt (W)              | $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3$                               |
| Carica elettrica (q, Q)              | coulomb (C)           | $1 \text{ C} = 1 \text{ A}\cdot\text{s}$   |
| Tensione elettrica (v)               | volt (V)              | $1 \text{ V} = 1 \text{ W/A} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/(\text{A}\cdot\text{s}^3)$                |
| Capacità (C)                         | farad (F)             | $1 \text{ F} = 1 \text{ C/V} = 1 \text{ A}^2\cdot\text{s}^4/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$              |
| Resistenza (R), Reattanza (X)        | ohm ( $\Omega$ )      | $1 \Omega = 1 \text{ V/A} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/(\text{A}^2\cdot\text{s}^3)$                 |
| Conduttanza (G), Ammettenza (Y)      | siemens (S)           | $1 \text{ S} = 1 \text{ A/V} = 1 \text{ A}^2\cdot\text{s}^3/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$              |
| Flusso magnetico ( $\phi$ , $\Phi$ ) | weber (Wb)            | $1 \text{ Wb} = 1 \text{ V}\cdot\text{s} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/(\text{A}\cdot\text{s}^2)$    |
| Induzione magnetica (B)              | tesla (T)             | $1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2 = 1 \text{ kg}/(\text{A}\cdot\text{s}^2)$                            |
| Auto e Mutua induttanza (L), (M)     | Henry (H)             | $1 \text{ H} = 1 \text{ V}\cdot\text{s/A} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/(\text{A}^2\cdot\text{s}^2)$ |
| Pulsazione ( $\omega$ )              | rad/s                 |  |
| Campo elettrico (E)                  | V/m                   |  |
| Campo magnetico (H)                  | A/m                   |  |
| Spostamento elettrico (D),           | C/m <sup>2</sup>      |  |
| Permittività ( $\epsilon$ )          | F/m                   |  |
| Permeabilità ( $\mu$ )               | H/m                   |  |
| Resistività ( $\rho$ )               | $\Omega\cdot\text{m}$ |  |
| Potenza reattiva (Q)                 | VAr                   | Dimensionalmente uguale al W.  |
| Potenza apparente (N)                | voltampere (VA)       | Dimensionalmente uguale al W.  |